E L G R U P O F U N D A M E N T A L

Alberto Aguilera García

Dado un espacio topológico X y un punto $x_o \in X$, se considera un grupo designado por $\pi(X, x_o)$ y llamado GRUPO FUNDAMENTAL DE X. Consecuentemente, es definido usando caminos cerrados en X, y es invariante topológico del espacio X, al cual está asociado. Lo anterior significa que si dos espacios topológicos son homeomorfos, sus grupos fundamentales son isomorfos. Así, al usar el "grupo fundamental", es posible reducir algunos problemas topológicos sobre espacios a problemas algebraicos sobre espacios. Situación similar ocurre entre las aplicaciones continuas y los homomorfismos.

DEFINICION 1: Un camino o arco en un espacio topológico S es una aplicación continua de algún intervalo cerrado en X. Las imágenes de los extremos del intervalo se llaman EXTREMOS del camino y el camino une sus extremos. Uno de los extremos se llama ORIGEN y el otro PUNTO final o simplemente EXTREMO.

DEFINICION 2: Un espacio X, se llama ARCO CONEXO O CONEXO POR CAMINOS, si dos puntos cualesquiera de X, pueden unirse con un arco.

DEFINICION 3: Sean $f: [a, b] \longrightarrow X$, y $g: [a, b] \rightarrow X$ dos caminos en X, tales que: $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, tienen el mismo origen y el mismo punto final.

$f \sim g$ (f y g son equivalentes) si y sólo si EXISTE UNA APLICACION CONTINUA

$$h: [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow X, \text{ tal que:}$$

$$\left.\begin{array}{l} h(t,0) = f(t) \\ h(t,1) = g(t) \end{array}\right\} \quad t \in [a, b]$$

$$\left.\begin{array}{l} h(a,s) = f(a) = g(a) \\ h(b,s) = f(b) = g(b) \end{array}\right\} \quad s \in [0, 1]$$

PROPOSICION 1: Sean A, B subconjuntos cerrados de X, tales que $A \cup B = X$ y sean $f: A \longrightarrow Y$, $g: B \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas en un espacio Y, tales que: $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A \cap B$. Entonces la aplicación $h: X \longrightarrow Y$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

ES CONTINUA.

Demostración. Sea $\boxed{F \text{ cerrado en } Y}$

Por hipótesis $X = A \cup B$, y

$$h^{-1}(F) = h^{-1}(F) \cap (A \cup B) = (h^{-1}(F) \cap A) \cup (h^{-1}(F) \cap B)$$

$$h^{-1}(F) = \{x \in A \cap X / \ h(x) \in F\} \cup \{x \in B \cap X / \ h(x) \in F\}$$

$$= \{x \in A / \ f(x) \in F\} \cup \{x \in B / \ g(x) \in F\}$$

puesto que: $h/_A = f$, $h/_B = g$

Ahora: $f^{-1}(F) = \{x \in A / \ f(x) \in F\}$ y $g^{-1}(F) = \{x \in B / \ g(x) \in F\}$

g, f son continuas, luego:

$f(F)$ es cerrado en la topología inducida en A; lo mismo sucede con $g(F)$ en la topología inducida en B. Como A, B son cerrados en X, se sigue que:

$$f^{-1}(F) \text{ y } g^{-1}(F) \text{ son cerrados en } X,$$

por lo tanto: $\underline{h^{-1}(F) \text{ es cerrado}}$ en X, y así h es continua.

Utilizando la proposición 1, puede probarse que la relación:

$$R = \{(f, g)/ f \sim g;\ f, g \text{ caminos en } X\}$$

es una RELACION DE EQUIVALENCIA.

Tal relación determina una partición en clases de equivalencia de X, y la clase de equivalencia del camino f, la llamamos $\bar{f}$.*

DEFINICION 4: f, g caminos en X, tales que el extremo de f coincide con el origen de g, entonces el PRODUCTO de f con g, (fg), se define así:

$$fg(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

CONSIDEREMOS: $\pi(x) = \{\bar{f}/ f \text{ es camino en } X\}$, y $\pi(x)$ si f, g son tales que el extremo de f coincide con el origen de g, entonces $\bar{f} \circ \bar{g} = \overline{fg}$

PROPOSICION 2: Si $f_o \sim f$ y $g_o \sim g$ entonces $f_o g_o \sim f_1 g_1$

Asumiento que el extremo de f_i coincide con el origen de g_i, $i = o,1$.

(En otras palabras, la relación de equivalencia y el producto según DEFINICION 4, son compatibles).

Demostración. Existen H, L aplicaciones continuas de $I \times I \longrightarrow X$, tales que

---

* Sin perder generalidad, se hablará de camino en X una aplicación continua de $[0,1] \longrightarrow X$

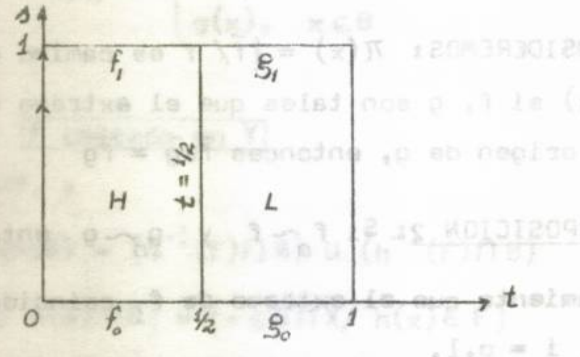
$$\begin{cases} H(t,\ 0) = f_o(t) \\ H(t,\ 1) = f_1(t) \\ L(t,\ 0) = g_o(t) \\ L(t,\ 1) = g_1(t) \end{cases} \quad \text{para } t \in I$$

$$\begin{cases} H(0,\ s) = f_o(0) = f_1(0) \\ H(1,\ s) = f_o(1) = f_1(1) \\ L(0,\ s) = g_o(0) = g_1(0) \\ L(1,\ s) = g_o(1) = g_1(1) \end{cases} \quad \text{para } s \in I$$

Ahora $f_i g_i(t) = \begin{cases} f_i(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g_i(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad i = 0,\ 1$

Gráficamente la construcción de $F: I \times I \longrightarrow X$,

$$F(t,\ s) = \begin{cases} H(2t,\ s) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ L(2t-1,\ s) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad s \in I$$



F está bien definida, ya que:

$$F(1/2,\ s) = H(1,\ s) = f_o(1) = g_o(0) = L(0,\ s)$$

$$f_o g_o(T) = F(t,\ 0) = \begin{cases} H(2t,\ 0) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ L(2t-1,\ 0) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$f_1 g_1(t) = F(t,\ 1) = \begin{cases} H(2t,\ 1) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ L(2t-1,\ 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} F(0,\ s) = H(0,\ s) = f_1 g_1(0) = f_o g_o(0) \\ F(1,\ s) = H(1,\ s) = f_1 g_1(1) = f_o g_o(1) \end{array}\right\} \quad s \in I$$

$F\big|\ [0, 1/2]\times I$ y $F\big|\ [1/2, 1]\times I$

son CONTINUAS, entonces por proposición 1, <u>F ES CONTINUA</u>.

<u>PROPOSICION 3</u>: $(\bar{f}\circ\bar{g})\circ\bar{h} = \bar{f}\circ(\bar{g}\circ\bar{h})$

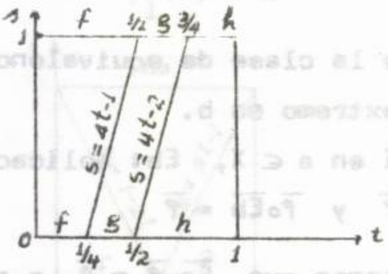
<u>Demostración</u>. Sean f, g, h tales que: el extremo de f coincide con el origen de g y el extremo de g coincide con el origen de h, entonces probaremos que:

$$(\bar{f}\circ\bar{g})\circ\bar{h} = \overline{fg}\circ\bar{h} = \overline{(fg)h} = \overline{f(gh)} = \bar{f}\circ(\overline{g\circ h})$$

$$((fg)h)(t) = \begin{cases} f(4t) & 0 \le t \le 1/4 \\ g(4t-1) & 1/4 \le t \le 1/2 \\ h(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$(f(gh))(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ g(4t-2) & 1/2 \le t \le 3/4 \\ h(4t-3) & 3/4 \le t \le 1 \end{cases}$$

Gráficamente la situación se presenta así:



Para construír $F: I\times I \longrightarrow X$, se requiere:

t	F(t, s)
0	f(0)
$\frac{s+1}{4}$	f(1) = g(0)
$\frac{s+2}{4}$	g(1) = h(0)
1	h(1)

$F(t,s) = f(f_1(t)); \quad 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}$

$= f(\frac{4t}{s+1})$, considerando $f_1(t)$ como la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1, P_2 de coordenadas: $(0, 0)$ y $(\frac{s+1}{4}, 1)$

Para $F(t, s) = g(g_1(t)); \quad \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}$

se sigue que $F(t,s) = g(4t-s-1)$, y

$$F(t,s) = h(1 - \frac{4(1-t)}{2-s}); \quad \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1$$

así:

$$f(\frac{4t}{s+1}) = F(t, s); \quad 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}$$

$$F(t,s) = g(4t-1-s); \quad \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}$$

$$F(t,s) = h(1 - \frac{4(1-t)}{2-s}); \quad \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1$$

Como: $F \Big| \left[0, \frac{s+1}{4}\right] \times I \quad F \Big| \left[\frac{s+2}{4}, 1\right] \times I \quad F \Big| \left[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}\right] \times$

son continuas, entonces F ES CONTINUA.

(Se pueden verificar las otras condiciones).

PROPOSICION 4: $\bar{f}$ es la clase de equivalencia de caminos con origen en a y extremo en b.

Ea: aplicación de I en $a \in X$, Eb: aplicación de I en b

Entonces: $\overline{Ea} \circ \bar{f} = \bar{f}$ y $\bar{f} \circ \overline{Eb} = \bar{f}$

Demostración. Mostremos que $\overline{Ea} \circ \bar{f} = \bar{f}$, o sea que $Eaf \sim f$

Sea, $\quad g: I \longrightarrow X$, aplicación tal que $g(I) = \{a\}$

y $\quad h: I \longrightarrow X$, aplicación tal que $h \in \bar{f}$

Veamos que: $gh \sim h$

Se considera: $F: I \times I \longrightarrow X$ definida así:

$$F(t,s) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq 1/2\, s \\ h(\frac{2t-s}{2-s}) & 1/2\, s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$F(t, 0) = h(t) \quad y \quad F(t, 1) = (gh)(t)$$ *

PROPOSICION 5: $\overline{f}$, $(\overline{\hat{f}})$ ** son clases de equivalencia de caminos: f, tiene origen en a y extremo en b.

Entonces: $\overline{f}\circ(\overline{\hat{f}}) = \overline{E_a}$ y $(\overline{\hat{f}})\,\overline{f} = \overline{E_b}$

Demostración: $\overline{f}\,(\overline{\hat{f}}) = \overline{E_a}$

Se demuestra: $f\,\hat{f} \sim E_a$

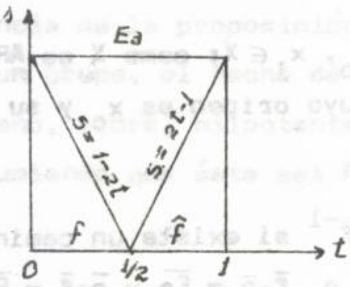
$$f\,\hat{f}(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(2-2t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se requiere de $F(1/2, 0) = f(1)$
y $F(1/2, 1) = f(0)$
para construír $F: I\times I \longrightarrow X$

Si $F(t,s) = f(f_1(s))$; $\frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2}$, f_1 continua,

entonces podemos considerar a f_1, como la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 1), (1, 0); o sea:

$$f_1(s) = 1 - s$$



* MASSEY, William S, Introducción a la toplogía algebraica, Barcelona, Reverté, 1972, p.p. 59-60

** Sea f un camino arbitrario, $f: I \longrightarrow X$, designamos $\hat{f}$ el camino definido por: $f(t) = f(1-t)$, $t \in I$. Al recorrer f en dirección opuesta, se obtiene $\hat{f}$.

$$F(t, s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f(1-s) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ f(2-2s) & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y

F cumple la definición 3 y así:

$$\bar{f}\circ(\overline{\hat{f}}) = \overline{Ea}\ ^{*}$$

DEFINICION 5: Un camino o clase de caminos se llama cerrado, o LAZO, si sus extremos coinciden. El extremo común se dice que es BASE DEL LAZO.

Sea x_o un punto arbitrario de X. El conjunto de lazos con base en x_o, es un GRUPO y se llama GRUPO DE H. POINCARE o GRUPO FUNDAMENTAL DE X en el punto base x_o y se nota:

$$\pi(X, x_o)$$

PROPOSICION 6: Si X es arco conexo (véase definición 2), $\pi(X, x_o)$ y $\pi(X, x_1)$, son ISOMORFOS para todo par de puntos $x_o, x_1 \in X$.

Demostración. Sean $x_o, x_1 \in X$; como X es ARCO CONEXO, existe f camino en X, cuyo origen es x_o y su extremo es x_1.

---

* $(\overline{\hat{f}})$ se designa por $\bar{f}^{-1}$ si existe un camino g, tal que $f(0) = a$, $f(1) = g$, $\bar{f}\circ\bar{g} = \overline{Ea}$ y $\bar{g}\circ\bar{f} = \overline{Eb}$, entonces:
$\bar{g}\circ\bar{f}\circ\bar{f}^{-1} = (\bar{g}\circ\bar{f})\circ\bar{f}^{-1} = \overline{Eb}\circ\bar{f}^{-1} = \bar{f}^{-1}$, y
$\bar{g}\circ\bar{f}\circ\bar{f}^{-1} = \bar{g}\circ(\bar{f}\circ\bar{f}^{-1}) = \bar{g}\circ\overline{Ea} = \bar{g}$, o sea, $\bar{g} = \bar{f}^{-1}$,
de tal manera que $\bar{f}^{-1}$ está definida de manera única por las condiciones de la proposición 5.
Cuando $E_a \sim E_b$ o sea $Ea(0) = Eb(0)$ y $Ea(1) = Eb(1)$, $\bar{f}\circ\bar{f}^{-1} = \bar{f}^{-1}\circ\bar{f}$; $a = b$, pues Ea, Eb son caminos constantes.

Por lo tanto se define:

$$F: \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(X, x_1)$$

tal que: $\quad F(g) = \bar{f}^{-1} \circ \bar{g} \circ \bar{f}$

para todo $\bar{g} \in \pi(X, x_0)$

F es homomorfismo, pues para $\bar{g}_1, \bar{g}_2 \in \pi(X, x_0)$,

$$\begin{aligned} F(\bar{g}_1 \circ \bar{g}_2) &= \bar{f}^{-1} \circ (\bar{g}_1 \circ \bar{g}_2) \circ \bar{f} \\ &= \bar{f}^{-1} \circ (\bar{g}_1 \circ \overline{E_a} \circ \bar{g}_2) \circ \bar{f} \\ &= \bar{f}^{-1} \circ (\bar{g}_1 \circ \bar{f} \circ \bar{f}^{-1} \circ \bar{g}_2) \circ \bar{f} \\ &= (\bar{f}^{-1} \circ \bar{g}_1 \circ \bar{f}) \circ (\bar{f}^{-1} \circ \bar{g}_2 \circ \bar{f}) \\ &= F(\bar{g}_1) \circ F(\bar{g}_2) \end{aligned}$$

$G: \pi(X, x_1) \longrightarrow \pi(X, x_0)$ tal que $G(\bar{h}) = \bar{f} \circ \bar{h} \circ \bar{f}^{-1}$, es también homomorfismo.

G.F y F.G son el homomorfismo idéntico,

$$G.F = \dot{I}\pi(X, x_0), \qquad F.G = \dot{I}\pi(X, x_1)$$

por consiguiente, F ES ISOMORFISMO.

La importancia de la proposición 6 es que tratándose $\pi(X, x_0)$ de un grupo, el hecho de que cumpla o no tal condición (abeliano, libre, nilpotente, etc.) no depende de x_0, sino de X, asumiendo que éste sea ARCO CONEXO.

B I B L I O G R A F I A

HOCKING, John G., YOUNG, Gil S., Topología, España, Reverté, 1975, 385 p.

KELLEY, J. L., Topología General, Buenos Aires, EUDEBA, 1962, 320 p.

MASSEY, William S., Introducción a la Topología Algebraica, Barcelona, Reverté, 1972, 263 p.