# PROBLEMAS DE CONCURSO

## Solución a los Problemas Propuestos

Problema Nº 1. Encontrar las raíces reales de la ecuación

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = p \qquad (1)$$

De este problema se recibieron varios intentos de solución, desafortunadamente incorrectos en diversos grados. Sin embargo constituyeron loable esfuerzo que invitamos a imitar a todos nuestros lectores.

**Solución:**

Por comodidad hagamos

$$u = \sqrt[3]{1-x} \quad , \quad v = \sqrt[3]{1+x} \qquad (2)$$

la ecuación (1) queda

$$u + v = p \qquad (3)$$

elevando al cubo se tiene la ecuación equivalente a la anterior:

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3vu^2 = p^3$$

de donde

$$u^3 + v^3 + 3vu(u + v) = p^3 \qquad (4)$$

reemplazando en esta última ecuación (3), se tiene

$$u^3 + v^3 + 3uvp = p^3 \qquad (5)$$

He aquí la dificultad del problema: la ecuación (5) no es equivalente a (4), o lo que es lo mismo a (1). Analicemos esto más detenidamente. La ecuación (5) se puede escribir así:

$$(u+v)^3 - p^3 - 3uv(u+v-p) = 0$$

tomando la diferencia de cubos para $(u+v)^3 - p^3$ se tiene

$$(u+v-p)\left[(u+v)^2 + (u+v)p + p^2\right] - 3uv(u+v-p) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$(u+v-p)\left[(u+v)^2 + (u+v)p + p^2 - 3uv\right] = 0$$

de donde

$$(u+v-p)\left[u^2 + v^2 - uv + pu + pv + p^2\right] = 0$$

que es equivalente a dos ecuaciones a saber:

$$u + v - p = 0 \qquad (6)$$

$$u^2 + v^2 + p^2 + up + vp - uv = 0 \qquad (7)$$

o sea (5) es equivalente a (6) y (7). La primera es la ecuación propuesta (3), o lo que es lo mismo (1) y (7) pueden ser fuentes de soluciones extrañas; por tanto (5) no es equivalente a (1).

Estudiemos (7); se puede escribir (previa multiplicación por 2):

$$(u+p)^2 + (v+p)^2 + (u-v)^2 = 0$$

que se cumple solo si $u = v = -p$

O sea $\sqrt[3]{1-x} = -p$ y $\sqrt[3]{1+x} = -p$

de donde no es difícil concluír que $x = 0$ y $p = -1$. Esta última es solución de (5) pero no de (1) como es evidente, o sea que son soluciones extrañas.

Volvamos a (5), reemplazando u y v según (2), tenemos:

$$2 + 3\sqrt{1 - x^2}\,p = p^3$$

y de allí

$$x = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{p^3 - 2}{3p}\right)^3}$$

Esta expresión tiene sentido sólo cuando $p = -1$ ó $0 \leq p \leq 2$ (por qué?). De allí excluímos la solución Extraña $x = 0$ correspondiente a $p = -1$,

y tenemos que la solución es:

$$x = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{p^3 - 2}{3p}\right)^3} \qquad 0 \leq p \leq 2$$

Problema Nº 2.

Demostrar que existe un número de 100 cifras, divisible por $2^{100}$ y tal que en su escritura decimal solo entren 1 y 2.

Solución :

Demostramos algo más que lo propuesto, a saber: existe un número de n cifras divisible por $2^n$ en cuya escritura decimal entran solo 1 y 2. La demostración la haremos por inducción:

Si $n = 1$ el número buscado es $N_1 = 2$

Supongamos que la proposición es cierta para $n - 1$, o sea existe un número de $n-1$ cifras, que son sólo 1 ó 2, divisible por $2^{n-1}$.

Sea este número $N_{n-1} = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1$ (escrito decimalmente). O sea

$$N_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-p} a_k 10^{k-1}$$

Sea $a_n a_{n-1} \dots a_1 = N_n$ o lo que es lo mismo

$N_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}$ se tiene que

$$N_n = a_n 10^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k 10^{k-1} = a_n 10^{n-1} + N_{n-1}$$

escojo $a_n$ de tal manera que $N_n$ sea divisible por $2^n$. Esto es factible puesto que

$$\frac{N_n}{2^n} = \frac{a_n\, 10^{n-1}}{2^n} + \frac{N_{n-1}}{2^n} = \frac{a_n \cdot 5^{n-1}}{2} + \frac{1}{2} k_{n-1} =$$

$$= \frac{a_n \cdot 5^{n-1} + k_{n-1}}{2}$$

donde $k_{n-1} = \dfrac{N_{n-1}}{2^{n-1}}$ - entero

entonces escojo $a_n = 1$ si $k_{n-1}$ - es impar

$a_n = 2$ si $k_{n-1}$ - es par

en ambos casos $N_n$ - entero y divisible por $2^n$.

Veamos los primeros casos en la tabla siguiente:

| $n$ | $N_n$ | $k_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 12 | 3 |
| 3 | 112 | 14 |
| 4 | 2112 | 132 |
| 5 | 22112 | 691 |
| 6 | 122112 | 1908 |
| 7 | 2122112 | 16579 |

Finalmente: El número construído es único?

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Demostrar que las rectas que cortan simultáneamente el área y el perímetro de un triángulo en partes iguales, pasan por un mismo punto.

2. Demostrar que de 25 números positivos diferentes se pueden escoger 2 tales que, ninguno de los restantes es la suma o la diferencia (de mayor a menor) de los escogidos.

(Tomado de la revista KVANT, Nº 11, Moscú, 1971).

Las mejores soluciones serán publicadas en el próximo número de esta revista.