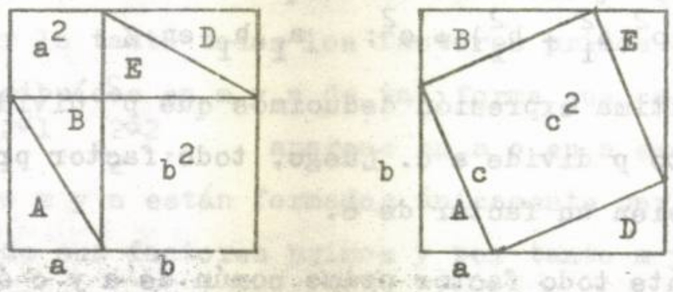
# LOS NUMEROS PITAGORICOS

Saulo Mosquera

Tal vez este enunciado sea muy familiar para Ud. "El área del cuadrado construído sobre la hipotenusa de todo triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construídos sobre los catetos". Una de las demostraciones más antiguas del anterior enunciado y que según los historiadores se debe a Pitágoras y data del año 550 A.C., es la siguiente:




$$a^2 + b^2 + A + B + E + D = c^2 + A + B + E + D$$

la cual, considero, no necesita explicaciones.

Pero, a qué se llaman <u>números pitagóricos</u>; se conoce con este nombre a toda terna de números enteros (a,b,c) que satisfacen el teorema de Pitágoras, es decir que cumplan la relación

$$a^2 + b^2 = c^2$$

donde a y b son los catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Un sencillo y conocido ejemplo muestra que tales ternas existen (y por lo tanto muchas) ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$ y por lo tanto la terna (3,4,5) cumple con las condiciones exigidas.

El propósito central de este artículo es determinar todas las ternas de números pitagóricos, es decir, exhibir fórmulas por medio de las cuales se obtengan ternas de este tipo. Para tal fin consideremos lo siguiente:

Sean a, b catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es decir:

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad a,b,c \text{ en } Z \qquad (1)$$

Sea $d = M.C.D(a,b)$ entonces a y b son divisibles por d y por tanto por algún primo p (cualquier factor primo de d), luego

$$a = pa_1 \quad y \quad b = pb_1$$

y reemplazando en (1) se obtiene:

$$p^2(a_1^2 + b_1^2) = c^2; \quad a_1, b_1 \text{ en } Z$$

De esta última expresión deducimos que $p^2$ divide a $c^2$ y por lo tanto p divide a c. Luego, todo factor primo a a y b es también un factor de c.

Análogamente todo factor primo común de a y c ó de b y c es un divisor común de los tres, por tanto podemos desechar todos los factores comunes de a, b y c (por lo tanto a d) y sólo trabajar con "ternas reducidas", es decir ternas en las cuales $M.C.D(a,b,c) = 1$ y para esto es necesario buscar ternas (a,b,c) en las cuales a,b y c sean primos entre sí dos a dos.

Para nuestro caso supongamos que $M.C.D(a,b) = 1$, esto significa que a o b es impar (por ejemplo a). De (1) obtenemos que

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b) \qquad (2)$$

Sea $t = M.C.D\,(c+b, c-b)$ entonces,

$$c+b = mt \quad y \quad c-b = nt; \quad m,n \text{ en } Z \tag{3}$$

Reemplazando en (2) se obtiene:

$$a^2 = mnt^2 \quad \text{donde} \quad M.C.D\,(m,n) = 1$$

luego, $\left(\frac{a}{t}\right)^2 = mn$ y $\frac{a}{t}$ es entero

Se mostrará ahora que m y n son cuadrados perfectos, para esto descompongamos a/t en factores primos, digamos

$$\frac{a}{t} = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots, \quad \text{luego} \quad \left(\frac{a}{t}\right)^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \ldots = mn$$

Nótese que todos los factores primos de $(a/t)^2$ deben aparecer en m y n conjuntamente, pero que cada factor primo está en m ó n pero no en ambos ya que M.C.D(m,n)=1 y por lo tanto todos los factores primos de $(a/t)^2$ están distribuídos en m y n de tal forma que cada potencia prima $p_1^{2\alpha_1}$, $p_2^{2\alpha_2}$, ... aparece en m o en n exclusivamente, luego m y n están formados únicamente por potencias pares de sus factores primos y por tanto m y n son cuadrados perfectos.

Sea entonces $m = u^2$, $n = v^2$; u,v en Z y reemplazando en (4) obtenemos $a^2 = u^2v^2t^2$, es decir

$$a = uvt \tag{5}$$

Sumando las igualdades (3) se obtiene:

$$2c = (m+n)t = (u^2 + v^2)t \quad \text{y así:} \quad c = \frac{(u^2 + v^2)t}{2} \tag{6}$$

Restando las igualdades (3) se obtiene:

$$2b = (m-n)t = (u^2 - v^2)t \quad \text{y así:} \quad b = \frac{(u^2 - v^2)t}{2} \tag{7}$$

Como a es impar de (5) se deduce que u,v y t también deben ser impares ya que si uno de ellas fuera par, el producto $uvt$ sería par y por tanto $a$ par (absurdo). Además $t = 1$ ya que si $t \neq 1$ de $a = uvt$ y $b = \frac{u^2 - v^2}{2}t$ se deduciría que $a$ y $b$ tendrían un factor común $t \neq 1$ (absurdo) ya que M.C.D $(a,b) = 1$.

De las igualdades (3) también se deduce que $n < m$ y por tanto $v < u$ y como $m = u^2$ y $n = v^2$ son primos entre sí se sigue que $u$ y $v$ también lo son.

Por tanto las fórmulas (5), (6) y (7) quedan:

$$a = uv, \qquad b = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad y \quad c = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{8}$$

y en resumen tenemos lo siguiente:

"Si $(a,b,c)$ es una terna pitagórica donde M.C.D$(a,b,c) = 1$ entonces $a,b,c$ pueden representarse por las expresiones (8) donde $u$ y $v$ son números impares primos entre sí y $u > v$".

Recíprocamente: "Si M.C.D $(u,v) = 1$, $u$ y $v$ impares y $u > v$ entonces los números $a,b$ y $c$ dados por las expresiones (8) forman una tríada pitagórica tal que M.C.D $(a,b,c) = 1$".

Para probar esto nótese que:

$$(uv)^2 + \left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2$$

luego $a$, $b$ y $c$ dados por (8) forman una tríada pitagórica. Ahora solo resta mostrar que M.C.D $(a,b,c) = 1$.

Supongamos que M.C.D $(a,b,c) = k \neq 1$, entonces $k$ es un factor común de $a,b$ y $c$ y por tanto $b$ y $c$ poseen un primo $p$ como factor común (cualquier divisor primo de $k$) luego, $b = pb_1$ y $c = pc_1$ y de las igualdades (8) obtenemos:

$$2b = u^2 - v^2 \quad y \quad 2c = u^2 + v^2$$

de las cuales, sumándolas y restándolas deducimos que:

$$u^2 = c + b \quad y \quad v^2 = c - b$$

entonces $u^2 = p(c_1 + b_1)$ y $v^2 = p(c_1 - b_1)$ las cuales nos dicen que p divide simultáneamente a $u^2$ y $v^2$ y como p es primo entonces p divide al tiempo a u y v (absurdo) ya que u y v son primos entre sí y por lo tanto M.C.D (a, b, c) = 1.

La siguiente tabla proporciona algunas triadas pitagóricas para diferentes valores de u y v.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| u = 3 | v = 1: | a = 3 | b = 4 | c = 5 |
| u = 5 | v = 1: | a = 5 | b = 12 | c = 13 |
| u = 5 | v = 3: | a = 15 | b = 8 | c = 17 |
| u = 7 | v = 1: | a = 7 | b = 24 | c = 25 |
| u = 7 | v = 3: | a = 21 | b = 20 | c = 29 |
| u = 7 | v = 5: | a = 35 | b = 12 | c = 37 |
| u = 9 | v = 1: | a = 9 | b = 40 | c = 41 |
| u = 9 | v = 5: | a = 45 | b = 28 | c = 53 |
| u = 9 | v = 7: | a = 63 | b = 16 | c = 65 |

Es de anotar que las expresiones (8) nos dan aquellas ternas pitagóricas en las cuales M.C.D (a, b, c) = 1, todas las demás ternas se obtienen multiplicando las igualdades (8) por cualquier factor común t.

Obsérvese además que una generalización de lo anterior sería; "Hallar todas las ternas de números enteros positivos a, b, c tales que

$$a^n + b^n = c^n \qquad (9)$$

para cualesquier $n > 2$.

Pierre de Fermat (1601 - 1655) afirmó que la ecuación (9) no tiene solución en enteros positivos para $n > 2$, afirmación que se conoce con el nombre de "EL ULTIMO TEOREMA DE FERMAT"; esta aseveración nunca ha sido demostrada en sentido favorable o contrario; más sin embargo si ha sido demostrada para algunos valores de n; por ejemplo Kummer (1810 - 1893) la probó para todos los valores de n desde 3 a 100.

Si Ud. desea "repasar" las ideas aquí expuestas puede tratar de hallar expresiones para todas las ternas a, b, c de enteros positivos que satisfagan

$$a^2 + 2b^2 = c^2$$