REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS

Interpretación geométrica de la regla de Cramer

Juan Carlos Bressan [1], **Ana E. Ferrazzi de Bressan** [2]

jbressan@mybfyb.ffyb.uba.ar, aeferrazzi@uade.edu.ar

[1]*Facultad de Farmacia y Bioquímica, Universidad de Buenos Aires, Junín 956, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.*
[2]*Facultad de Ingeniería, Universidad Argentina de la Empresa, Lima 717, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.*

Resumen

El nodo cognitivo de este trabajo es la regla de Cramer, buscando su relación con las transformaciones lineales y con las correspondientes interpretaciones geométricas. A fin de lograrlo el trabajo se organizó en dos partes.
En la primera se hizo una interpretación geométrica y demostración de dicha regla para sistemas lineales de orden tres, mediante las propiedades del producto mixto (vectorial y escalar) y del espacio euclidiano tridimensional.
En la segunda, utilizando propiedades del Álgebra lineal, se generalizan aquellos conceptos para aplicarlos a los sistemas lineales de orden *n*.
En las dos partes se expresaron las incógnitas como cociente de componentes ortogonales, efectuándose una interpretación de las mismas. Además, como caso particular, se analizaron las soluciones del sistema lineal cuando los vectores columna de los coeficientes de cada incógnita son ortogonales y también en el caso en que sean ortonormales.

Palabras clave: Nodo Cognitivo, Regla de Cramer, transformación lineal, determinante, ortogonalidad

Abstract

The knowing kernel of this work is Cramer rule, its relations with linear transformations and its geometric interpretation. To obtain it, this paper was organized in two parts.
Part one: It was made a geometric interpretation and demonstration of Cramer rule for systems of three linear equations, using vector and inner products and Euclidean space properties.
Part two: It was generalized that concepts at systems of n-linear equations using Linear Algebra properties.
In both parts, it was expressed the unknown quantities as orthogonal components quotient with its interpretations. Almost, it was analyzed the linear system solutions when the vector columns coefficient of every unknown quantities are orthogonal or ortonormal two.

Keywords: Knowing kernel, Cramer rule, linear transformation, determinant, orthogonal.

1. INTRODUCCIÓN

Las dificultades que presenta la enseñanza de la Matemática en los diversos niveles, ya sea en la Enseñanza Media, como en la Terciaria y Universitaria son apreciables y hacen necesario que el docente trate de encontrar nuevos enfoques y busque relacionar diversos temas con el objeto de que el alumno no vea la Matemática formada por compartimientos estancos sino, muy por el contrario, note las conexiones existentes entre diversos temas y la multiplicidad de caminos que en ciertos casos existen para llegar a un mismo resultado. Todo ello hace a la dinámica de la Matemática, la cual es bien conocida por todos los docentes que efectúan investigaciones en esta disciplina, independientemente de la importancia de los resultados que obtengan. Lo primordial es la actitud que debemos tratar de crear en el alumnado al estudiar matemática.

En nuestra labor docente como profesores de Matemática en carreras universitarias de tipo técnico, hemos notado en muchos alumnos, la dificultad en relacionar diversos temas, principalmente en lo referente a los resultados analíticos con los geométricos. Ello se presenta tanto en Álgebra como en Análisis Matemático. Desde el punto de vista didáctico, la visualización geométrica y su relación

con los resultados analíticos juega un papel muy importante que no debemos despreciar, sino incentivar.
Concientes de la falta de conexión existente entre ciertos temas de Álgebra y de Geometría, nos pareció oportuno ejemplificar estas relaciones, tomando un tema tan elemental como lo es la Regla de Cramer, encontrando su relación con la Geometría y las transformaciones lineales. La elección del tema no fue casual sino la misma se hizo por cuanto permite ser utilizada ya sea en un curso en donde se dan nociones de operaciones vectoriales y cambio de base en el espacio tridimensional, como en cualquier curso de Álgebra lineal. De allí que el trabajo se divida en dos partes.
Se comienza con un estudio de los sistemas lineales determinados de orden 3. Para lograrlo se utilizan nociones básicas del espacio euclidiano tridimensional, entre ellas, las transformaciones lineales y el producto mixto. Esto nos lleva a poder interpretar cada coordenada del punto que es solución del sistema, como un cociente de componentes ortogonales obteniendo así una interpretación geométrica de la solución; además llegamos a una demostración de la regla de Cramer para el caso tridimensional siguiendo un camino geométrico. Por otra parte, como caso particular, se analizaron las soluciones del sistema lineal cuando los vectores columna de cada incógnita son ortogonales y también en el caso en que sean ortonormales.

Los pasos realizados para encontrar la solución en R^3 fueron generalizados para obtener el correspondiente resultado en el espacio euclidiano *n*-dimensional. Para este desarrollo se requiere un mayor manejo del Álgebra Lineal y de la geometría de dicho espacio. En este caso se hizo un análisis análogo al hecho en tres dimensiones.

2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE CRAMER PARA SISTEMAS DE ORDEN TRES

2.1. Regla de Cramer en R^3 y su demostración algebraica

Comenzaremos viendo en forma resumida la demostración algebraica de la Regla de Cramer para que puedan destacarse las diferencias con el enfoque geométrico. Consideremos el sistema lineal determinado

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

Por la regla de Cramer sabemos que

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Veamos la demostración por la cual *x* se obtiene como ese cociente de determinantes. Sabemos que

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Si multiplicamos respectivamente, la primera, segunda y tercera ecuaciones del sistema por:

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=b_2c_3-b_3c_2 \qquad -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=b_3c_1-b_1c_3$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=b_1c_2-b_2c_1$$

y sumamos estas ecuaciones, resultan nulos los coeficientes de *y* y de *z*. Luego:

$$x\left(a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

De esta forma,

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Así despejando *x* se obtiene la expresión ya conocida de la Regla de Cramer. Análogamente se procede con las otras incógnitas.
Veamos ahora la riqueza del enfoque geométrico en relación al algebraico.

2.2. Transformaciones lineales biyectivas y sistemas lineales en R^3

Sea en el espacio euclidiano R^3, la base ortonormal

$$I=(1;0;0),\quad J=(0;1;0),\quad K=(0;0;1).$$

Consideremos en dicho espacio la transformación lineal biyectiva $f: R^3 \to R^3;\ f(x;y;z)=(x';y';z')$; cuyas expresiones en dicha base pueden darse, mediante las siguientes tres ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=x' \\ a_2x+b_2y+c_2z=y' \\ a_3x+b_3y+c_3z=z' \end{cases}$$

o mediante el siguiente producto matricial

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

En esta transformación lineal,

$$f(1;0;0)=(a_1;a_2;a_3);\quad f(0;1;0)=(b_1;b_2;b_3);$$
$$f(0;0;1)=(c_1;c_2;c_3).$$

De esta forma, los vectores I ; J ; K se convierten respectivamente, por la aplicación de f en

$$A=(a_1;a_2;a_3),\ B=(b_1;b_2;b_3),\ C=(c_1;c_2;c_3).$$

Estos vectores formarán una nueva base del espacio por ser linealmente independientes, debido a la biyectividad de la transformación lineal f.

Hasta ahora planteamos la transformación lineal $f(x;y;z)=(x';y';z')$. Puesto que esta transformación lineal es biyectiva, resultará que si tomamos $(x';y';z')=(d_1;d_2;d_3)$, existirá $(x;y;z)$ tal que $f(x;y;z)=(d_1;d_2;d_3)$. Así obtendremos el sistema lineal determinado, es decir, con solución única:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Este sistema lineal se puede escribir mediante el siguiente producto matricial:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Resolver el sistema es equivalente a encontrar la contraimagen (x,y,z) del vector $D=(d_1;d_2;d_3)$, es decir los coeficientes de la combinación lineal $xA+yB+zC$. Esos coeficientes son las coordenadas de *D* en la base *A*, *B*, *C*. Para resolverlo aplicaremos la Regla de Cramer, cuya interpretación geométrica se logrará mediante las componentes ortogonales y el producto mixto de vectores en R^3.

2.3. Componentes ortogonales y productos escalar, vectorial y mixto en R^3

Comenzaremos viendo el concepto de componente ortogonal de un vector *B* sobre un vector no nulo *A*, considerando para ello dos casos. Si *B* es también un vector no nulo definiremos la *componente ortogonal* de *B* sobre *A* mediante el número real

$$comp_A\ B=\|B\|\cos\alpha$$

donde $0\le\alpha\le\pi$ es el ángulo que forman los vectores *A* y *B*. De esta forma,

$$0\le\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow comp_A\ B>0 \qquad \alpha=\frac{\pi}{2}\Rightarrow comp_A\ B=0$$

$$\frac{\pi}{2}<\alpha\le\pi\Rightarrow comp_A\ B<0\ .$$

Por otra parte si *B* es nulo carece de sentido hablar del ángulo α y se define

$$comp_A\ \vec{0}=0$$

Evidentemente, en la base ortonormal $I\,;\,J\,;\,K$ un vector $P=(p_1;p_2;p_3)$ tendrá las siguiente componentes ortogonales respecto de los vectores de la base

$$comp_I\ P=p_1 \qquad comp_J\ P=p_2 \qquad comp_K\ P=p_3$$

Por simple aplicación de la definición resulta

$$P\ne\vec{0}\Rightarrow comp_P\ P=\|P\|\cos 0=\|P\|$$

$$k>0\ \Rightarrow comp_{kA}\ B=comp_A\ B$$

Además, admitiremos sin demostración que

$$comp_A\ (B+C)=comp_A\ B+comp_A\ C$$

Teniendo en cuenta que $\cos\alpha=-\cos(\pi-\alpha)$, se pueden deducir fácilmente las siguientes propiedades:

$$comp_A\ \ k\ B=k\ comp_A\ B$$

$$k<0\ \Rightarrow comp_{kA}\ B=-\ comp_A\ B$$

Si bien no vamos a utilizar en este trabajo el concepto de proyección ortogonal, conviene distinguir la diferencia existente con el de componente ortogonal. En efecto, la componente ortogonal es un número real. Por otra parte, la *proyección ortogonal* de *B* sobre *A* es el vector que resulta de multiplicar la componente ortogonal de *B* sobre *A* por el vector unitario generado por *A*, en símbolos

$$proy_A\ B=(comp_A\ B)\ \frac{1}{\|A\|}A$$

El concepto de componente ortogonal nos permitirá introducir el producto escalar de vectores. En efecto, si consideramos dos vectores *A* y *B* no nulos y efectuamos el siguiente producto

$$\|A\|\ comp_A\ B=\|A\|\,\|B\|\cos\alpha$$

el segundo miembro es justamente el llamado producto escalar de los vectores *A* y *B*. De esta forma, el *producto escalar* de los vectores no nulos *A* y *B* es el número real

$$A\cdot B=\|A\|\,\|B\|\cos\alpha$$

donde $0\le\alpha\le\pi$ es el ángulo que forman los vectores *A* y *B*. Si alguno de los dos vectores *A* o *B* es nulo o si ambos lo son, se dice que su producto escalar es nulo. De la definición resulta en forma inmediata que

$$A\cdot B=B\cdot A$$

$$A\cdot A=\|A\|^2\ \text{, es decir, }\ \|A\|=\sqrt{A\cdot A}\ .$$

Si los vectores *A* y *B* son no nulos entonces

$$A\cdot B=0\Leftrightarrow A\ \text{y}\ B\ \text{son ortogonales.}$$

Una consecuencia inmediata de lo anterior es que

$$I\cdot I=J\cdot J=K\cdot K=1 \qquad I\cdot J=J\cdot K=I\cdot K=0$$

Si *A* es un vector no nulo y aplicamos la propiedad aditiva de las componentes ortogonales obtenemos

$$\|A\|\ comp_A\ (B+C)=\|A\|\ comp_A\ B+\|A\|\ comp_A\ C$$

De esta forma resulta

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

que es la propiedad distributiva del producto escalar con respecto a la suma de vectores, la cual también es válida si *A* es nulo. Procediendo en forma análoga con la otra propiedad de las componentes ortogonales obtenemos

$$A\cdot(kB)=\|A\|\ comp_A\ \ k\ B=k\ \|A\|\ comp_A\ B=k\ (A\cdot B)$$

Esta propiedad también es válida si *A* es nulo y expresa que el producto de un número por el producto escalar de dos vectores es igual al producto escalar de uno cualquiera de los vectores por el otro multiplicado por dicho número.

En símbolos: $k(A\cdot B)=(kA)\cdot B=A\cdot(kB)$.

La aplicación de estas dos propiedades del producto escalar de vectores nos permitirá obtener la expresión del producto escalar de dos vectores dados por sus componentes ortogonales. Consideremos para ello dos vectores $A=(a_1;a_2;a_3)$, $B=(b_1;b_2;b_3)$, expresados en la base ortonormal $I\,;\,J\,;\,K$. Estos vectores pueden escribirse

$A = a_1\ I + a_2\ J + a_3\ K \qquad B = b_1\ I + b_2\ J + b_3\ K$

Por las dos propiedades del producto escalar obtenemos:

$$A \cdot B = (a_1\ I + a_2\ J + a_3\ K) \cdot (b_1\ I + b_2\ J + b_3\ K) =$$
$$= a_1 b_1\ (I \cdot I) + a_1 b_2\ (I \cdot J) + a_1 b_3\ (I \cdot K) +$$
$$+ a_2 b_1\ (J \cdot I) + + a_2 b_2\ (J \cdot J) + + a_2 b_3\ (J \cdot K) +$$
$$+ a_3 b_1\ (K \cdot I) + a_3 b_2\ (K \cdot J) + a_3 b_3\ (K \cdot K)$$

Luego, teniendo en cuenta que

$I \cdot I = J \cdot J = K \cdot K = 1$ y $I \cdot J = J \cdot K = I \cdot K = 0$

resulta $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Si suponemos que el vector A es no nulo, mediante las componentes ortogonales obtenemos:

$$A \cdot B = \|A\|\ comp_A\ B \qquad comp_A\ B = \frac{A \cdot B}{\|A\|}$$

El producto escalar de vectores que acabamos de estudiar da por resultado un número real. Ahora consideraremos el producto vectorial de dos vectores cuyo resultado es un vector, el cual quedará definido geométricamente por su dirección, su sentido sobre dicha dirección y su módulo o norma.

Consideremos dos vectores A y B del espacio que sean no nulos y tengan distinta dirección. De esta forma dichos vectores determinarán un plano. En este caso, el *producto vectorial* de los vectores A y B es un vector $A \times B$ cuya dirección es perpendicular al plano determinado por los vectores A y B, su sentido es tal que la terna $A, B, A \times B$ tenga la misma orientación que la terna *I, J, K*. Finalmente, si α es el ángulo que forman los vectores A y B, su módulo o norma queda determinado por

$$\|A \times B\| = \|A\|\ \|B\|\ sen\ \alpha$$

Resulta inmediato que la norma de $A \times B$ es el área del paralelogramo generado por los vectores A y B. En el caso hasta ahora considerado, como los vectores A y B tenían distinta dirección, entonces $0 < \alpha < \pi$ y se podía interpretar la norma de $A \times B$ como el área del paralelogramo generado por dichos vectores. Si los vectores tienen la misma dirección y el mismo sentido, entonces será $\alpha = 0$. Por otra parte, si los vectores tienen la misma dirección pero sentido contrario, entonces será $\alpha = \pi$. En ambos casos la norma de $A \times B$ será nula resultando $A \times B$ el vector nulo, el cual no tendrá dirección ni sentido. Si alguno de los vectores A o B es nulo o si ambos los son decimos que el producto vectorial es el vector nulo.

Resulta interesante dar algunas propiedades del producto vectorial con el objeto de hacer un paralelo con las del producto escalar

$$A \times B = -(B \times A)$$

Si los vectores A y B son no nulos entonces

$$A \times B = \vec{0} \Leftrightarrow A \text{ y } B \text{ tienen la misma dirección.}$$

Como caso particular $I \times I = J \times J = K \times K = \vec{0}$.

Puesto que *I, J, K* son vectores ortonormales, resulta

$$I \times J = K \qquad J \times K = I \qquad K \times I = J$$

Dos propiedades análogas a las del producto escalar son:

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$
$$k(A \times B) = (kA) \times B = A \times (kB).$$

Las diversas propiedades del producto vectorial que hemos dado nos permitirían obtener la expresión del producto vectorial en función de las componentes, mediante el siguiente determinante simbólico:

$$A \times B = \begin{vmatrix} I & J & K \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} I - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} J + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} K$$

Si consideramos ahora los vectores no nulos

$$A = (a_1; a_2; a_3),\ \ B = (b_1; b_2; b_3),\ \ C = (c_1; c_2; c_3)$$

el producto mixto de los mismos es por definición $(A \times B) \cdot C$. Teniendo en cuenta las definiciones de producto escalar y de componente ortogonal dadas anteriormente, obtendremos

$$(A \times B) \cdot C = \|A \times B\|\ \|C\|\ \cos \alpha = \|A \times B\|\ comp_{A \times B}\ C$$

donde $0 \le \alpha \le \pi$ es el ángulo que forman los vectores C y $A \times B$.

Si los vectores *A, B,* C son no coplanares, es decir linealmente independientes, entonces generan un paralelepípedo cuyas aristas concurrentes en el origen son los segmentos correspondientes a dichos vectores. Por la expresión del producto mixto se deduce que el valor absoluto de ese producto es el volumen del paralelepípedo así formado por los vectores *A, B,* C. Teniendo en cuenta las expresiones de los productos escalar y vectorial en función de las componentes obtenemos

$$(A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

En consecuencia,

$$(A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Por propiedades de los determinantes resulta:

$$(A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Además

$$(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B.$$

Si los vectores *A, B* y C son no nulos entonces

$$(A \times B) \cdot C = 0 \Leftrightarrow A, B \text{ y } C \text{ son coplanares.}$$

2.4. Interpretación geométrica de la Regla de Cramer en R^3 mediante el cociente de componentes ortogonales

Los escasos elementos dados hasta el momento sobre el producto mixto y su expresión mediante componentes ortogonales permiten plantear al alumnado un ejercicio que, en el caso tridimensional, lo lleve a expresar la Regla de Cramer como cociente de productos mixtos y de allí

como cociente de componentes ortogonales. Si bien el resultado matemático puede carecer de cierta relevancia, igualmente resulta importante desde el punto de vista de la dinámica de la Matemática, pues permite relacionar temas y efectuar pequeños descubrimientos por parte del alumno.
Tomemos por ejemplo el caso de la incógnita *x*. La expresión para calcular dicha incógnita mediante la Regla de Cramer, conjuntamente con las propiedades de permutación de los vectores del producto mixto y la expresión del producto mixto mediante componentes ortogonales, nos permite obtener la siguiente cadena de igualdades

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{(D\times B)\cdot C}{(A\times B)\cdot C}=\frac{(B\times C)\cdot D}{(B\times C)\cdot A}$$

Luego,

$$x=\frac{\|B\times C\|\; comp_{B\times C}\; D}{\|B\times C\|\; comp_{B\times C}\; A}=\frac{comp_{B\times C}\; D}{comp_{B\times C}\; A}$$

Para poder llegar a la expresión de la incógnita como cociente de componentes ortogonales lo único que hay que tener en cuenta es que figure en el dividendo y divisor el mismo producto vectorial, lo cual se logra fácilmente por las propiedades del producto mixto. Por otra parte, como dicho producto vectorial es no nulo, su norma resultará no nula y por simplificación se obtendrá la expresión como cociente de componentes ortogonales, ambas tomadas respecto de un mismo vector. En forma análoga se podría proceder con las otras incógnitas.
Hasta ahora, partiendo de la Regla de Cramer llegamos a la expresión como cociente de componentes ortogonales. A continuación trataremos de probar la Regla de Cramer utilizando el producto mixto.

2.5. La Regla de Cramer en R^3 y su demostración geométrica

Consideremos los vectores como segmentos orientados con origen en (0; 0; 0). Si tomamos los vectores *A* y *B*, ellos determinarán, respectivamente, dos rectas por el origen $r(A)=\{\lambda A:\lambda\in R\}$ y $r(B)=\{\mu B:\mu\in R\}$, que estarán contenidas en un plano que pasa por el origen que designaremos $\Pi(A,B)$. Dado que f es biyectiva, los vectores *A*, *B* y *C* son linealmente independientes; por lo tanto $\Pi(A,B)$, $\Pi(B,C)$ y $\Pi(A,C)$ son efectivamente planos.
El vector $D=xA+yB+zC$ será la diagonal del paralelepípedo generado por los vectores *xA*, *yB*, *zC*. Si algunos de los vectores *xA*, *yB*, *zC* fuese nulo, lo que ocurrirá únicamente si el correspondiente coeficiente lo es, tendríamos un paralelogramo o sólo un vector; pero las siguientes observaciones serán igualmente válidas. Los vectores *xA* y *D* tendrán sus extremos en un plano paralelo al $\Pi(B,C)$, por el paralelismo entre las caras opuestas del paralelepípedo. Así, dicho plano será perpendicular al vector $B\times C$. En consecuencia,

$$comp_{B\times C}\; D = comp_{B\times C}\; xA$$

De esta forma, ambas componentes son iguales, siendo su valor absoluto igual a la distancia del plano $\Pi(B,C)$, con su paralelo por los extremos de *xA* y *D*. En forma análoga,

$$comp_{C\times A}\; D = comp_{C\times A}\; yB$$
$$comp_{A\times B}\; D = comp_{A\times B}\; zC\,.$$

Luego, aplicando que si *P* es no nulo, entonces

$$comp_P\, kQ = k\; comp_P\, Q$$

obtenemos:

$$comp_{B\times C}\; D = x\; comp_{B\times C}\; A\,,$$
$$comp_{C\times A}\; D = y\; comp_{C\times A}\; B\,,$$
$$comp_{A\times B}\; D = z\; comp_{A\times B}\; C\,.$$

Veamos la demostración por la cual x se obtiene como un cociente de componentes ortogonales. Para ello tengamos en cuenta que por la lineal independencia de los vectores *A*, *B* y *C*, es $\|B\times C\|\neq 0$ y $comp_{B\times C}\; A\neq 0$, razón por la cual vale la siguiente cadena de igualdades:

$$x=\frac{x\; comp_{B\times C}\; A}{comp_{B\times C}\; A}=\frac{comp_{B\times C}\; D}{comp_{B\times C}\; A}=\frac{\|B\times C\|\, comp_{B\times C}\; D}{\|B\times C\|\, comp_{B\times C}\; A}=$$

$$=\frac{(B\times C)\cdot D}{(B\times C)\cdot A}=\frac{(D\times B)\cdot C}{(A\times B)\cdot C}=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

En forma análoga repitiendo los pasos anteriores, se puede proceder con *y* así como con *z*, resultando:

$$y=\frac{comp_{C\times A}\; D}{comp_{C\times A}\; B}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$z=\frac{comp_{A\times B}\; D}{comp_{A\times B}\; C}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}\,.$$

De esta forma, no solamente hemos obtenido una interpretación geométrica de la Regla de Cramer en 3 dimensiones sino que hemos logrado en este caso una demostración de dicha regla siguiendo un camino geométrico.

2.6. Interpretación geométrica para el caso en que la base A,B,C sea ortogonal

Supongamos que la base *A*, *B*, *C* es ortogonal, es decir, que los vectores *A*, *B*, *C* son perpendiculares entre si, y consecuentemente $A\cdot B=A\cdot C=B\cdot C=0$. Así, cada uno de los vectores *A*, *B*, *C* es perpendicular al plano generado por los otros dos vectores. Si tenemos en cuenta que $B \times C$ es un vector perpendicular al plano generado por *B* y *C*, resultará que el vector $B \times C$ y el vector *A* deben tener la misma dirección, pudiendo tener el mismo sentido o sentido contrario. Por tal motivo, existirá un número real k_1 no nulo tal que $B \times C = k_1 A$. Dicho número será positivo si el sentido de $B \times C$ es el mismo que el del vector *A* y será negativo si el sentido de $B \times C$ es contrario al de *A*. Este razonamiento puede repetirse para los vectores $C \times A$ y $A \times B$. De esta forma, resulta que existirán k_1, k_2, k_3 números reales no nulos tales que

$$B \times C = k_1 A, \quad C \times A = k_2 B \quad \text{y} \quad A \times B = k_3 C.$$

Ahora vamos a obtener a partir de la expresión de *x* como cociente de componentes ortogonales su nueva expresión para el caso en que la base *A*, *B*, *C* sea ortogonal. Para obtener las expresiones de *y* así como de *z* se puede proceder en forma análoga. Sabemos que existe un número real no nulo tal que $B \times C = k_1 A$. Si consideramos que k_1 puede ser positivo o negativo, por propiedades de las componentes ortogonales dadas en 2.3 obtendremos.

Si $k_1 > 0$, entonces

$$x = \frac{comp_{B\times C}\, D}{comp_{B\times C}\, A} = \frac{comp_A\, D}{comp_A\, A} = \frac{comp_A\, D}{\|A\|} = \frac{A \cdot D}{\|A\|^2}.$$

Si $k_1 < 0$, entonces

$$x = \frac{comp_{B\times C}\, D}{comp_{B\times C}\, A} = \frac{-comp_A\, D}{-comp_A\, A} = \frac{comp_A\, D}{\|A\|} = \frac{A \cdot D}{\|A\|^2}.$$

Luego, si la base *A*, *B*, *C* es ortogonal , obtenemos

$$x = \frac{A \cdot D}{\|A\|^2}, \qquad y = \frac{B \cdot D}{\|B\|^2}, \qquad z = \frac{C \cdot D}{\|C\|^2}.$$

Evidentemente, si la base *A*, *B*, *C* es ortonormal, entonces $\|A\| = \|B\| = \|C\| = 1$. Así:

$$x = A \cdot D, \quad y = B \cdot D, \quad z = C \cdot D.$$

3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE CRAMER PARA SISTEMAS DE ORDEN *n*

3.1. Análisis geométrico en R^3 de la Regla de Cramer

Un análisis cuidadoso de la esencia geométrica de la Regla de Cramer en tres dimensiones llevará al alumno, con ciertos conocimientos de Álgebra lineal, a poder generalizar los pasos hechos en el caso tridimensional al *n*-dimensional.

Observemos que para calcular el coeficiente *x* de la combinación lineal $xA + yB + zC = D$ tomamos un vector P_A ortogonal al subespacio generado por los restantes vectores *B*, *C* de la combinación lineal. Luego, efectuamos el cociente de las componentes ortogonales del vector *D* sobre la del vector *A*, ambas con respecto a P_A. En este caso particular consideramos $P_A = B \times C$, aunque, como observamos en el parágrafo 2.6, ello resulta irrelevante desde el punto de vista del resultado, ya que si tomáramos otro vector $\lambda(B \times C)$ con $\lambda \neq 0$, dichas componentes ortogonales conservarían su valor si $\lambda > 0$ y ambas cambiarían de signo si $\lambda < 0$. Lo único que importa es que se calculen las componentes ortogonales con respecto a un vector P_A no nulo perpendicular a los restantes vectores *B*, *C* de la nueva base *A*, *B*, *C*. En el caso del cálculo del coeficiente *y* se procede en forma análoga considerando un vector P_B ortogonal al subespacio generado por los vectores *A*, *C*. Finalmente, para determinar *z* se toma un vector P_C ortogonal al subespacio generado por los vectores *A*, *B*. En este caso se obtuvieron cada uno de los vectores ortogonales a los restantes vectores de la base, mediante el producto vectorial.

Cabe preguntarnos cómo se procede en el caso general *n*-dimensional. Si bien la notación utilizada hasta el momento resulta la más conveniente para tratar el caso tridimensional, no es útil para el caso *n*-dimensional. Por tal motivo, utilizaremos la notación habitual matricial.

3.2. Determinantes, producto escalar y componentes ortogonales en R^n

Consideremos una matriz cuadrada $A \in R^{n\times n}$, tal que su determinante $|A|$ sea no nulo.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Recordemos que el *menor complementario* del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz M_{ij}, que se obtiene de la matriz *A* eliminando la *i*-ésima fila y la *j*-ésima columna. Por otra parte el *adjunto o cofactor* de a_{ij} es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

Para todo j = 1;…;*n*, utilizaremos la siguiente notación:

$$A_j = (a_{1j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{nj}) \quad P_j = (A_{1j}, \dots, A_{ij}, \dots, A_{nj}).$$

De esta forma, desarrollando el determinante por la *j*-ésima columna resulta $|A| = A_j \cdot P_j = P_j \cdot A_j$, es decir, el determinante de *A* es el producto escalar de los vectores P_j y A_j de R^n.

Recordemos que si un determinante tiene dos columnas o dos filas iguales, entonces es nulo. En consecuencia, para todo $k \neq j$, $A_k \cdot P_j = 0$, ya que dicho producto escalar es el determinante de una matriz que tiene las columnas *j*-ésima y *k*-ésima iguales. Esto significa que P_j es un vector ortogonal a todos los vectores A_k con $k \neq j$, o también que P_j es ortogonal al subespacio propio maximal generado por los $n-1$ vectores A_k con $k \neq j$.

Si P y Q son dos vectores no nulos de R^n se define el coseno de β que forman dichos vectores mediante

$$\cos\beta = \frac{P\cdot Q}{\|P\|\cdot\|Q\|}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|P\cdot Q| \le \|P\|\,\|Q\|$, $-1 \le \cos\beta \le 1$. Luego, en forma análoga al caso tridimensional, dados dos vectores P y Q no nulos de R^n se puede definir la *componente ortogonal* de Q sobre P por medio de

$$comp_P\ Q = \|Q\|\cos\beta,$$

siendo $0 \le \beta \le \pi$ el ángulo que forman P y Q. Además, si Q es el vector nulo definimos $comp_P\ Q = 0$.

De esta forma, para todo vector no nulo $P \in R^n$ es:

$$comp_P\ Q = \frac{P\cdot Q}{\|P\|} \qquad P\cdot Q = \|P\|\ comp_P\ Q.$$

$$comp_P\ k\,Q = \frac{P\cdot(k\,Q)}{\|P\|} = \frac{k(P\cdot Q)}{\|P\|} = k\ comp_P\ Q$$

3.3. La Regla de Cramer en R^n y su expresión mediante el cociente de componentes ortogonales

Tomemos ahora un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas que tenga solución única, es decir, que sea determinado. Su expresión general será

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Sea $B = (b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_n)$; en virtud de las definiciones de A_j, de P_j, y de componente ortogonal dadas en el parágrafo anterior, al resolver este sistema por la Regla de Cramer reemplazaremos la j-ésima columna del determinante del dividendo por $B = (b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_n)$ y tendremos que:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & b_i & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{P_j\cdot B}{P_j\cdot A_j}.$$

De esta forma

$$x_j = \frac{P_j\cdot B}{P_j\cdot A_j} = \frac{\|P_j\|\ comp_{P_j} B}{\|P_j\|\ comp_{P_j} A_j} = \frac{comp_{P_j} B}{comp_{P_j} A_j}$$

Así, x_j es igual al cociente de las componentes ortogonales sobre P_j del vector B del término independiente sobre el vector A_j correspondiente a x_j.

Si bien en este caso se tomó $P_j = (A_{1j},\ldots,A_{ij},\ldots,A_{nj})$, se podría haber considerado cualquier vector no nulo que sea ortogonal al subespacio generado por todos los vectores A_k con $k \ne j$.

3.4. La Regla de Cramer en R^n y su demostración geométrica

Cabe ahora preguntarnos si los pasos hechos en 2.5 para probar la Regla de Cramer por un camino geométrico pueden generalizarse al caso n-dimensional. En primer lugar debemos fijar cuáles van a ser los conocimientos previos que podemos utilizar para tal demostración. En tal sentido, partiremos de los conocimientos dados en 3.2 y con los mismos trataremos de seguir un camino análogo al dado en 2.5. Para ello comenzaremos probando que $P_j\cdot B = x_j|A|$.

Sabemos que

$$B = x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_jA_j + \ldots + x_nA_n.$$

Luego, teniendo en cuenta que si $k \ne j$, $A_k\cdot P_j = 0$,

$$P_j\cdot B = x_1(P_j\cdot A_1) + \ldots + x_j(P_j\cdot A_j) + \ldots + x_n(P_j\cdot A_n) =$$
$$= x_j(P_j\cdot A_j) = x_j|A|$$

De esta forma, vale la siguiente cadena de igualdades con lo que queda probada la Regla de Cramer.

$$x_j = \frac{x_j\,|A|}{|A|} = \frac{P_j\cdot B}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & b_i & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

También de forma inmediata puede probarse la expresión de las incógnitas como cociente de componentes ortogonales. En efecto,

$$x_j = \frac{x_j(P_j\cdot A_j)}{P_j\cdot A_j} = \frac{P_j\cdot B}{P_j\cdot A_j} = \frac{\|P_j\|\ comp_{P_j} B}{\|P_j\|\ comp_{P_j} A_j} = \frac{comp_{P_j} B}{comp_{P_j} A_j}$$

3.5. Interpretación geométrica para el caso en que la base $A_1, A_2, ..., A_n$ sea ortogonal

Supongamos que la base $A_1, A_2, ..., A_n$ es ortogonal, en consecuencia si $k \neq j$, $A_k \cdot A_j = 0$. En este caso, el vector A_j es ortogonal al subespacio propio maximal generado por los $n-1$ vectores A_k con $k \neq j$. Luego, podemos tomar $P_j = A_j$, donde dicho vector no necesariamente debe ser unitario por cuanto la base puede no ser ortonormal. De esta forma,

$$x_j = \frac{comp_{A_j} B}{comp_{A_j} A_j} = \frac{comp_{A_j} B}{\|A_j\|} = \frac{A_j \cdot B}{\|A_j\|^2}$$

Si la base $A_1, A_2, ..., A_n$ fuera ortonormal, entonces para todo $j = 1;2;...;n$, $\|A_j\| = 1$, en cuyo caso, $x_j = A_j \cdot B$.
Los resultados anteriores también pueden obtenerse por vía matricial. Si $A_1, A_2, ..., A_n$ es una base ortogonal, resulta que $A^T \cdot A$ es el siguiente producto matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{j1} & .... & a_{n1} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{j1} & .... & a_{jj} & .... & a_{jn} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{1n} & .... & a_{jn} & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1j} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{j1} & .... & a_{jj} & .... & a_{jn} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & .... & a_{nj} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \|A_1\|^2 & .... & 0 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & .... & \|A_j\|^2 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & .... & 0 & .... & \|A_n\|^2 \end{pmatrix}$$

Si escribimos el sistema lineal con notación matricial, obtendremos $A \cdot X = B$, es decir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1j} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{j1} & .... & a_{jj} & .... & a_{jn} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & .... & a_{nj} & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_j \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ .... \\ b_j \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Al multiplicar por la izquierda ambos miembros por A^T resultará $A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot B$. Teniendo en cuenta la expresión de $A^T \cdot A$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \|A_1\|^2 & .... & 0 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & .... & \|A_j\|^2 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & .... & 0 & .... & \|A_n\|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_j \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{j1} & .... & a_{n1} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{j1} & .... & a_{jj} & .... & a_{jn} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{1n} & .... & a_{jn} & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ .... \\ b_j \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\|A_j\|^2 x_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}) \cdot (b_1, b_2, ..., b_n) = A_j \cdot B.$$

En consecuencia

$$x_j = \frac{A_j \cdot B}{\|A_j\|^2}.$$

CONCLUSIONES

Como es sabido, muchos temas de Álgebra y de Análisis permiten efectuar interpretaciones geométricas. En particular, el que aquí abordamos no fue encontrado, con este desarrollo en la bibliografía consultada. Esto nos motivó a buscar la relación entre Álgebra y Geometría de un tema que, a pesar de ser muy conocido, no por ello suele estudiarse en estos aspectos geométricos. La expresión del producto mixto mediante determinantes nos indujo a efectuar la interpretación geométrica de la Regla de Cramer en el caso tridimensional, que luego fuera generalizada a R^n. Éste fue simplemente un camino de los múltiples que permiten llegar a un resultado y apreciar la dinámica de la generalización en Matemática.
Si bien el formalismo matemático es muy importante, debe comprenderse que la lógica del descubrimiento matemático sigue otros caminos como muy bien destaca Lakatos (1978, página 17) al afirmar que *Ninguno de los períodos "creativos" de las teorías matemáticas, y difícilmente algunos de los "críticos", habrían de ser admitidos en los cielos formalistas, donde las teorías matemáticas moran como los serafines purgadas de las impurezas y de las incertidumbres humanas.*
La Matemática no es una ciencia estática, ya hecha únicamente útil para otras profesiones. La Matemática es una ciencia dinámica que exige nuevas investigaciones y que dentro de nuestras limitaciones, podemos ser parte de su desarrollo. Este pequeño trabajo que hemos elaborado trata de demostrar que hasta en temas muy elementales se puede hacer algo distinto en Matemática.
En cuanto a la bibliografía, conviene aclarar que debido a lo elemental del tema tratado, hay un sinnúmero de excelentes libros de Álgebra Lineal que podríamos citar; nos limitamos a mencionar el de Burgos (1993) y el de

Colman-Hill (2006), si bien podríamos haber citado otros igualmente muy didácticos. Por otra parte, en Ferrazzi-Bressan (1997) se encuentran más detalladamente las nociones de componentes y proyecciones ortogonales aquí utilizadas.
Dentro de la historia de la Matemática en la Argentina no podemos olvidar el papel fundamental que jugó, principalmente en Geometría, el Dr. Luis A. Santaló del cual citamos dos de sus obras (1961) y (1968) relacionadas con el tema de este trabajo.

REFERENCIAS

Burgos, J. (1993). *Álgebra lineal*, McGraw-Hill.
Ferrazzi de Bressan, A. y Bressan, J. (1997). *Nociones de trigonometría y vectores*, Cuadernos UADE 88, Universidad Argentina de la Empresa.
Kolman, B. y HILL, D. (2006). *Álgebra lineal*, Pearson Educación, Prentice-Hall.
Lakatos, I. *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza Editorial
Santaló, L. (1961). *Vectores y tensores con sus aplicaciones*, Editorial Universitaria de Buenos Aires.
Santaló, L. (1968), *Espacios vectoriales y geometría analítica*, Serie de Matemática, Departamento de Asuntos Científicos, Unión Panamericana, Secretaria General de la OEA.

Dr. Juan Carlos BRESSAN

Licenciado en Ciencias Matemáticas y Doctor en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.
Profesor Titular con dedicación exclusiva, Cátedra de Matemática, Facultad de Farmacia y Bioquímica, UBA.
Profesor de cursos de postgrado de Matemática del doctorado de la Facultad de Farmacia y Bioquímica, UBA.
Docente-Investigador Categoría 2 y Miembro de Comisiones Evaluadoras de Matemática de Categorías 3, 4 y 5, y de Proyectos de Investigación y avance de diversas universidades nacionales.
Director o codirector de proyectos de investigación de Educación Matemática y de Convexidad y Visibilidad.
Coautor de un Curso de Enseñanza a distancia de Matemática para profesores secundarios, SENOC, 1985.
Coautor de 9 Publicaciones para estudiantes universitarios en Cuadernos UADE, Univ. Argentina de la Empresa.
Trabajos de investigación publicados sobre temas de Convexidad Axiomática y de Educación Matemática: 16.
Trabajos de investigación presentados a congresos sobre Convexidad Axiomática y Educación Matemática: 50.