REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
Año 2 – Número 1 – julio de 2007

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL: UNA PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA EL AULA

Carlos Oropeza Legorreta
carlos_oropezamx@yahoo.es

Javier Lezama Andalón
jlezamaipn@gmail.com

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México

Resumen

En este trabajo presentamos algunas experiencias realizadas en un curso de Álgebra Lineal, en donde se proponen actividades que conducen a los estudiantes a elaborar representaciones de carácter geométrico aplicando los conceptos de dependencia e independencia lineal. Estas experiencias tienen un carácter exploratorio dentro del marco de de una investigación y se han orientado a observar qué elementos distintos a los convencionales podemos detectar cuando se hace un tratamiento convencional en el estudio de dichos conceptos. El diseño de las actividades se basan en el contexto de las representaciones geométricas, que nos brindarán elementos para problematizar la adquisición del concepto de combinación lineal en un primer momento y como una consecuencia en la segunda etapa de las mismas, el de dependencia e independencia lineal, reconociendo en ellos, una especial complejidad debido a su carácter abstracto y así, al llevar a los estudiantes a escenarios geométricos, podremos, a partir de las exploraciones realizadas y la recopilación de los indicios de comprensión o no de dichos conceptos, para así estructurar preguntas más precisas sobre la factibilidad de adquisición de los conceptos antes referidos mediante el uso de representaciones visuales como una propuesta alternativa que puede ser usadas en el aula.

Abstract

In this paper we will show some experiences that we have in a class of Linear Algebra, where we propose activities that make the students to do representations of geometrical characters playing concepts of linear dependence and independence. These experiences have an exploratory character in the frame of qualitative investigation and have been oriented to acquire different elements to the conventional that we can see when we give a conventional treatment to the study of these concepts. The design of the activities is based in the context of the geometrical representations, that will give us the elements to answer the problem of the acquisition of the concept of linear combination in a first moment and as a result in the second stage of this, the concept of linear dependence and independence, recognizing in this, a special complexity do to its abstract character and this way, leading the students to geometrical scenarios, we can, from this explorations compile sings of comprehension or not of the concepts, and from this structure more precise questions about the feasibility of the acquisition of the concepts that we have recounted before in the visual representations as an alternative offer that can be used in the classroom.

Palabras clave: Combinación lineal, dependencia lineal, independencia lineal, Wronskiano.

Introducción

La investigación educativa se ha ocupado del aprendizaje de la matemática y de los procesos involucrados en la enseñanza en el nivel universitario durante los últimos años. Ha intentado mejorar la identificación y comprensión de las dificultades que los alumnos encuentran y las disfunciones del sistema educativo, así como la búsqueda de vías para superar estos problemas.

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal en la ingeniería se caracterizan por presentar dificultades diferentes a las que aparecen en otras áreas de la matemática, como, por ejemplo, el cálculo. En el álgebra, no es usual partir de conocimientos físicos o geométricos para comenzar la construcción de un concepto. La mayor parte de los conceptos algebraicos son presentados a partir de definiciones formales; la existencia de los objetos definidos, en la mayoría de los casos, no parte de conocimientos previos, ni de argumentos provenientes de la física o la geometría, sino que se construyen lógicamente. Esto hace que muchos estudiantes perciban al álgebra como demasiado abstracta y que sus objetos carecen de aplicación en la realidad. Esta característica de abstracción del álgebra lineal ha promovido diversas reflexiones profundas en torno a la búsqueda de presentaciones diferentes del tema. Con el fin de intentar clarificar la comprensión y construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal en las funciones polinómicas que se abordan en la asignatura de álgebra lineal, en la presente propuesta se pretende hacer uso de las representaciones geométricas para que los alumnos puedan incorporarlas en la búsqueda de significados en el concepto antes referido.

Algunos los problemas relativos al aprendizaje del álgebra lineal se refieren a las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto y para las cuales no resulta muy claro para un estudiante, que se trata del mismo objeto. El alumno se encuentra, por ejemplo, con dos representaciones diferentes de la suma de vectores, una geométrica con una definición formal y otra enteramente formal para espacios vectoriales generales (Sierpinska, 1996). Cabe preguntarse, entonces, cómo se realiza el pasaje de una forma de representación a otra y de qué manera contribuyen estas representaciones diversas, en la construcción de un concepto algebraico. Comprendemos que una representación única, no es capaz de transmitir la totalidad de su significado, por lo que se hace necesario un acercamiento a través de diversas representaciones al concepto para llegar a su comprensión y construcción.

La visualización juega un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos. Existen diversas definiciones y caracterizaciones de la visualización. "*La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo de y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento"* (Arcavi, 1999, p.56).

Por otra parte, la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como "*la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende*". (Cantoral & Montiel, 2002, p.24). En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura.

Una secuencia de actividades para introducir la dependencia e independencia lineal

Se presenta a continuación una secuencia de actividades diseñada con la finalidad de trabajar los conceptos de dependencia e independencia lineal de funciones y polinomios de primero y segundo grado, haciendo uso de recursos y representaciones geométricas. Se parte en ellas de la consideración de la importancia de la visualización o representación geométrica para la comprensión de objetos matemáticos en la asignatura de Álgebra Lineal, y de que los recursos geométricos deben poseer un papel central en el aula, no siendo relegados únicamente a la ejemplificación. La exploración gráfica debe complementar al estudio teórico de un tema, permitiendo mejorar la construcción de los conceptos matemáticos.

Los recursos tecnológicos contribuyen en gran medida a la exploración gráfica, permitiendo aprovechar sus ventajas tanto en aspectos gráficos como de velocidad de cálculo. La tecnología brinda facilidades para la visualización. Sin embargo, es fundamental tener en cuenta que lo importante en el aula es el diseño de las propuestas didácticas y no los recursos que se utilizan para su puesta en práctica.

En las actividades que propusimos en esta investigación, los estudiantes pudieron hacer uso de los recursos tecnológicos disponibles, lo que les facilitó en algunos casos la experimentación y visualización, sobre todo en cuanto a las facilidades de graficación y tiempo de realización de cálculos.

La investigación posee características de tipo cualitativo, radicando nuestro interés en la exploración de conceptos. El análisis de datos es de tipo inductivo, ya que las categorías e interpretaciones se construirán a partir de la información que se obtenga. El foco de investigación tendrá, como acabamos de afirmar, un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo.

En esta sección se analizan algunas de las respuestas emitidas por un grupo de estudiantes de segundo semestre de ingeniería en la Facultad de Estudios Superiores

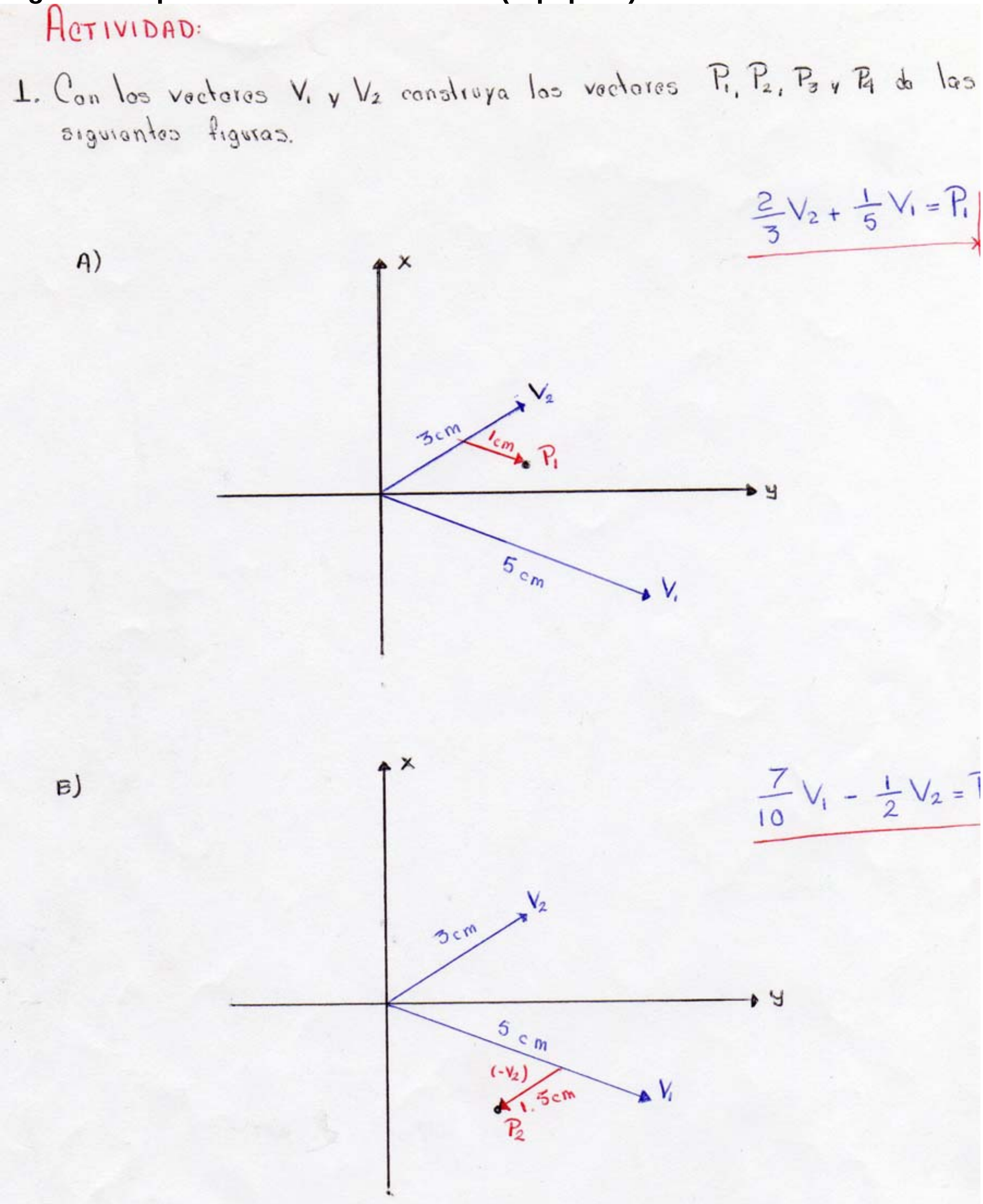
Cuautitlán (UNAM), México. En el trabajo se ha puesto una atención especial en los significados que los estudiantes en ingeniería asignan al concepto de dependencia e independencia lineal con relación a los vectores libres (flecha) y funciones de primero y segundo orden haciendo uso del Wronskiano para su análisis. Las experiencias convencionales nos muestran que frecuentemente los profesores de la asignatura de álgebra Lineal dan la definición, inician con ejercicios simples, aumentan el grado de dificultad y solicitan al estudiante continúe con la solución de los ejercicios.

Haciendo uso de esta consideración, la propuesta que se plantea en las actividades diseñadas tiene como propósito construir una serie de hipótesis que reflejen cómo enfrentan a su solución los estudiantes, qué respuestas dan, la actividad matemática que se provoca, las argumentaciones que se generan y los conceptos matemáticos que logran poner en juego. Proponemos de manera implícita reflexionar sobre las posibles ventajas que dichas actividades pueden producir con miras al aprendizaje del concepto en contraste con la forma convencional con que se revisan dichos conceptos.

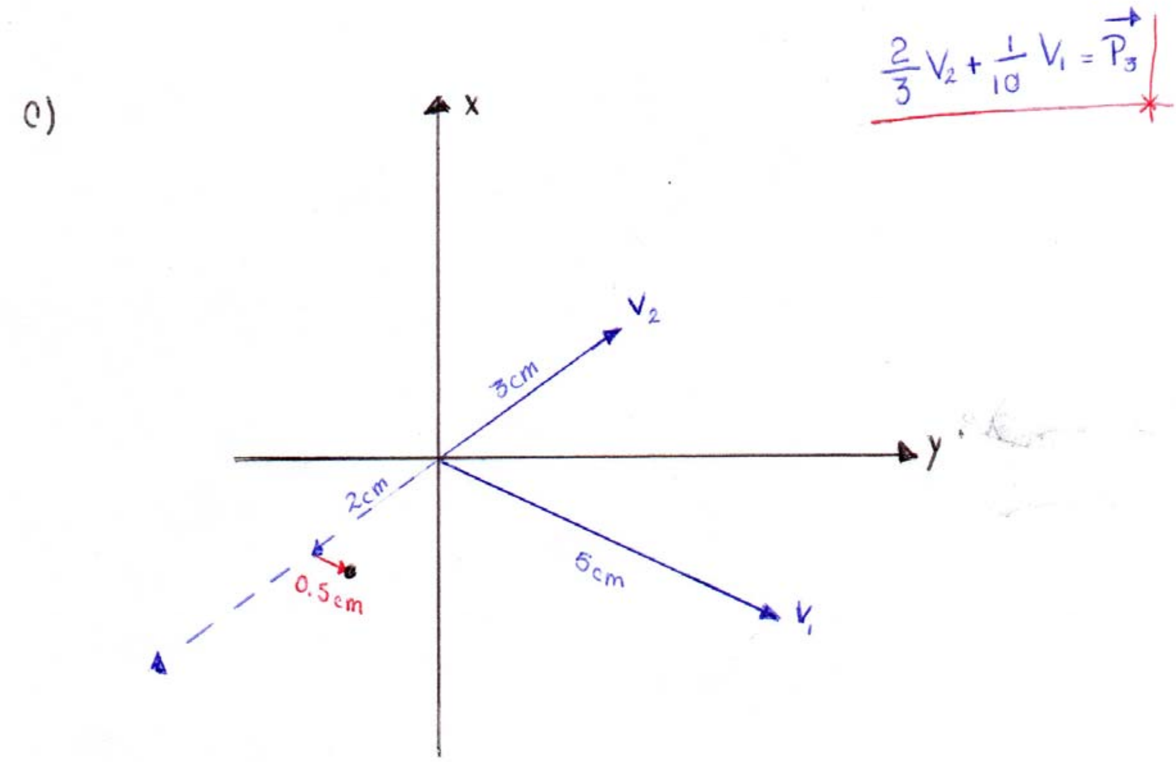
ACTIVIDAD 1. *Construcción en el plano y del plano*

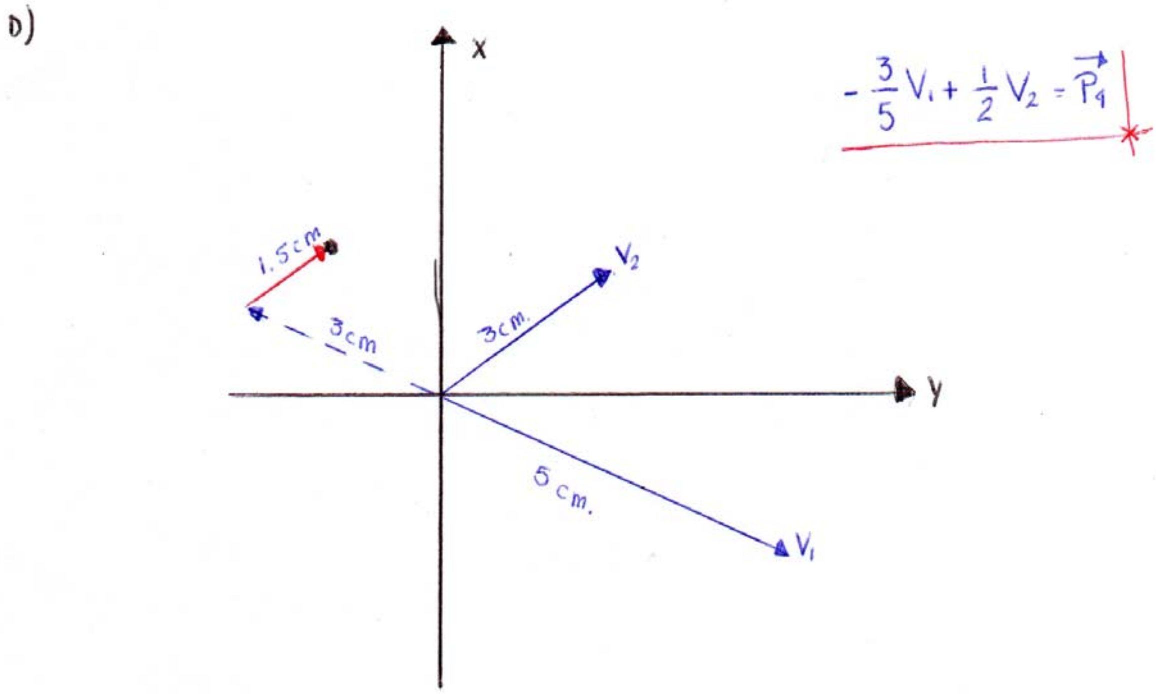
En esta actividad se pretende que los alumnos incorporen conocimientos previos, que les ayuden a la adquisición del concepto de combinación lineal como antecedente del concepto de dependencia e independencia lineal. También se pretende que a partir de la solución de ésta, los estudiantes estructuren el concepto de combinación lineal, logren una interpretación adecuada de los vectores libres que se asocian a cada uno de los puntos marcados en los diferentes cuadrantes, recuperen el significado del producto de un escalar por un vector, practiquen la suma de vectores preferentemente a partir del método del paralelogramo y hagan uso de los elementos geométricos como una alternativa para verificar y construir sus respuestas.

Algunas respuestas a la actividad 1: (Equipo A)



En esta actividad se proporcionan vectores representados de manera general (sin una dimensión definida) y se puede observar producto del trabajo que los estudiantes desarrollaron, que hacen uso de mediciones un principio que a ellos intuitivamente se les ocurrió con la idea de llegar al resultado mediante una combinación lineal, en este caso multiplicar un vector por un escalar y desplazarlo hacia un punto sobre el otro vector, y así lograr obtener la solución los puntos requeridos.





En esta sección de la actividad se requería ver si los estudiantes podían llegar a obtener como resultado vectores en distintos cuadrantes, enfrentándolos al problema de usar el concepto de multiplicación de un vector por un escalar negativo, que era necesario cubrir el objetivo. En su exploración, el equipo A llegó a la conclusión solicitada de manera inmediata, gracias a que hicieron uso de la estrategia mencionada en el apartado anterior y de sus conocimientos previos de geometría.

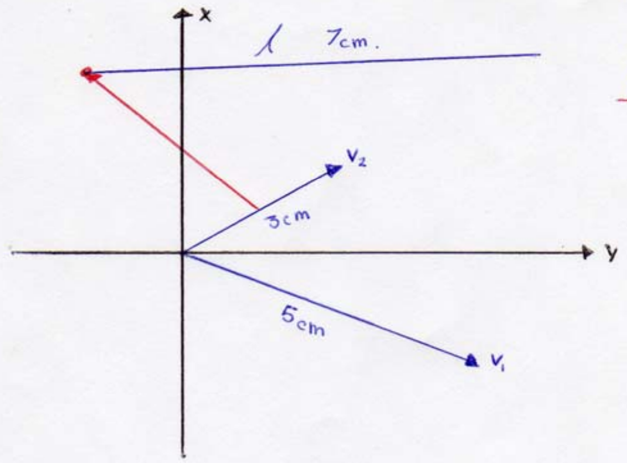
2. ¿Con los vectores V_1 y V_2 puedo formar el segmento de recta λ? Explique y grafique para algunos puntos.

$(x, y, z) = t(2.5, 1.5) + s(5$

$(x, y) = t(2.5, 1.5) + s(5,$

$x = 2.5t + 5s$

$y = 1.5t + 2s$



3. ¿Con los vectores V_1 y V_2 puedo formar la totalidad del plano? ¿Como?

Si; con la ecuación del plano.

4. ¿Son los vectores V_1 y V_2 los unicos que pueden formar el plano R^2?, proponga otro ejemplo distinto.

No son los únicos; hay muchos, mediante otros vectores cualesquiera.

5. Escriba la ecuación que caracteriza la resultante generada por los vectores V_1 y V_2

$(V_{2}y + V_{1}y)^2 + 0^2 = R^2$

$V_{2}y + V_{1}y = R$

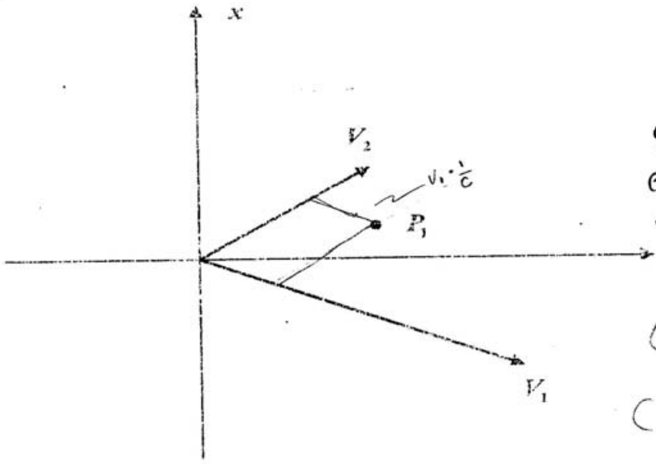
Carlos Rebollar Francisco Jahaziel
Cesar Martinez Jacob
Terrazas Mayen Ronald.

En la última parte de la actividad 1, se requería que los estudiantes aplicaran el concepto de combinación lineal en un nivel de mayor generalidad, es decir, que lo utilizaran para formar un conjunto de puntos en primera instancia y posterior a esta, la obtención de un conjunto de rectas que les sirva como elementos para formar el plano. En las respuestas que reporta el equipo, se puede apreciar con detalle que a partir del desarrollo de las actividades logran la obtención de una expresión matemática general, que puede ser considerada como la definición de la combinación lineal en dos dimensiones.

Algunas respuestas a la actividad 1: (Equipo B)

ACTIVIDAD 1

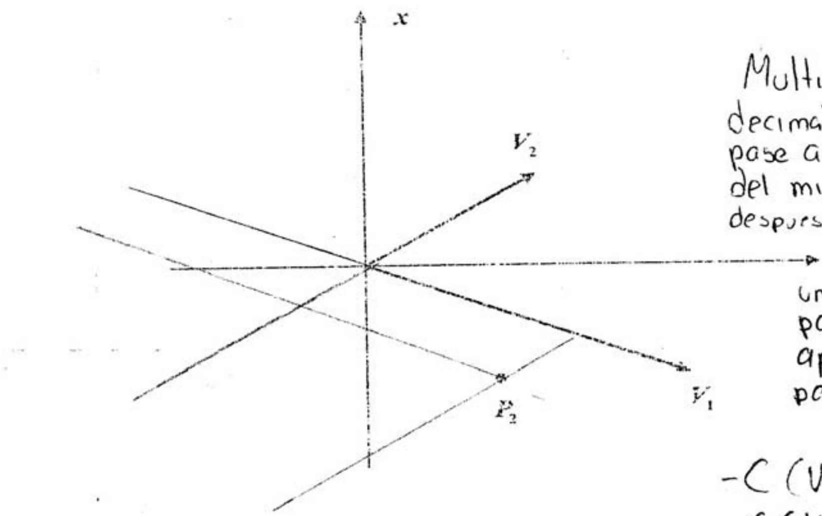
1. Con los vectores V_1 y V_2 construya los vectores P_1, P_2, P_3 y P_4 de las siguientes figuras:



Multiplicar el V_1 por un escalar menor para obtener la misma magnitud que V_2 y así poder formar el Punto P_1 con el metodo del paralelogramo

$C(V_1) = V_2$

$C(V_1) + V_2 = P_1$



Multiplicar V_1 por un escalar decimal negativo para que pase al lado negativo y quede del mismo tamaño que V_2 despues tambien se aplica la multiplicacion de un escalar decimal negativo para V_2 y para finaliza se aplica la regla del paralelo gramo

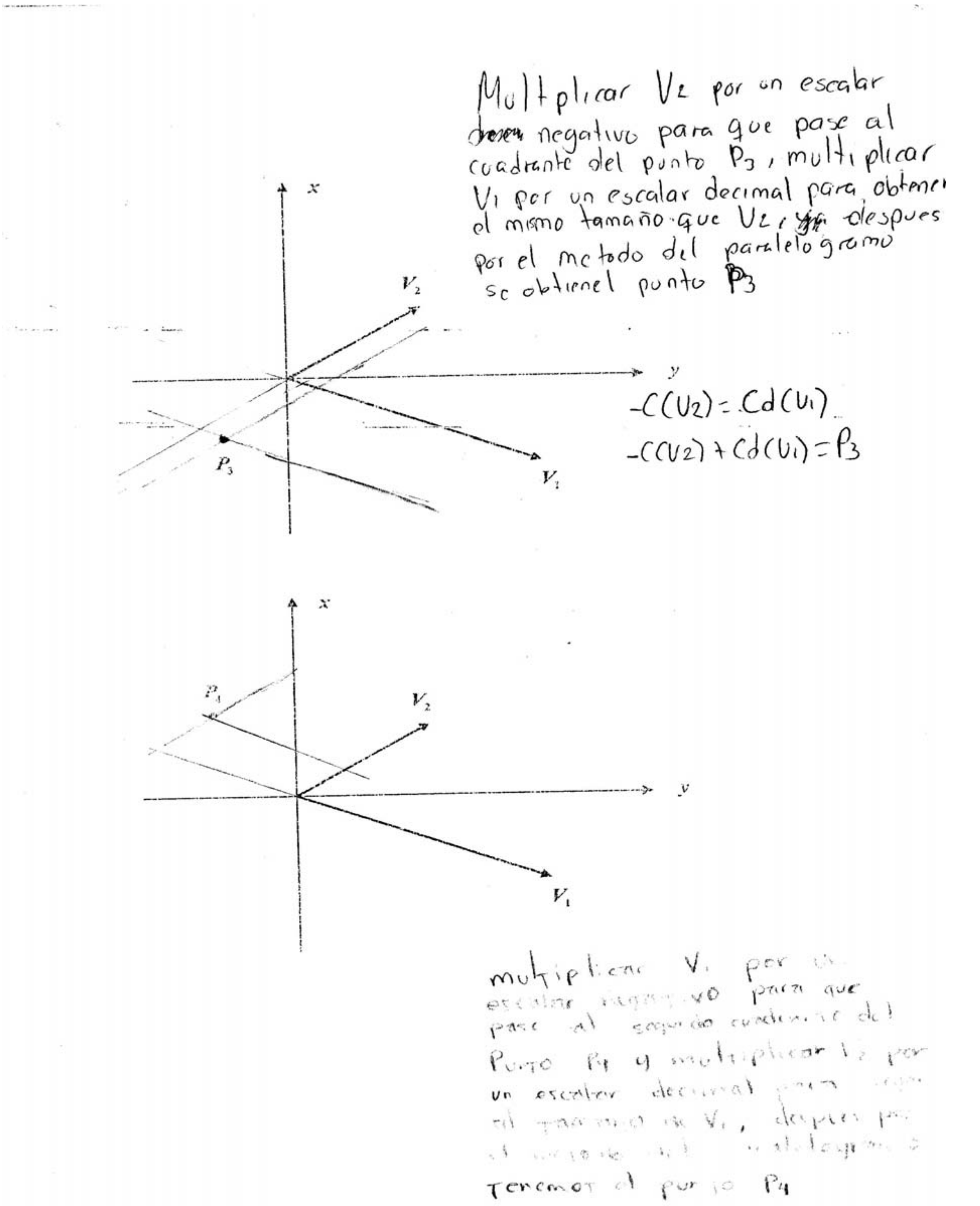
$-C(V_1)$

$-C(V_2)$

$-C(V_1) = -C(V_2)$

$-C(V_1) + (-C(V_2)) = P_2$

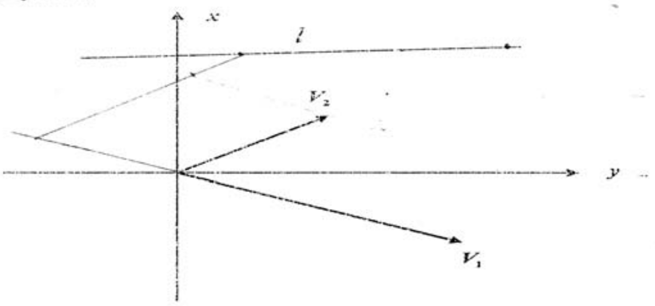
El grupo de estudiantes denominado equipo B, en su exploración realizada de la actividad 1, hacen uso de los conocimientos previos que tienen con relación a las operaciones de suma y producto de un escalar que se cumplen como característica de los vectores libres en el contexto de la física, es decir, utilizan el método del paralelogramo para dar salida a los cuestionamientos que se les plantea. Se puede observar al final de su reporte que estructuran una ecuación cuya forma se aproxima a la ecuación de la combinación lineal de un vector en términos de otros dos.



En la segunda sección de la actividad, el grupo de estudiantes en su explicación indican que para la representación de un vector en los distintos cuadrantes del plano cartesiano, es necesario hacer uso del producto de un escalar que sea negativo por un vector para producir un cambio de dirección del vector en ciertos casos y en otros, se debe afectar por un escalar negativo a ambos vectores con la intensión de obtener una posición específica en el cuadrante solicitado, tal como se puede leer en la parte superior del primer gráfico incluido en esta página.

Javier Alcala Arreta 40603712-7
Ulises Quevedo Sánchez

2. ¿Con los vectores V_1 y V_2 puede formar el segmento de recta l? Explique y grafique para algunos puntos.



3. ¿Con los vectores V_1 y V_2 puede formar la totalidad del plano? ¿Cómo?
De la misma forma que los ejercicios anteriores multiplicando por escalares mayor que uno ó menor de uno y aplicar el método del paralelogramo
4. ¿Son los vectores V_1 y V_2 los únicos que pueden formar el plano R^2?, proponga otro ejemplo distinto. No , V_3 y V_4 ... $V_n + V_m$

5. Escriba la ecuación que caracteriza la resultante generada por los vectores V_1 y V_2

$R = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$

En esta parte el equipo B, continúa utilizando como estrategia de solución el método del paralelogramo para dar respuesta a las preguntas planteadas en esta sección, se aprecia que solamente realizaron un trazo en su exploración, por consiguiente, consideramos que nos hacen falta elementos para dar una interpretación de su respuesta en la gráfica respectiva. Reportan que: *"multiplicando por escalares mayor que uno o menor de uno y aplicar el método del paralelogramo"* con dos vectores pueden formar la totalidad del plano. A este equipo le costo dar respuesta a las preguntas en las cuales no se incluían gráficos, por lo que suponemos que fue el motivo que provoco un obstáculo al emitir sus respuestas, al final estructuran una respuesta distinta a la planeada en el diseño de la actividad.

TABLA DE OBSERVACIONES, ACTIVIDAD 1

EQUIPO A	EQUIPO B	COMENTARIOS
1.- Recurren a realizar mediciones.	1.- Hacen uso de las características de los vectores, empleando la multiplicación por escalares.	El equipo A prefiere usar la medición, y un concepto más concreto, mientras que el equipo B se basa en un método más intuitivo.
2.- Formulan sus respuestas estructurando un planteamiento numérico.	2.- Responden con planteamientos que involucran el uso de literales.	En las respuestas que proporciona el equipo A es notorio que hacen uso de mediciones en la longitud de los vectores. El equipo B plantea respuestas en las cuales emplea literales.
3.- Ambos utilizaron el producto de un escalar negativo por un vector para la modificación de su sentido.		Los equipos utilizan las características que producen la inversión en el sentido de un vector y llegan a la solución respectiva sin mayores problemas.
4.- Muestran claridad en su respuesta; ya que, argumentan que pueden formar el plano mediante un vector cuales quiera.	4.- En su reporte, no proporcionan evidencias de establecer una respuesta estructurada, por cuestiones de tiempo.	Al utilizar el método de la medición, el equipo A puede llegar al resultado, mientras que el equipo B le cuesta trabajo, ya que, en su respuesta se nota una contradicción.
5.- El grupo de estudiantes logra estructurar una conclusión general que coincide con el resultado esperado.	5.- Establecen una respuesta distinta a la planteada en el diseño de la actividad.	El equipo A logra estructurar una expresión que representa el concepto de combinación lineal, en tanto que el equipo B en su respuesta establece una expresión que involucra el teorema de Pitágoras, suponemos entonces, que el factor tiempo continúa siendo un elemento que condiciona su respuesta.

Como se puede apreciar en el resultado de la actividad 1 que se reporta, se aprecia en forma general que los estudiantes logran responder los cuestionamientos asociados a la misma en función de la metodología utilizada y de los antecedentes con los cuales cuenta cada uno de los integrantes que conforman los respectivos equipos. Al realizar la etapa de retroalimentación que consistió en la exposición de sus respectivas exploraciones, frente al total de los participantes en la actividad, se observó que logran al final coincidir en las respuestas preestablecidas que se consideraron en el diseño de la actividad, es decir, aceptan a partir de una reflexión y haciendo uso de argumentaciones la coincidencia en sus respuestas siendo para ellos este hecho un agente motivador que les permite aceptar naturalmente la solución de las actividades restantes.

Es importante observar los métodos y las herramientas utilizadas por los alumnos en la resolución de la actividad 1, esto deja de cierta manera una idea clara del concepto de combinación lineal, dicho concepto se utiliza en la definición de dependencia e independencia lineal que los libros de texto reportan de manera general.

ACTIVIDADES 2, 3 y 4. ***Uso del Wronskiano y determinación de dependencia e independencia lineal***

En las siguientes actividades se espera que los estudiantes lleguen a deducir que el escenario de las representaciones gráficas no proporciona información suficiente para poder obtener directamente una categorización sobre el concepto de dependencia e independencia lineal. Se toma como fuente principal el uso del Wronskiano que es un método para determinar la independencia o dependencia lineal de un conjunto de vectores y que es de uso poco frecuente por los libros de texto proporcionados como fuentes de consulta en las escuelas de ingeniería en México. Estas actividades fueron realizadas en clases posteriores a la Actividad 1 anteriormente reportada. Para este momento, los alumnos ya habían visto en clase, las definiciones de dependencia e independencia lineal y habían trabajado con el docente un ejemplo en el que aplicaban el método del Wronskiano.

En la Actividad 2, se ponen en juego los conocimientos que el estudiante tiene de una recta, su pendiente, su ordenada al origen, el uso de derivadas sucesivas, y la solución de un determinante.

La Actividad 3, propone que los estudiantes hagan uso de los elementos de una parábola, la gráfica de una función constante, el uso de derivadas sucesivas y la solución de un determinante.

Finalmente en la Actividad 4 se hace un estudio en los polinomios de segundo orden con la intención de enfrentar a los estudiantes con una problemática para que analicen los posibles rasgos característicos que definen la dependencia e independencia lineal y puedan atribuir una categoría sobre estos.

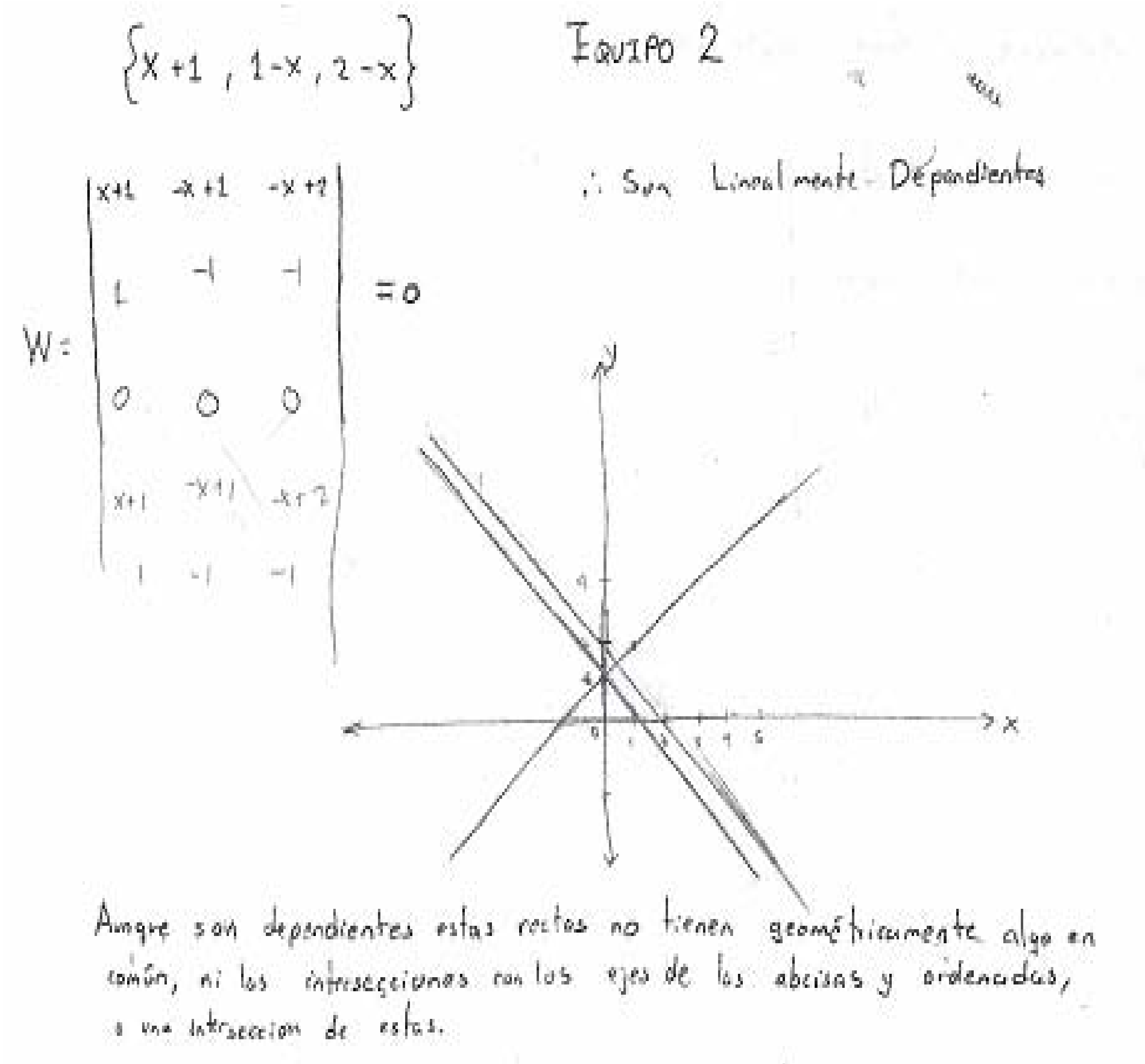
En seguida se presentan algunos de los resultados de las actividades, indicando en cada una de ellas los puntos a resolver y las respuestas que dieron los estudiantes, posteriormente se comentan los resultados y se da una conclusión; todo esto con el fin de tener la idea clara de cómo se fue realizando este proceso y teniendo siempre presente hacia a qué puntos de reflexión nos llevó esta actividad.

Algunas respuestas a las actividades

ACTIVIDAD 2

Dadas las siguientes funciones $\{x+1, 1-x, 2-x\}$:

a) Determine si son linealmente dependientes o independientes utilizando el Wronskiano.
b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?

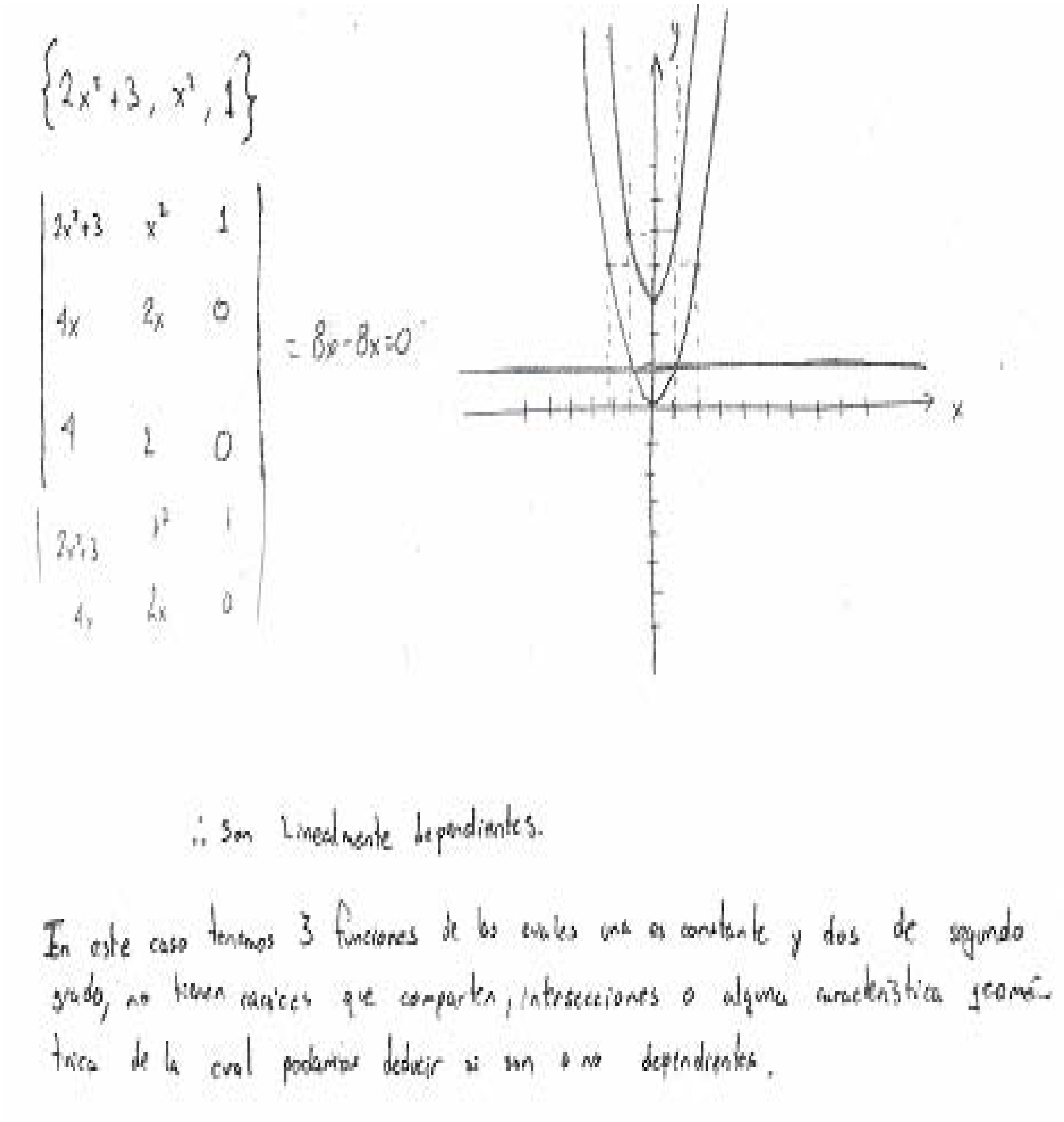


La actividad que hace uso del Wronskiano, está fundamentada en la definición la cuál involucra las n-1 derivadas sucesivas del conjunto de funciones, donde n representa el orden del polinomio. Haciendo uso de esta distribución se propone en la primera parte de esta actividad un conjunto de polinomios de primer orden en donde la respuesta que emiten los estudiantes se puede apreciar con claridad que a pesar de llegar a la solución analítica, ellos no encuentran una interpretación geométrica, convirtiéndose la exploración que efectúan en algo sumamente interesante.

ACTIVIDAD 3

Dados los siguientes polinomios **$2x^2+3$, x^2, 1.**

a) Determine si son linealmente dependientes o independientes utilizando el Wronskiano.
b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?
d) ¿Qué sucedería con las respuestas anteriores si las funciones fueran **$2x^2+3$, x^2, 7?**



En esta actividad nuevamente logran encontrar el resultado analítico sin llegar a una interpretación geométrica.

ACTIVIDAD 4

Dados los siguientes polinomios **$-2x^2+x-4$, x^2-4x-4, $8x^2-7x-4$.**

a) Determine si son linealmente dependientes o independientes.
b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?

$$\{-2x^2+x-4,\ x^2-4x-4,\ 8x^2-7x-4\}$$

$$\begin{vmatrix} -2x^2+x-4 & x^2-4x-4 & 8x^2-7x-4 \\ -4x+1 & 2x-4 & 16x-7 \\ -4 & 2 & 16 \end{vmatrix} = (-2x^2+x-4)(2x-4)(16)+(8x^2-7x-4)(-4x+1)(2)+(x^2-4x-4)(16x-7)(-4)$$

$$-(8x^2-7x-4)(2x-4)(-4)-(-2x^2+x-4)(16x-7)(2)-(x^2-4x-4)(-4x+1)(16)$$

$$=[-4x^3+2x^2-8x-8x^2+4x+16]16+[-32x^3+28x^2+16x+8x^2-7x-4]2+[16x^3-64x^2-64x-7x^2+28x+28]4$$

$$-[16x^3-14x^2-8x-32x^2+28x+16](-4)-[-32x^3-16x^2-64x+14x^2-7x+28]2-[-4x^3+16x^2+16x+x^2-4x-4]16=$$

$$=[-4x^3-6x^2-4x+16]16+[-32x^3+36x^2+4x-4]2+[16x^3-71x^2-36x+28]4+[16x^3-46x^2+20x+16]4$$

$$-[-32x^3-2x^2-71x+28]2-[-4x^3+17x^2+12x-4]16=$$

$$=-64x^3-96x^2-64x+256-64x^3+72x^2+18x-8+64x^3-284x^2-144x+112+64x^3-184x^2+80x+64$$

$$+64x^3+4x^2+142x-56+64x^3-272x^2-192x+64=$$

$$=-64x^3-64x^3+64x^3+64x^3+64x^3+64x^3-96x^2+72x^2-284x^2-184x^2+4x^2-272x^2$$

$$-64x+18x-144x+80x+142x-192x+256-8+112+64-56+64$$

$$=\underline{128x^3-760x^2-32x+432}\neq 0$$

Entonces los polinomios son Linealmente Independientes.

En la resolución de esta actividad se aprecia una gran mecanización de la herramienta matemática en cuanto al álgebra se refiere, incluso en el resultado mostrado arriba perteneciente a uno de los equipos participantes, muestra en sus respuestas que no logran plantear alguna propuesta de solución en el contexto gráfico de los polinomios. Dicha mecanización se pone de manifiesto, ya que este inciso se pide resolver posterior al que requiere hacer uso del método del Wronskiano, en la parte de retroalimentación algunos estudiantes manifestaron que otra alternativa pudo haber sido emplear la definición de combinación lineal como un recurso que les permita dar la categoría del concepto de dependencia e independencia lineal a los vectores de estudio y consideran que este hecho les hubiera facilitado los cálculos.

Discusión de los resultados:

En la actividad 1, se observaron algunas dificultades por parte de los alumnos cuando trabajan en los cuadrantes II, III y IV debido a que tienen dificultad para establecer los rangos del valor que deben tener los escalares para cumplir con las condiciones que les solicitan. Algunos estudiantes discutieron incluso acerca de los signos que debían tener cada uno de los escalares que intervienen en las combinaciones lineales correspondientes.

Algunos equipos llegan sin problemas a la generación de la recta l a partir de los dos vectores que originalmente se proponen. En términos generales la mayoría de los estudiantes participantes hacen uso de los elementos geométricos asociados a cada inciso del diseño en esta actividad.

Los equipos de estudiantes al trabajar con el Wronskiano presentan regularmente cierta resistencia, pues el concepto involucra hacer uso de derivadas sucesivas y de la solución de un determinante. También llegan a presentar frecuentemente resultados contradictorios entre los cálculos obtenidos y su interpretación en forma geométrica.

Conclusiones:

El diseño de situaciones didácticas orientadas a la construcción de un concepto algebraico no resulta sencillo, debido a las características propias del álgebra en el discurso matemático escolar.

Resulta notorio que al solicitar interpretaciones de las gráficas de la dependencia e independencia lineal de funciones polinómicas, muchos estudiantes intentaron identificar dichas interpretaciones a través de la búsqueda de intersecciones entre las curvas e intersecciones de las mismas con los ejes coordenados. Interpretamos estas respuestas como un intento de transferencia de conocimientos adquiridos en el análisis matemático a esta otra rama de la matemática.

El grupo de estudiantes que intervino en la experiencia declararon que les resultó muy agradable la solución de las actividades planteadas y valoraron positivamente la cantidad de elementos matemáticos que llegan a discutir, pues resulta que en general, al término de la puesta en escena todos los participantes sienten una cierta sensación de satisfacción por la actividad matemática desarrollada en su participación, sin importar cuánto hayan resuelto de manera correcta. Tras las actividades desarrolladas, en la puesta en común realizada como un factor que aporta una retroalimentación en forma grupal, se produjo una participación activa por parte de los estudiantes que argumentaban a favor de sus resoluciones y resultados.

Con base al resultado de las actividades propuestas en el presente trabajo y tomando como fundamento las exploraciones realizadas por los equipos participantes, podemos considerar que la visualización es la capacidad o habilidad que cada individuo debe desarrollar y procurarse para lograr un aprendizaje distinto al tradicional y así mismo apoyar el desarrollo académico de la actividad matemática en general y en particular para nuestro caso, los conceptos de dependencia e independencia lineal en la asignatura de algebra lineal al interior del aula.

Consideramos que la puesta en práctica de las actividades anteriores fue exitosa, pues si bien la totalidad de los estudiantes no pudieron resolverlas correctamente, se generó en el aula un ambiente en el que los intercambios de opiniones fueron abundantes y productivos. Como una consideración final, se observó que el aprendizaje cooperativo propició interesantes discusiones previas a la escritura de las respuestas.

Referencias Bibliográfícas:

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F., Santos, M. (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 55-80). Morelos, México.

Cantoral, R.; Montiel, G. (2002). *Una presentación visual del polinomio de Lagrange*. Enseñanza de la Matemática. Asociación Venezolana de Educación Matemática, Vol. 11 (1), 24–38.

Grossman, S. I. (1999). *Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill.

Lay, D. C. (2001). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. México: Pearson Educación.

Poole, D. (2004). *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. México: Thomson Learning.

Williams. G. (2002). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México: McGraw- Hill.

Sierpinska, A**.** (1996). *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra*. Research Conference in Collegiate Mathematics Education, Central Michigan University.