REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS

El grado de reflexión de los alumnos de cálculo diferencial. Una experiencia

Carolina Ramos; Margarita del Valle Veliz y Sonia Patricia Ross

carolinaramos1109@hotmail.com, eli_drosa@hotmail.com

Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán

Resumen

La ejecución de las tareas exige del estudiante justificar tanto las acciones que realiza, como los criterios en que basa su trabajo, lo que contribuye a incentivar la reflexión.

En este trabajo se midió el grado de reflexión de los alumnos de Cálculo Diferencial en el año 2005. Se consideró una muestra de 200 alumnos, seleccionados mediante un muestreo aleatorio simple, sobre un total de 601 alumnos que concluyó el cursado de la misma, haciéndose un análisis comparativo de los niveles de reflexión al comienzo y al final del cursado de la asignatura.

Se trabajó con guías de estudio preparadas especialmente, con elementos de autorregulación y autoevaluación, en las que se puso énfasis en actividades de reflexión, autocorrección y autocontrol. Estas guías se elaboraron según la concepción sistémica del proceso de enseñanza – aprendizaje, teniendo en cuenta los tres modelos: de objetivos, de contenidos y del proceso de asimilación, siguiendo las teorías enmarcadas en la psicología cognitiva.

En este trabajo se muestran los resultados logrados luego del trabajo con dichas guías.

Palabras clave: experiencia – grado de reflexión – guías de estudio – autorregulación.

1. INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de proposiciones va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, combinadas o aisladas, puesto que exige captar el significado de la idea expresada.

Por ejemplo, cuando se conoce el significado de los conceptos, se pueden formar frases que contengan dos o más conceptos en donde se afirme o niegue algo. Así, un concepto nuevo es asimilado al integrarlo a la estructura cognitiva con los conocimientos previos.

El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva. Es decir, que una proposición potencialmente significativa, expresada verbalmente, como una declaración que posee significado denotativo (las características evocadas al oír los conceptos) y connotativo (la carga emotiva, actitudinal e ideosincrática provocada por los conceptos) de los conceptos involucrados, interactúa con las ideas relevantes ya establecidas en la estructura cognoscitiva y, de esa interacción, surgen los significados de la nueva proposición.

Teniendo en cuenta que los mecanismos de regulación y control se han vuelto el centro de atención de muchos investigadores, y que la necesidad de potenciar niveles altos de control del aprendizaje por parte de los alumnos se ha relacionado con conductas de tipo metacognitivo, es que se realizó este trabajo de investigación durante los últimos períodos lectivos. Las investigaciones sobre las diferencias entre aprendices con distinto grado de desarrollo de ciertas competencias, muestran claramente la estrecha relación que existe entre el aprendizaje y la autorregulación.

2. MARCO TEÓRICO

La Teoría de la asimilación de P. Ya Galperin (1969) que tiene su base en el Enfoque Histórico – Cultural de Vigotsky, parte de la concepción de que el desarrollo de la personalidad se hace a través de las acciones mentales (psíquicas) de los alumnos dentro de una actividad, en un proceso de formación por etapas. Pero este proceso debe ser planificado y dirigido, lo que exige un conocimiento profundo de cómo surgen las acciones mentales y de cómo deben crearse las condiciones para estructurar el proceso de enseñanza de forma óptima.

La asimilación de conocimientos es un tipo de actividad, y para que el estudiante aprenda se requiere que realice determinadas acciones. Para ello, el alumno necesita algún tipo de orientación. De ahí la importancia que el proceso de asimilación se organice teniendo en cuenta la Teoría de la Dirección (Talizina, 1988) con sus fases de orientación, de ejecución y de control. Es decir que la organización del proceso de asimilación debe garantizar los tres componentes funcionales en toda actividad: la parte orientadora, la ejecutora y la de control. Asimismo y en correspondencia con los objetivos y el contenido, en la organización del proceso de asimilación se deben tener en cuenta las etapas previstas por Galperin en su Teoría de la Asimilación para el proceso de formación de una acción:

- Fase de orientación :

- Motivación
- Base Orientadora de la Acción (B.O.A.)

Para llevar a cabo la motivación, el profesor debe provocar en los estudiantes la necesidad de buscar nuevos contenidos o de aplicar un conocimiento ya adquirido en la resolución de un problema nuevo. Teniendo en cuenta que la motivación no se circunscribe a un primer momento del proceso, sino que debe mantenerse en el transcurso del mismo, es fundamental brindar una orientación adecuada. La parte orientadora es la que permite al estudiante realizar y regular su actividad.

Esta fase de orientación, es el momento de creación de una base de orientación para la acción, donde el estudiante debe apropiarse del plan de acción para la ejecución de la tarea propuesta o de resolución de un problema (planificación).

- Fase de ejecución (formación de la acción):

Es el momento de realización de la acción en el plano práctico mental, llevándose a cabo acciones en los planos material, verbal y mental. La ejecución de la tarea en los planos verbal y mental exige del estudiante justificar tanto los pasos o acciones a realizar como los criterios en que se basa su trabajo, lo que contribuye a la reflexión, a defender posiciones y criterios técnicos y científicos.

- Fase de control

Éste es el momento de asegurarse de la calidad de las decisiones tomadas. Abarca tanto el control de la planificación como el de las operaciones, como así también el control según el resultado final de la tarea que se ejecuta.

Manifestaciones de control deben producirse tanto en el momento de motivación, como en el de orientación y el de ejecución de la actividad. En el momento de motivación el sujeto controla la correspondencia existente entre el objetivo de la tarea y sus aptitudes e intereses.

«El control es necesario pero no suficiente, en tanto es menester una regulación de la acción que presupone aplicar correctivos y realizar ajustes; bien por el profesor, mejor por los propios estudiantes y tantísimo mejor si es por el propio estudiante, lo que se convertiría en una autorregulación». (Hernández, H. et al, 1996: 286).

Para que el control sea efectivo debe complementarse con la aplicación de correctivos y realización de ajustes por parte del docente, del grupo de alumnos y preferentemente por el propio estudiante, esto favorecería la autovaloración y autorregulación.

Al decir de Jorba y Casellas (1997: 28), "en la autorregulación se pretende que los alumnos sean cada vez más autónomos, formándolos en sus propios procesos de pensamiento y de aprendizaje, es decir, enseñándoles a aprender a aprender".

Uno de los aportes de P. Ya Galperin a la Teoría de la Actividad de Leontiev (1981), fue la precisión de un conjunto de características o indicadores que permiten evaluar la calidad de la acción formada.

El primer indicador es la forma en que se ejecuta la acción. Se definen tres formas fundamentales de la acción:

- Etapa material o materializada: el alumno se apoya en algún material para desarrollar su trabajo.
- Etapa verbal: el alumno verbaliza el razonamiento teórico en forma oral o escrita, de tal manera que la acción se transforma de la lógica de la acción en la lógica del concepto, así el alumno reflexiona sobre lo que hizo y por qué lo hizo.
- Etapa mental: el alumno es capaz de generalizar y aplicar sus conocimientos en un plano mental a situaciones nuevas, de forma reducida, con dominio de la acción e independencia.

En la enseñanza de la Matemática se realiza un gran número de acciones mentales: se definen conceptos, se elaboran teoremas, se realizan demostraciones, construcciones geométricas, etc. Estas acciones no se dan de inmediato, y hasta llegar a la etapa mental se pasa por las anteriores, lo que al cumplirse garantiza que el proceso de aprendizaje se desarrolle en todos los alumnos de forma más racional y efectiva.

En las etapas anteriormente descriptas se mencionaron procedimientos lógicos que el alumno va desarrollando durante el proceso, los que nos dan otros indicadores cualitativos de la acción, entre ellos:

- Grado de Generalización: expresa la relación entre las situaciones a las que el estudiante aplica el concepto y las objetivamente posibles.
- Grado de Reflexión: capacidad de fundamentar las acciones realizadas.
- Grado de Independencia: dominio de la acción logrado a partir de la planificación del retiro paulatino de la ayuda del docente o del material.

En el plano didáctico se distinguen cuatro niveles de asimilación del conocimiento:

- Familiarización: el estudiante es capaz de reconocer los objetos, procesos y propiedades estudiados anteriormente según el modelo a él presentado.
- Reproducción: el estudiante puede reproducir la información, la operación, resolver problemas tipo estudiados.
- Producción: el estudiante es capaz de realizar las operaciones según el orden acostumbrado, en las condiciones nuevas y con el contenido nuevo. Por ejemplo la solución de problemas no típicos.
- Creación: en este nivel de asimilación el estudiante es capaz de orientarse independientemente en situaciones objetivas o subjetivamente nuevas para él. Su actividad puede tener carácter de búsqueda, de investigación.

Se sabe que no toda actividad externa asegura necesariamente una movilización interna del sujeto. La construcción del conocimiento se produce cuando el sujeto interactúa con el objeto de conocimiento (Piaget, 1971), cuando esto lo realiza en interacción con otros (Vigotsky, 1982) y cuando es significativo para el sujeto (Ausubel, 1983).

Se adopta así un enfoque constructivista, al que aportan la psicología genética de Piaget, el procesamiento de

información, la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel y la psicología histórico – cultural de Vigotsky.
Como la actividad interna en el alumno es lo que produce aprendizajes significativos, para que ésta se produzca es necesario que la intervención del docente sea estratégica, mediante la formulación de interrogantes o preguntas, o bien mediante exposiciones como respuesta a inquietudes que surgen al colocar al estudiante en situaciones conflictivas. También puede ocurrir que haya conocimientos que a los alumnos les parezcan muy fáciles u obvios; desestabilizar lo obvio es un interesante ejercicio del pensamiento. Las preguntas obvias suelen ser las más inquietantes en el instante de construir conocimientos. La clave del aprendizaje significativo está en establecer una relación entre el nuevo material y las ideas ya existentes. Siempre que al alumno se le prepara para que aprenda nuevos conocimientos, recurre a una especie de anclaje para relacionarlos o conectarlos con los conocimientos previamente adquiridos, es decir, existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción de conocimientos. Un aprendizaje es tanto más significativo cuanto mejores sean las relaciones que el alumno es capaz de establecer entre lo que ya conoce y el nuevo contenido que se le presenta como objeto de aprendizaje. Esto quiere decir que en el proceso educativo, es importante considerar lo que el individuo ya sabe de tal manera que establezca una relación con aquello que debe aprender. Este proceso tiene lugar si el educando tiene en su estructura cognitiva conceptos, ideas y proposiciones estables y definidas, con las cuales pueda interactuar la nueva información.

En una perspectiva constructivista, el diseño y la planificación de la enseñanza deberán prestar atención a cuatro dimensiones:

1- Los contenidos de la enseñanza
2- Los métodos y estrategias de enseñanza
3- La secuencia de los contenidos
4- La organización social

Según Fandiño Pinilla, M. (2003), la dirección que puede seguirse en el desarrollo de un *currículo de matemática* según el constructivismo establece que:

- La matemática es construcción de conceptos basados en la asimilación y en la acomodación.
- Enseñar matemática es proponer imágenes y modelos siempre más adecuados a experiencias tomadas de la realidad.
- Se aprende la matemática asimilando y acomodando sucesiones de imágenes y de modelos
- Se evalúa la capacidad de asimilar, la capacidad de acomodar y la capacidad de adaptación
- Un error en matemática es un hecho que denuncia un malestar cognitivo que depende de una falta de asimilación o de un acomodamiento incorrecto
- La tarea del alumno es construir personalmente conceptos con la esperanza que sean, antes o después, adecuados a aquellos que se esperan o que son aceptados.
- La tarea del docente es crear una sucesión de imágenes y de modelos de conceptos que lleven al estudiante a construir conocimiento
- Se justifica la metodología que consiste en crear situaciones oportunas, cada una de las cuales lleve a conflictos cognitivos.

Una de las formas de optimizar el proceso docente consiste en aumentar la efectividad del proceso de aprendizaje. Ello es posible si en cada etapa del proceso se cumple con las exigencias de la Teoría general de la Dirección. De ahí que el proceso docente se concibe como un sistema.

3. METOLOGÍA

El estudio del grado de reflexión de los alumnos

El dispositivo elaborado en la presente investigación consiste en guías de estudio que orientan a los alumnos para estudiar de forma significativa y autorregulada, a la vez que autoevalúen sus propios resultados (Ver Anexos N°1 y N°2). Estas guías son líneas de conducción del autoaprendizaje; se componen de pequeños proyectos de trabajo a desarrollar con carácter metódico, cuyo propósito es el de generar y facilitar un aprendizaje teórico–práctico de naturaleza autónoma. Se trata así de organizar la enseñanza de modo que el alumno aprenda a aprender, que de sujeto pasivo se convierta en el centro del proceso de aprendizaje, propiciando el desarrollo de su capacidad de autoaprendizaje, a la vez que se autoevalúe.
Ante los resultados de múltiples investigaciones coincidentes en resaltar el carácter reproductivo que aún caracteriza el pensamiento de los estudiantes y considerando que cada persona tiene un sistema personal de aprender que ha ido construyendo progresivamente a lo largo de su vida, se pretende favorecer la autorregulación del aprendizaje, entendiéndola como el ajuste que el alumno aprende a hacer en las estrategias que utiliza para lograr un objetivo propuesto, y luego actuar en consecuencia. Se podría decir que la autorregulación es la actividad mental que permite crear un sistema personal de aprendizaje.

En el Sistema de autorregulación y autoevaluación con que se trabajó en Cálculo Diferencial, se elaboraron guías de estudio teniendo en cuenta la concepción sistémica del proceso de enseñanza – aprendizaje según los tres modelos: de objetivos, de contenido, y del proceso de asimilación. Es decir:

1. Los objetivos se formularon en términos de acciones más generales a partir de la función de la asignatura dentro del perfil del graduado de Ciencias Económicas.

2. Los contenidos se organizaron siguiendo un enfoque sistémico, en este caso genético o sea según célula generadora, que para la asignatura Cálculo Diferencial es el concepto de función.

3. El proceso de asimilación se organizó mediante un sistema de tareas para las clases prácticas y para la autopreparación, que contempla las etapas o momentos de dicho proceso, vinculándolo con otras asignaturas tanto de la disciplina Matemática como de Economía y Administración.

Se considera la metacognición como modelo – motor de construcción personal, es decir que tiene suma importancia la conciencia que el alumno tenga de sus capacidades y habilidades cognitivas, sus mecanismos de regulación, sus conocimientos previos y los procedimientos mentales que

utiliza en cada caso. Es así que cobran importancia las mediaciones del docente si se encaminan a la explicitación de procesos más que a poner énfasis en los resultados.
Ello facilita la adquisición por parte de los alumnos, de una experiencia metacognitiva estratégica indispensable para los nuevos tiempos.
Las instancias de enseñanza y de aprendizaje se organizan de la siguiente manera:

1. La presentación estratégica de los contenidos por parte del docente.
2. Una fase de práctica guiada donde se facilitan los mecanismos para que el alumno pueda explicitar sus razonamientos y esquemas en relación a la demanda de la tarea solicitada.
3. Un tercer momento donde se favorece la práctica independiente, autónoma y con dosis metacognitivas por parte del alumno.

Para cada tema de estudio, la guía que se elaboró está dividida en tres aspectos:

1.- *Antes de la clase práctica*
Esta instancia contiene orientaciones definidas y conceptos que el alumno debe tener presentes para su trabajo, de modo que sepa qué es lo que se va a tratar en la clase práctica. Para los alumnos que no asistieron a la Conferencia, tiene la ventaja de que puede autoprepararse y asegura su participación independiente en la clase práctica.

2.- *Para la clase práctica*
Se eligieron ejercicios y problemas de la Guía de trabajos prácticos elaborada en la Cátedra, seleccionados en forma ordenada, siguiendo los niveles del proceso de asimilación.
Con el fin de afianzar habilidades en cada tema de estudio, se tuvieron en cuenta las etapas del proceso de asimilación: material, verbal y mental.
En general, los ejercicios propuestos para la primera etapa, sirven para afianzar las habilidades de identificar, interpretar, observar, definir, recodificar, algoritmizar, calcular, graficar.
Para la segunda etapa, se preparó la ejercitación de modo que puedan afianzarse las habilidades de demostrar, fundamentar, resolver, aproximar, clasificar.
Finalmente para la tercera etapa, se pretende que los alumnos afiancen las habilidades de modelar, optimizar, comparar, controlar, evaluar.

3.- *Después de la clase práctica*
Se proponen actividades para que los alumnos las realicen de manera que puedan efectuar el control de las actividades metacognitivas, hacer ajustes necesarios en el conocimiento, regular su aprendizaje, retroalimentar y consolidar los conocimientos.
Se propone un Cuestionario al final de cada tema con preguntas para que el alumno se las formule, de modo que le sirvan de ayuda para diseñar su forma personal de aprender (actividad metacognitiva).
Se ofrece también a los alumnos una Guía de autoevaluación, de manera que al finalizar cada unidad de estudio, el alumno verifique los conceptos adquiridos, reconozca dudas y dificultades, registrando en algunos casos la necesidad de revisar los temas desarrollados.

Con la utilización de las guías antes mencionadas se trató de facilitar la reflexión sobre el conocimiento y la conciencia sobre cómo se está aprendiendo.

Para medir el grado de reflexión de los estudiantes finalizada la experiencia, se consideró el diagnóstico y el tercer examen parcial de la asignatura, observando la argumentación en proposiciones de verdadero o falso.
Se consideró una muestra de 200 alumnos, seleccionados mediante un muestreo aleatorio simple, sobre un total de 601 alumnos que concluyó el cursado de la asignatura. Se trabajó con el software estadístico STATA 7.0 para obtener todos los resultados, con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Se llegó a un valor de $p = 0{,}0119$, lo que indica que hubo una mejora significativa en el grado de reflexión de los alumnos.

Para ello se establecieron los siguientes **niveles de reflexión**:
I: considera todas las características necesarias y suficientes.
II: considera todas las características necesarias y suficientes y alguna no necesaria.
III: no considera alguna característica suficiente o necesaria y suficiente.
IV: no considera alguna característica suficiente o necesaria y suficiente, y además considera alguna no necesaria.
V: no considera ninguna característica necesaria y suficiente.
VI: no justifica su respuesta

Los niveles que miden el grado de reflexión se consideraron como:
Alto (I y II) **Medio** (III y IV)
Bajo (V y VI).

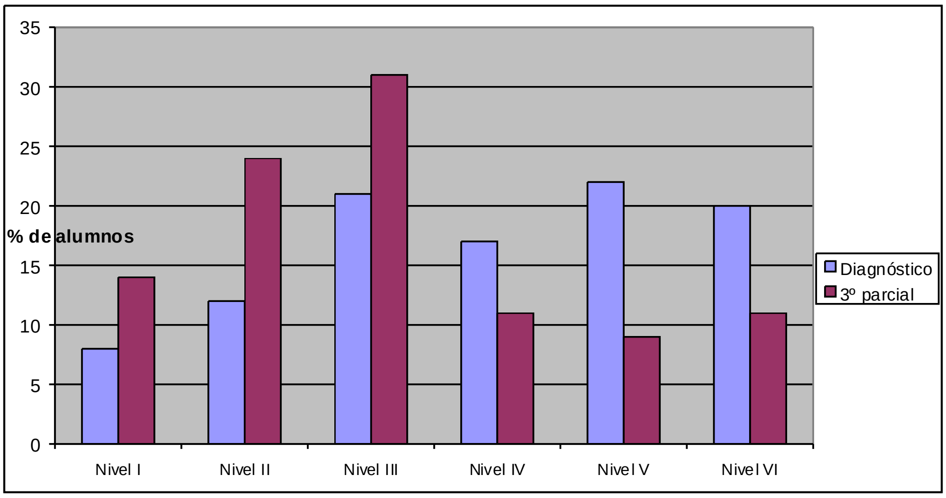
Finalmente se efectuó una prueba no paramétrica (Prueba de rangos con signos de Wilcoxon), puesto que los datos representan diferencias entre las puntuaciones de dos muestras relacionadas (puntuaciones obtenidas antes y después de implementar la metodología de trabajo mediante la utilización de las guías de autorregulación y autoevaluación), donde cada sujeto sirvió como su propio control. Se analizaron los efectos de la metodología sobre el grado de reflexión de los alumnos asignando puntajes a las respuestas del diagnóstico y del último parcial de la asignatura.

4. RESULTADOS

Los resultados obtenidos en porcentaje de alumnos para cada nivel en ambos casos son:

Niveles	I	II	III	IV	V	VI
Diagnóstico	8%	12%	21%	17%	22%	20%
3º parcial	14%	24%	31%	11%	9%	11%

Gráfico Nº 1: Distribución porcentual de 200 alumnos según los niveles de reflexión alcanzados al comienzo y al final del cursado de Cálculo Diferencial. Año 2005.



Fuente: Cálculo Diferencial. Facultad de Ciencias Económicas. Año 2005

Los resultados obtenidos muestran que al terminar el cursado de la asignatura:

- el 38% de los alumnos se encuentra en los niveles I y II, es decir en un nivel de reflexión alto.
- el 42% en los niveles III y IV, es decir en un nivel de reflexión medio y
- el 20% en un nivel de reflexión bajo.

Una vez aplicada la Prueba de rangos con signos de Wilcoxon, los resultados muestran que la mejora fue significativa en el grado de reflexión de los alumnos después de la implementación de las guías de estudio y trabajo.

Las hipótesis contrastadas fueron:

H_0: "la metodología de trabajo empleada no tiene efectos sobre el nivel de reflexión de los alumnos" (Hipótesis nula).

H_1: "la metodología de trabajo empleada tiene efectos positivos sobre el nivel de reflexión de los alumnos" (Hipótesis alternativa).

Se llegó a un valor de $p = 0{,}0119$, lo que indica que se debe rechazar la hipótesis nula en favor de la alternativa, es decir que hubo una mejora significativa en el grado de reflexión de los alumnos.

CONCLUSIONES

- Los niveles de reflexión obtenidos como resultados de la investigación, muestran una mejora significativa en el grado de conciencia o reflexión de los alumnos después de la implementación de la metodología mediante la utilización de las guías de estudio, a pesar de que consideramos que son más los factores que pueden haber influido en la mejora.
- El 80% de los alumnos se ubicó entre los niveles alto y medio de reflexión.
- Los resultados obtenidos estimulan a seguir trabajando para incentivar a los alumnos en el logro de niveles de reflexión altos.
- Los resultados indican que las actividades propuestas, con sus estrategias para solucionar ejercicios y problemas, posibilitan la función reguladora de la actividad del alumno por parte del profesor y a la vez la autorregulación por el propio alumno, dando lugar también a que éste reflexione sobre sus métodos de estudio y su forma de construir el conocimiento, actividad metacognitiva de un alto valor psicopedagógico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D.P;, Novak, J.D., Hanesian, H. (1983) *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo* .2° Ed. Trillas México

Bixio, C. (2004). *Cómo planificar y evaluar en el aula. Propuestas y ejemplos.* Rosario- Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Coll, C.; Martín, E.; Mauri, T.; Miras, M.; Onrubia, J.; Solé, I. y Zabala, A. (1999). *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Editorial Graò.

Czar, M.T. (1998). "Incidencias de las concepciones del aprendizaje en la práctica docente" en La Relación pedagógica y concepciones del aprendizaje en la práctica docente, p. 22 – 28, Instituto Coordinador de Programas de Capacitación, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

Díaz Barriga, F. y Hernández Rojas, G. (1997). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*, México: Mc. Graw Hill.

Fandiño Pinilla, M.I. (2003). "Currículo y evaluación en Matemáticas: Hipótesis de base", Curso en el marco del VSEM (V Simposio de Educación Matemática), Chivilcoy, Bs. As.

Galperín, P. (1969) *Sobre la investigación del desarrollo intelectual del niño*. En Biblioteca de psicología . Editorial Progreso, Moscú 1989.

Hernández, H.; Delgado, J. R.; Valverde, L. y Rodríguez, T. (1996). "Un recurso metacognitivo para resolución de problemas en Matemática", Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura, p. 286 – 292, La Habana – Cuba.

Hernández, H; Delgado, J. R.; Fernández, B.; Valverde, L y Rodríguez, T. (1998). *Cuestiones de Didáctica de la Matemática*, Rosario – Argentina: Serie Educación, Homo Sapiens.

Jorba, J. y Casellas, E. (eds.). (1997). *La regulación y la autorregulación de los aprendizajes.* España: Editorial Síntesis.

Leontiev, A. N. (1981) *Actividad, conciencia, personalidad,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana.

Monereo, C.; Barberá, E.; Castelló, M. y Pérez Cabaní, M.L. (1996). "Estrategias de aprendizaje. El desarrollo del aprendizaje autónomo", en M. Alvarez, M. y B. Bisquerra, coords.. *Manual de orientación y tutoría*, p. 145 – 192, Barcelona: Praxis.

Piaget, J: *Psicología y Pedagogía*, Ed Ariel, Barcelona, 1971

Pozo, J.I. y Monereo, C., coord. (1999). *El aprendizaje estratégico. Enseñar a aprender desde el currículo.* Aula XXI, Madrid: Santillana.

Sanz, T y Corral, R (1996): "Jean Piaget y la Pedagogía Operatoria", en *Tendencias pedagógicas contemporáneas.* Ibagué – Colombia, El Poira Editores e Impresores S.A.

Talizina, N.F. (1988): *Psicología de la enseñanza,* Ed. Progreso, Moscú

Veliz, M. (2002). "Sistema de autorregulación y autoevaluación del aprendizaje del Cálculo Diferencial para estimular el trabajo independiente de los alumnos en las clases prácticas". Tesis de Magíster. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

Vigotsky, L. (1982) *Pensamiento y Lenguaje,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, Cuba.

ANEXO Nº 1

TEMA: DIFERENCIACION O DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

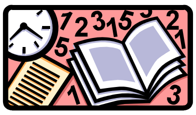
ESTRUCTURACION DE LA 1º CLASE PRACTICA DE LA UNIDAD Nº 5
Sumario:
- Tasa de variación media e instantánea.
- Derivada de una función en un punto.
- Derivadas laterales.
- Derivabilidad en un intervalo.
- Función derivada.
- Aplicaciones de la derivada a Economía

Objetivos: Que el alumno sea capaz de:
- Interpretar el concepto de derivada de una función en un punto analítica y gráficamente.
- Calcular derivadas de funciones de una variable real.
- Aplicar el concepto de derivada en problemas simples de Economía.
- Identificar cuándo una función es derivable en un punto.
- Interpretar los conceptos de recta tangente y recta normal a una curva.
- Obtener la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de una función en un punto.

GUÍA DE ESTUDIO DEL TEMA DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES (Unidad 5)

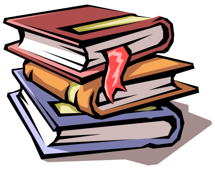
TEMA: DERIVADA, SU INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:



1 ANTES DE LA CLASE PRÁCTICA

Responde las siguientes preguntas:
1) ¿Cómo se define la derivada de una función en un punto "**a**"?
2) ¿Cómo se define la función derivada? ¿Cuál es su dominio?
3) ¿Siempre existe la derivada de una función f en "**a**"?
4) ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de f en "**a**"?
5) ¿Cuándo se dice que f es derivable en "**a**"?
6) ¿Cómo se definen las derivadas laterales?



PARA TENER PRESENTE

Tasa de variación media:

$$\frac{\Delta y}{\;} = \frac{f(x+h)-f(x)}{\;}$$

Tasa de variación instantánea:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Función derivada:

$f' = \{ (x,y) \,/\, y = f'(x) \}$

donde

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivada de una función en un punto "a":

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ si este límite existe. O bien:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (h = \Delta x)$$

Derivadas laterales:
(propiedad)

$$\exists\, f'(a) \;\Leftrightarrow\; f'_{-}(a) = f'_{+}(a)$$

Geométricamente la derivada de f en un punto es la **pendiente** de la recta tangente a la gráfica de f en ese punto.

REGLAS DE DERIVACIÓN

$D_x K = 0, \quad K \in \Re$	$D_x [K f(x)] = K D_x [f(x)]$
$D_x x^n = n x^{n-1}$	$D_x [f(x)]^n = n [f(x)]^{n-1} D_x [f(x)]$
$D_x \lvert x \rvert = \frac{\lvert x \rvert}{x}, \;\text{con } x \neq 0$	$D_x \lvert f(x) \rvert = \frac{\lvert f(x) \rvert}{f(x)} D_x f(x) \;, \;\text{con } f(x) \neq 0$

$D_x\, e^x = e^x$	$D_x\, e^{f(x)} = e^{f(x)}\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x\, a^x = a^x \ln a$	$D_x\, a^{f(x)} = a^{f(x)} \ln a\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x \ln x = \dfrac{1}{x}$	$D_x \ln f(x) = \dfrac{1}{f(x)}\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x \log_a x = \dfrac{1}{x \ln a}$	$D_x \log_a f(x) = \dfrac{1}{f(x) \ln a}\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x\, \text{sen}\, x = \cos x$	$D_x\, \text{sen}\, f(x) = \cos f(x)\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x \cos x = -\, \text{sen}\, x$	$D_x \cos f(x) = -\, \text{sen}\, f(x)\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x\, \text{tg}\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$D_x\, \text{tg}\, f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 f(x)}\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x\, \text{cotg}\, x = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$	$D_x\, \text{cotg}\, f(x) = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 f(x)}\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x\, \text{sen}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D_x\, \text{sen}^{-1} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x \cos^{-1} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D_x \cos^{-1} f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x\, \text{tg}^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2}$	$D_x\, \text{tg}^{-1} f(x) = \dfrac{1}{1+[f(x)]^2}\, D_x\, [\, f(x)\,]$
$D_x\, \text{cotg}^{-1} x = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$D_x\, \text{cotg}^{-1} f(x) = -\dfrac{1}{1+[f(x)]^2}\, D_x\, [\, f(x)\,]$

ALGEBRA DE DERIVADAS

$D_x\, [\, f(x) \pm g(x)\,] = D_x\, [\, f(x)\,] \pm D_x\, [\, g(x)\,]$
$D_x\, [\, f(x)\, .\, g(x)\,] = D_x\, [\, f(x)\,]\, .\, g(x) + f(x)\, .\, D_x\, [\, g(x)\,]$
$D_x \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{D_x [\, f(x)\,] . g(x) - f(x) . D_x [\, g(x)\,]}{[g(x)]^2}$

SUGERENCIA: lee en la bibliografía básica, página 190, el ejemplo donde se muestra que:

si $f(x) = |\, x\, |$ entonces $f\,'(0)$ no existe.

Ejemplo 1

(Ejercicio 1) e) de página 50 de la Guía de Trabajos Prácticos):
1) Calcule, si existe, utilizando la definición de derivada en un punto:

e) f´(0) y f´(-1) si f(x)= x^2 +1 Interprete geométricamente

f(x) = x^2 + 1 dom f = $\Re$

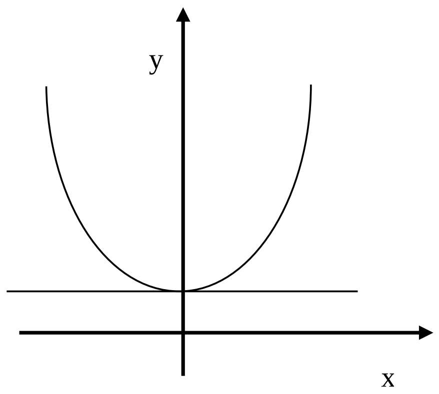
Recordar: f es una función polinómica, por lo tanto es **continua en todo su dominio**.

¿Existe f ' (0)?

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1-1}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0 \quad \Rightarrow \ f'(0) = 0$$. Es decir que **f es derivable en x = 0**.

f es derivable en x = -1.

<u>Geométricamente</u>: f '(0) = 0 significa que la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función f en el punto (0,f(0)) es igual a 0, es decir: **pendiente nula** $\Rightarrow$ **recta tangente horizontal en el punto (0, 1)**.



Recta tg horizontal en (0, 1)

¿Existe f ' (-1)?

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+1-2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -2 \quad \Rightarrow \ f'(-1) = -2 .$$

Es decir que f '(-1) = -2 significa que la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de f en el punto (-1,f(-1)) es igual a –2.

Ejemplo 2

Si la demanda de heladeras en una fábrica se expresa por la función D tal que D(p) = 100 – p^2 donde p indica el precio en cientos de pesos, calcula:

i) la tasa de variación media de la demanda cuando el precio pasa de \$600 a \$800.

ii) la variación instantánea para el precio de \$600.

Interpreta los resultados.

SOLUCIÓN:

i) $\frac{\Delta D(p)}{\Delta p} = \frac{D(8) - D(6)}{8 - 6} = \frac{36 - 64}{2} = -14$. Esto indica que la demanda disminuirá en 14 heladeras por cada incremento (aumento en este caso) de \$200 en el precio.

ii) La variación instantánea para p = 6 es D ' (6), es decir:

D ' (p) = 2 p $\Rightarrow$ D ' (6) = -12. O sea que para un mínimo aumento desde \$600, la disminución en la cantidad demandada será de 12 heladeras.

Ejemplo 3

(Ejercicio 3) d) de página 51 de la Guía de Trabajos Prácticos)

3) Halle la función derivada de cada una de las funciones definidas a continuación usando la definición. Dé dominio de la función y su derivada.

d) $\mathbf{g(x) = \sqrt{x+2}}$

dom g = [-2,∞)

La función derivada de g es:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+2} - \sqrt{x+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+2} - \sqrt{x+2}).(\sqrt{x+h+2} + \sqrt{x+2})}{h.(\sqrt{x+h+2} + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h+2-(x+2)}{h.(\sqrt{x+h+2} + \sqrt{x+2})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+2} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$\therefore$ **g ' (x) =** $\mathbf{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}$ **dom g ' = (-2, ∞) ; g ' (0) =** $\mathbf{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ **, $\nexists$ g′ (-2) ya que -2 $\notin$ dom g '**

Ejemplo 4

(Ejercicio 6) de página 51 de la Guía de Trabajos Prácticos)

6) La función de costo para cierto producto está expresada por:

C (x)= 40 + 4x + $\frac{\sqrt{x^2+1}}{10}$; con x igual a la cantidad de unidades producidas, x $\geq$0.Calcule el costo marginal cuando se producen 20 unidades.

$$\mathbf{C(x) = 40 + 4\,x + \frac{\sqrt{x^2+1}}{10}} \qquad \text{x = cantidad de unidades producidas, } x \geq 0.$$

El costo marginal es: $C'(x) = 4 + \frac{1}{10}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

Si $x = 20$: $C'(20) = 4 + \frac{2}{\sqrt{401}} \cong 4{,}01$

Esto significa que el costo extra para producir una unidad más a partir de la unidad nº 20 es aproximadamente de \$4,01.

Recuerda que los costos, ingresos y beneficios marginales coinciden aproximadamente, con el costo extra necesario para producir una unidad más y con el ingreso o beneficio extra al vender una unidad más.

Ejemplo 5

(Ejercicio 9) de página 52 de la Guía de Trabajos Prácticos)

9) Encuentre, si existen, las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función definida por $h(x) = \frac{x}{x+1}$ en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$.

$\mathbf{h(x)} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x+1}}$ dom h = $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ h es continua en su dominio.

Se pide la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de h en los puntos de abscisas x = 0 y x = 2.

$$h'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$ dom h' = dom h

Recta tangente en x = 0:

$h'(0) = 1 \Rightarrow$ la pendiente de la recta tangente vale 1.

El punto de la curva con el que estamos trabajando tiene abscisa x = 0. Entonces, ¿cuál es la ordenada? h(0) = 0

$\therefore$ el punto es (0,0). Entonces la **ecuación de la recta tangente** será: $y - 0 = 1\,(x - 0)$

$\therefore\ y = x$

Recta normal en x = 0:

La pendiente de la recta normal será. $m_n = -\frac{1}{m_{tg}} = -\frac{1}{h'(0)} = -1$. Entonces, como ya sabemos que la ordenada correspondiente es h(0) = 0, la **ecuación de la recta normal** será: $y - 0 = (-1)\,(x - 0)$

$\therefore\ y = -x$

Recta tangente en x = 2:

$h'(2) = \frac{1}{9} \Rightarrow$ la pendiente de la recta tangente vale 1/9.

Si $x = 2 \Rightarrow h(2) = \frac{2}{3}$

La **ecuación de la recta tangente** será: $y - \frac{2}{3} = \frac{1}{9}(x - 2)$

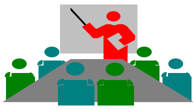
Recta normal en x = 2:

La pendiente de la recta normal será. $m_n = -\frac{1}{m_{tg}} = -\frac{1}{h'(2)} = -9$. Entonces, como ya sabemos que la ordenada correspondiente es $h(2) = \frac{2}{3}$, la **ecuación de la recta normal** será: $y - \frac{2}{3} = (-9)\,(x - 2)$

APRENDAMOS A JUSTIFICAR:

Si una proposición es **falsa**, debes dar un **contraejemplo** donde muestres que lo propuesto no se cumple, o bien resolviendo si se trata de un cálculo.

Si una proposición es **verdadera,** lo debes justificar con una **propiedad**, un **teorema**, una **definición**, o bien resolviendo si se trata de un cálculo.



PARA LA CLASE

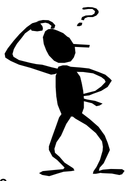
Resuelve:

1) Si $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, calcula si existe, $f'(-1)$. Interpreta geométricamente.

2) De la Guía de Trabajos Prácticos, resuelve los siguientes ejercicios:

Página 50	Ejercicios 2) d)
Página 51	Ejercicios 4) a) f) g)
Página 52	Ejercicios 7) ; 8) c) ; 12) ; 14)

Los **resultados de estos ejercicios** los encontrarás en las páginas 57 a 59 del Cuadernillo de Soluciones.



o

DESPUÉS DE LA CLASE PRÁCTICA

SUGERENCIA: Revisa detenidamente los ejercicios resueltos en la bibliografía básica en las páginas 185, 200 y 201.

EJERCITACIÓN SUGERIDA: de la Guía de Trabajos Prácticos, resuelve los ejercicios:

Página 50	Ejercicios 2) c)
Página 51	Ejercicios 4) h) i); 5) b)
Página 52	Ejercicios 10); 11)

Las **respuestas** las encontrarás en las páginas 57 a 59 del Cuadernillo de Soluciones.

Bibliografía

Bibliografía básica: Lezana, B. E. Introducción didáctica al Análisis Matemático, pág. 183 a 227.

Bibliografía de consulta:

- Arya, J. y Lardner, R. 1992. Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía, Prentice Hall, México.

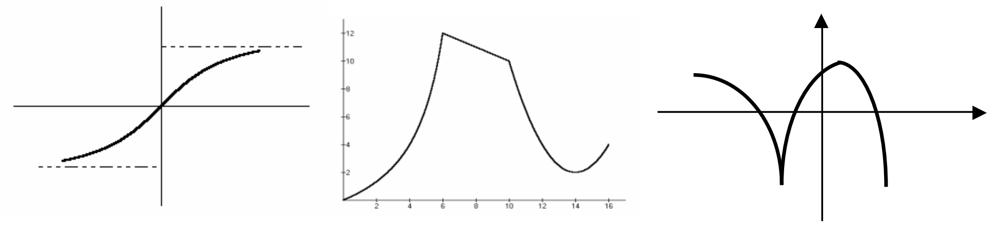
- Budnick, F. 1993. Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales, Mc. Graw Hill, México.
- Haussler, E. y Paul, R. 1997. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida. Prentice Hall Hispanoamericana, México.
- Larson, R., Hostetler, R. F. y Edwards, B. 1997. Cálculo y Geometría Analítica, Mc Graw Hill, México.
- Leithold, L. 1990. Cálculo con Geometría, Editorial Harla, México.
- Purcell, E., Varberg, D. Y Rigdon, S. 2001. Cálculo, Prentice Hall, México.
- Stein, S. 1992. Cálculo y Geometría Analítica, Mc. Graw Hill, México.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P.J. 1996. Matemáticas para el Análisis Económico, Prentice Hall, Madrid.

Bibliografía de trabajo básica:

Guía de Trabajos Prácticos de Introducción al Análisis Matemático preparada por el personal de la Cátedra (Unidad Nº 5)

EJERCITACIÓN SELECCIONADA DE LA GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS (Unidad 5)

- Teniendo en cuenta la definición de recta tangente, diga si las gráficas que se dan a continuación admiten recta tangente en los puntos indicados. Es derivable la función en dichos puntos? Explique.



- Para la función de costos C(q) = 0.2 q^2+1.2q+4 ¿Con que rapidez varía C con respecto a q cuando q=5?

- Para cierto fabricante los ingresos I que obtiene con la venta de x unidades de un producto están dados por: I(x) = 30 x – 0.3 x^2. ¿Con que rapidez varía I con respecto a x, cuando x = 10?

- La ecuación $p = \dfrac{108}{x+2} - 3$ representa la función demanda de un cierto producto donde p es el precio y x es el número de unidades. Determine la función ingreso marginal.

- Encuentre, si existen, las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función definida por h(x) = $\dfrac{x}{x+1}$ en los puntos de abscisa x = 0 y x = 2.

- Encuentre las coordenadas de los puntos en que la recta tangente a la gráfica de la función definida por f(x)= x^3 - 9x^2 + 36 x, tiene pendiente 9 .

- Determine las coordenadas de los puntos en que la recta normal a la curva de ecuación y = x^3 + 5 es:
  a) Perpendicular a la recta 12 x - y = 17
  b) Paralela a la recta x + 3y = 2

- Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función f definida por
  f (x) = $\dfrac{x^4}{4}$ -2x^2 +3x , perpendiculares a la recta de ecuación $-\dfrac{1}{3}x - y + 1 = 0$.

- Halle b y c para que la recta de ecuación y = x sea tangente a la gráfica de la función definida por:
  f (x) = x^2 + b x + c en el punto (1,1). Grafique.

- Halle los valores de las constantes a , b y c para que las gráficas de las funciones f y g definidas por $f(x) = ax^2 + x + 2b$ y $g(x) = cx^2$ tengan en el punto (1,1) rectas tangentes perpendiculares. Determine las ecuaciones de dichas rectas.

- ¿Es cierto que la gráfica de la función definida por $f(x)=\sqrt{x+1}$ admite recta tangente vertical en algún punto? Justifique.

AUTOEXAMEN DE LA UNIDAD Nº 5

1) ¿Qué diferencia hay entre la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea?

2) ¿De qué depende la existencia de la derivada de una función en un punto?

3) ¿Qué diferencia hay entre la función derivada y la derivada de la función en un punto?

4) Si la tangente a la gráfica de una función en un punto es paralela al eje horizontal, ¿cuánto vale la derivada de la función en ese punto?. ¿Y si es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante?.

5) ¿Puedes dar ejemplos (analíticos y gráficos) de funciones que sean continuas y no derivables en un punto?, ¿y que sean derivables y no continuas en un punto?.

6) ¿Cómo demostrarías las distintas reglas de derivación?.

7) Grafica funciones donde se observen los siguientes resultados: $f'(1)=0$; $f'(-2)=1$; $\nexists\ f'(3)$

8) ¿Puede haber varias funciones que tengan la misma derivada?. Ejemplifica.

9) Elabora un esquema que relacione los temas de continuidad y derivada.

10) Si $f(x) = |x-1|.\text{sen}(x-1)$ y $g(x) = e^{x+3}$

a) ¿Se puede aplicar el teorema sobre la derivada de un producto de funciones para calcular

D [f.g](1), si existe?. Justifica tu respuesta.

b) Calcula, si existe, la derivada mencionada en la parte a).

11) Si $f(x) = \ln(x+2)$, ¿se puede aplicar el teorema sobre derivadas de funciones inversas para calcular $D f^{-1}(0)$?. Justifica tu respuesta.

12) El costo de fabricación de x calculadoras viene dado por la expresión:

$C(x) = 1000 + x + 10\,x^{1/2}$ pesos.

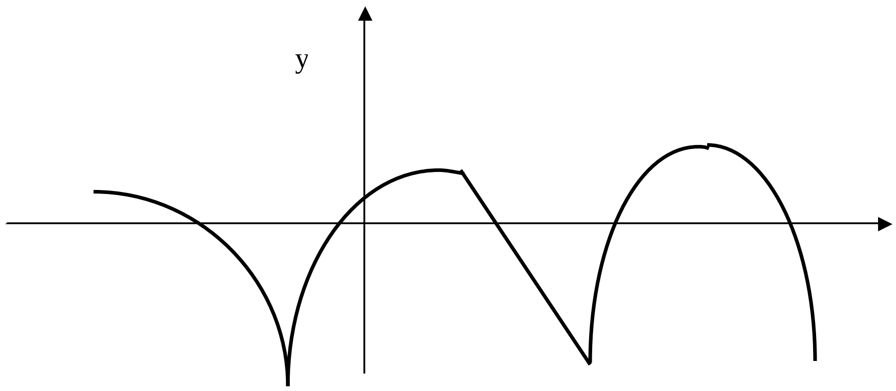
a) Encuentra la expresión para el costo marginal.

b) ¿Cuál es el costo aproximado de fabricar la unidad nº 101?

13) Calcula la derivada indicada en cada caso:

a) f (x) = $f(x) = x^{\ln x} + \text{sen}\,x^x - e^{-2x}$; $f'(x)$ b) $(x+y)^2 - \sqrt{2xy} + x^y = 0$; $D_x y$

14) Traza la recta tangente a la gráfica de la siguiente función, si existe, en los puntos indicados. ¿Existe la derivada de la función en esos puntos? Explica.



ANEXO Nº 2

METODOLOGÍA PARA APRENDER A AUTOEVALUARSE

La autoevaluación consta de las siguientes fases:
Fase 1: ¿Qué aspectos del tema necesito aclarar?
Fase 2: ¿Cuáles han sido mis impresiones sobre los contenidos y desarrollo de las actividades de este tema?

Es importante que puedas responder estas preguntas:
¿Cuáles son los conceptos más importantes que se han trabajado en esta unidad?.
¿Qué conceptos no han quedado suficientemente claros?.
¿Qué actividades y recursos han sido los más adecuados y útiles para el aprendizaje y cuáles no lo han sido?.
¿Qué puedo hacer o proponer para superar las dificultades que tuve en esta unidad?.

1.- Haz un listado de todos los conceptos, procedimientos y actitudes que fueron necesarios para resolver el autoexamen, incluyendo aquellos que no dominabas.
2.- Analiza qué porcentaje representa cada conocimiento del total de la lista que confeccionaste. No te califiques por puntuación sino por % de conocimientos aplicados correctamente, según la siguiente escala:

Escala de calificación:

0% a 39% Mal **40% a 59% Regular** **60% a 69% Bien**
70% a 89% Muy bien **90% o más Excelente**

Consulta la escala de calificación al finalizar tu trabajo, para que verifiques cuál es tu nivel de asimilación de esta unidad.

GUÍA DE AUTOEVALUACIÓN

Haz un listado de todos los conceptos, procedimientos y actitudes que fueron necesarios para resolver el Autoexamen, incluyendo aquellos que no dominabas.

CONCEPTOS:

PROCEDIMIENTOS:

ACTITUDES: (ejemplo: responsabilidad, dedicación, esfuerzo, hizo o no comprobación, persistencia en el trabajo, etc.)

TOTAL DE ASPECTOS DEL LISTADO:

% QUE REPRESENTA CADA ASPECTO: (ejemplo: si listaste 20 aspectos, cada uno de ellos representará el 5%, de modo que cubras el 100%)

% OBTENIDO: **Calificación obtenida: ....**

Lic. Carolina Ramos

Licenciada en Matemática. UNT. 1994
En desarrollo tesis del Magister en Enseñanza de la Matemática en el NIvel Superior. UNT.
Integrante del Proyecto de Investigación “Evaluación y reformulación del diseño curricular de Matemática en carreras de ciencias Económicas”
Docente del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas. UNT.
Docente del Profesorado de Matemática del Instituto Enseñanza Superior Lola Mora.
Publicaciones de Libros: 1.
Publicaciones en Revistas con referato: 4.
Comunicaciones en Congresos: 10