MODELIZACIÓN DE LA OPINIÓN DEL EXPERTO EN UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA AUDITORÍA*

F. J. Vázquez Polo
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

A. Hernández Bastida
Universidad de Granada

En este trabajo se da una visión de las posibilidades del análisis bayesiano para aprovechar, modelizando convenientemente, la opinión del auditor. Además advierte la necesidad de completar el estudio con un análisis de la sensibilidad del modelo que se obtenga en cada caso. Siguiendo los argumentos presentados se realiza dicho análisis que servirá de ayuda al auditor en su decisión final.

Palabras clave: densidad a priori, densidad a posteriori, clases de densidades conjugadas, tasa de error, cuantiles a priori.

1. INTRODUCCIÓN

Es muy frecuente en auditoría encontrarnos con preguntas como, ¿qué proporción de elementos de una población contable posee un determinado atributo? (apuntes con error en un muestreo de atributos, por ejemplo), ¿cuál es la proporción de items que no cumple con un determinado procedimiento? (en tests de cumplimiento) o ¿cuál es el error total en una cuenta de balance? (en tests sustantivos). Todas ellas tienen un punto de partida común: en todas el auditor posee juicios (subjetivos) defendibles sobre esa proporción (o tasa de error) y en todas estas situaciones el auditor revisará una parte (muestra) de la población contable. En algunos de esos elementos muestreados se presentará la característica y en otros no.

(*) Este trabajo ha sido realizado con el apoyo financiero del proyecto PB91-0952 de la DGICYT. El orden de los autores es arbitrario. Los autores agradecen los comentarios de dos evaluadores anónimos.

Es el trabajo de búsqueda, acumulación y producción de información el que permitirá al auditor (o auditores) pronunciarse sobre el estado financiero objeto de análisis. La seriedad con que se apliquen los procedimientos y sistemas de control interno influirán directamente en la seguridad que sobre la evidencia interna se formará en el auditor. El control interno se hace tanto más necesario cuanto más grande, compleja y descentralizada sea la empresa (Almela, *1988a, 1988b;* Suárez, *1991).*

Situado el entorno de trabajo del auditor, parece evidente que éste (siempre que no necesite exhaustividad en su investigación) necesitará de ciertas técnicas que le permitan reducir los costes monetarios y de tiempo que necesitará para su trabajo[1]. Estamos hablando pues, de las *técnicas estadísticas* de muestreo e inferencia aplicadas a la Auditoría Contable (A. C., en adelante).

Como todo muestreo de una población éste va dirigido a la estimación de alguna característica de la población sometida a estudio.

Lo representativa que resulte una muestra será tanto mayor cuanto menor sea el error cometido en el proceso de estimación (una de las principales ventajas de la utilización de las técnicas estadísticas es que permite conocer con exactitud este error). Es claro, que la precisión sobre la población será mayor, ceteris paribus, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, pero esto conlleva un mayor coste. Es, por tanto, un problema de equilibrio entre el coste y la precisión que se desee en cada caso.

La selección de la muestra debe de ser hecha solamente después de que el auditor establezca unos objetivos específicos, principalmente, sobre la cantidad total de unidades monetarias con error o sobre la tasa de error.

Excelentes trabajos sobre metodología estadística en A. C. son Arens y Loebbecke (1981), Roberts (1978) y Hill, Roth y Arkin (1979), entre otros.

Principalmente los métodos de muestreo más utilizados en la práctica de la auditoría son: muestreo mediante tablas de números aleatorios (informatizadas o no), muestreo sistemático, muestreo estratificado y muestreo por unidades monetarias.

Con respecto a la metodología estadística clásica utilizada para evaluar los resultados se han publicado una gran cantidad de trabajos considerando distintos procedimientos. Únicamente a título de breve orientación algunos de ellos son:

Stringer (1963) desarrolla una cota para errores de sobrevaloración que fue pionera en el sentido de argumentar sobre los peligros de utilizar estimadores usuales en muestreo cuando no se encuentran errores en la muestra.

Fienberg, Neter y Leitch (1977), Neter, Leitch y Fienberg (1978) consideran la cota multinomial para errores de sobrevaloración, subvaloración o ambos. Esta cota es modificada parcialmente en Leitch, Neter, Plante y Sinha

(1) Desde luego resultaría muy difícil, por el tiempo que requeriría o el coste que ello supondría, analizar uno por uno todos los documentos y todas las transacciones de la empresa con incidencia contable.

(1982). Dworin y Grimlund (1984, 1986) construyen la cota de los momentos y la comparan con la cota multinomial.

Frosts y Tamura (1982, 1986) examinan para los estimadores de razón y diferencia la fiabilidad de la estimación por intervalos.

En este trabajo se considera una metodología estadística diferente, la conocida como *metodología bayesiana* en la que el auditor utiliza, entre otras cosas, la evidencia muestral para modificar esas creencias iniciales que posee sobre, por ejemplo, la tasa de error del sistema.

El trabajo se ha organizado de la siguiente manera: en la sección 1 intentamos motivar con un ejemplo (rescatado de Kraft, 1968) la necesidad y utilización de las técnicas bayesianas en A. C. En la sección 3 se estudian los elementos principales en un análisis de este tipo y se dan clases óptimas para la modelización de las creencias a priori (iniciales) que todo auditor posee. En la sección 4 se analizan cómo pueden estudiarse las posibles dificultades que el auditor encontrará, con toda seguridad, en su proceso de asignación de sus creencias a priori. En la sección 5 se finaliza el trabajo con las conclusiones más relevantes que pueden extraerse.

2. MOTIVACIÓN E ILUSTRACIONES SOBRE EL USO DE MÉTODOS BAYESIANOS EN AUDITORÍA CONTABLE

El uso del análisis estadístico, en general, y del muestreo estadístico, en particular, ha sido el objeto de muchos trabajos que han alejado cualquier duda sobre el hecho de que es una técnica de A. C. efectiva. No obstante dado que el tamaño muestral varía con la seguridad que el auditor desea obtener de la muestra, el auditor que usa muestreo estadístico pronto descubre que se requieren tamaños muestrales muy grandes para alcanzar intervalos de confianza aceptables, así como niveles de fiabilidad altos. La situación se hace especialmente frustante cuando el auditor tiene grandes esperanzas de que no existe en el sistema o contabilidad que está revisando un error serio o significativo. En esta situación es difícil para el auditor racionalizar los beneficios de extraer una muestra. De hecho, el auditor puede pensar que realiza un muestreo más para satisfacer criterios estadísticos que para la evaluación de la A. C.

La cuestión es que el análisis estadístico aplicado a problemas de A. C. requiere un tipo subjetivo de evaluación. Usualmente, en A. C., la muestra no es la única fuente de información del auditor. De hecho, algunas veces, la muestra pretende probar o desaprobar opiniones desarrolladas a partir de otras fuentes de información (la seriedad con que se apliquen los procedimientos y sistemas de control interno influirán directamente en la seguridad que sobre la evidencia interna se formará en el auditor). Estas otras fuentes de información deben tener influencia sobre el análisis estadístico.

Ya en 1968, Kraft presentó una ilustración en la que el auditor podía combinar objetivamente su confianza subjetiva con la confianza de la encuesta para obtener una afirmación global sobre el sistema o contabilidad que está auditando.

Planteamiento: supongamos que se desea examinar un inventario. Baśandose en auditorías anteriores y en la revisión de los sistemas de control interno de la compañía, el auditor tiene un alto grado de confianza en el sistema.

El auditor no espera que ocurran errores que tengan un efecto significativo sobre el valor en dólares del inventario[2]. Además, espera que cualquier error que ocurra no exceda al 2% del total. El auditor proyecta tomar una muestra de cien documentos. Pretende contrastar los items muestreados para admitir los métodos de control interno de la compañía y evaluar cualquier error que ocurra para ver su posible repercusión en dólares. El auditor descubre en la muestra un sólo error.

Es claro que el auditor puede pensar en cambiar sus creencias (subjetivas) iniciales a la vista de la evidencia muestral obtenida, para determinar su confianza global sobre la precisión del sistema. Un enfoque bayesiano le permite desarrollar esta idea, como veremos a continuación.

Para comenzar debe cuantificar su confianza inicial o a priori sobre el sistema. Para ello, un auditor, probablemente se encuentre más cómodo aproximando el problema desde el punto de vista de la «verosimilitud acumulada», es decir, se creerá mucho más capaz de expresar la verosimilitud de que la tasa de error no sea mayor que el 2% (o el 5%), que de expresar la verosimilitud de que la tasa de error sea exactamente el 2% (o el 5%). Pongamos que el auditor usa el siguiente razonamiento: se posee mucha confianza en que la tasa actual de error no es mayor que el 2%. Por lo tanto, 2% será el punto a partir del cual se establecerán todas las probabilidades. En un primer paso, el auditor asigna una probabilidad acumulada del 95% a la tasa de error del 2%. Ahora el próximo paso es distribuir las probabilidades por debajo y por encima del 2% (*«intervalos de materialidad»*). Las probabilidades acumuladas determinadas por el auditor pueden verse en el cuadro 1.

Cuadro 1
PROBABILIDADES ACUMULADAS

Tasas posibles de error en sistema	Probabilidad acumulada original subjetiva	Probabilidad subjetiva original
0,001	0,60	0,60
0,01	0,90	0,30
0,02	0,95	0,05
0,03	0,98	0,03
0,04	0,99	0,01
0,05	1,00	0,01
		1,00

Se han restringido en seis las posibles tasas de error en el sistema, admitiendo que ésta es una buena aproximación de la realidad. Es evidentemente muy difícil, si no imposible, para el auditor distinguir entre, por ejemplo, tasas de error del 2,4% o del 2,5%. Por lo tanto, la elección de tasas de error se ha realizado usando la capacidad del auditor para efectuar distinciones significativas entre las probabilidades de ocurrencia de las sucesivas tasas de error.

(2) Tomamos como unidad monetaria el dólar siguiendo el modelo de Kraft.

El próximo paso es calcular las probabilidades condicionadas (conocidas como verosimilitudes) que resultan de la muestra. Es decir, deseamos dar respuesta a cuestiones del tipo: ¿cuál es la probabilidad de extraer una muestra de cien items que contiene un error si la tasa actual de error en el sistema es el 2%?. Los resultados se dan en el cuadro 2.

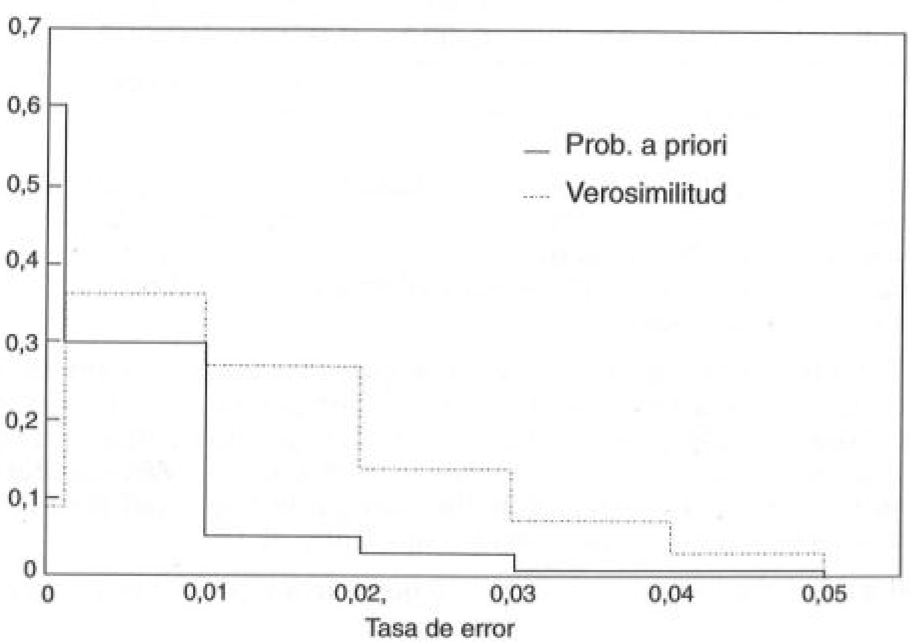
Cuadro 2
VEROSIMILITUD $\approx e^{-n\cdot p}\cdot(n\cdot p)$

Tamaño muestral	Tasas de error posibles	Tamaño muestral · Tasa de error	Probabilidad de un error
100	0,001	0,1	0,09
100	0,01	1	0,36
100	0,02	2	0,27
100	0,03	3	0,14
100	0,04	4	0,07
100	0,05	5	0,03

En el cuadro 2 la tercera columna se utiliza para aproximar una Binomial de parámetros $n=100$ y p, en notación *Bin (n,p)* por una Poisson con su misma media ($n\cdot p$, en notación $P(n\cdot p)$. La utilización de esta aproximación es muy común, incluso en técnicas de muestreo (Baró, 1986) en las que aquí no entraremos). Siendo los valores de la última columna obtenidos directamente de las tablas de una Poisson con esas medias.

En el gráfico 1 puede observarse la asignación inicial (probabilidades a priori) y la verosimilitud para este caso.

Gráfico 1
PROBABILIDADES A PRIORI Y VEROSIMILITUD



Para explorar cómo influye la evidencia muestral sobre sus creencias iniciales (tasas de error a priori o probabilidades a priori) el auditor puede utilizar el Teorema de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}$$

P(A/B) es la probabilidad del suceso *A* dado *B* (juicio a posteriori o final), *P(A)* es el juicio inicial, antes de que ocurra *B*, y *P(B/A)* es la verosimilitud que tiene *B* dado *A*. Es habitual que el teorema de Bayes se recuerde más fácilmente como:

$$\text{posteriori} \propto \text{priori} \times \text{verosimilitud}$$

donde el símbolo $\propto$ indica proporcionalidad. Este factor de proporcionalidad se calcula haciendo que las probabilidades (a posteriori) sumen uno.

Así pues, el siguiente paso consiste en combinar estas dos medidas de probabilidad (probabilidad a priori y verosimilitud) en una afirmación de la confianza del auditor en el sistema. El cuadro 3 nos muestra este comentario.

Cuadro 3
PROBABILIDADES A POSTERIORI

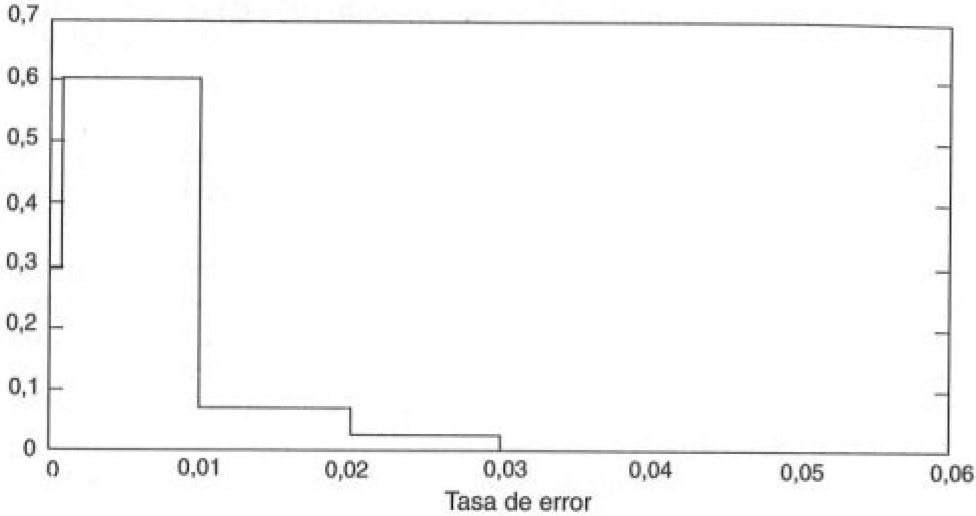
Tasas posibles de error	Prob. subjetiva original	Veros.	Probabil. conjunta	Probab. a posteriori	Acum.
0,001	0,60	0,090	0,0540	0,294	0,294
0,01	0,30	0,368	0,1104	0,602	0,896
0,02	0,05	0,271	0,0136	0,074	0,970
0,03	0,03	0,149	0,0045	0,024	0,994
0,04	0,01	0,074	0,0007	0,004	0,998
0,05	0,01	0,033	0,0003	0,002	1,000
	1,00		0,1835	1,000	

Observemos que los elementos de la cuarta columna no son más que los productos de los elementos de la segunda y tercera columnas. Los elementos de la quinta columna han sido obtenidos realizando el cociente de cada elemento de la cuarta con la suma de las probabilidades conjuntas (0,1835). La interpretación es la siguiente:

Es evidente que la «forma» de las creencias iniciales del auditor han cambiado con la evidencia empírica obtenida. Si bien prácticamente sigue estando acumulada en tasas de error inferiores al 1% sí que ha sufrido un desplazamiento muy acentuado hacia tasas entre el 0,1% y el 1%. Más concretamente, una vez realizada la revisión el auditor tiene una seguridad del 89,6% de que la tasa actual de error es menor o igual que el 1%.

En el gráfico 2 puede verse el cambio que han sufrido las creencias iniciales del auditor.

Gráfico 2
PROBABILIDADES A POSTERIORI



El cuadro 4 muestra las probabilidades a posteriori para los casos de haber encontrado $m=0$, 1 ó 2 errores en la muestra de tamaño cien (los cálculos son análogos a los anteriores).

Cuadro 4
PROBABILIDADES A POSTERIORI PARA VARIOS ERRORES (*m*)

Tasas posibles de error	Probabilid. subjetiva original acumulada	Prob. finales $m=0$	Prob. finales $m=1$	Prob. finales $m=2$
0,001	0,60	0,820	0,294	0,034
0,01	0,90	0,987	0,896	0,720
0,02	0,95	0,997	0,970	0,888
0,03	0,98	1,000	0,994	0,971
0,04	0,99	1,000	0,998	0,990
0,05	1,00	1,000	1,000	1,000

La influencia del dato observado en la muestra queda de manifiesto en las distintas distribuciones a posteriori.

El razonamiento bajo una metodología clásica sería:

Consideremos la seguridad sobre la tasa del 2% que tenía el auditor y suponemos que en una muestra de tamaño cien ha descubierto un error. Si buscamos en una tabla Poisson acumulada, con parámetro $2(=100\times 0{,}02)$, se obtiene que la probabilidad de a lo sumo un error es 0,406. Esto significa que si la tasa de error de un 2% es cierta, solamente el 40,6% de las veces la muestra contendrá a lo sumo un error. Más frecuentemente, el 59,4% de la muestra contendrá dos o más de dos errores. Por tanto, el auditor puede tener una confianza del 59,4% de que la hipótesis de que la tasa de error es del 2% es falsa. Es decir, puede tener una seguridad del 59% de que la tasa de error es menor que el 2%. No obstante, si el auditor tenía gran seguridad de que la tasa de error era menor del 2%, parecería lógico que una muestra de tamaño cien con un sólo error debería dar una seguridad mayor del 59%. En la práctica, el auditor instintivamente creerá en más de un 59%. Observemos, a modo de comparación, que para alcanzar una confianza del 97%, el auditor tendría que observar una muestra de tamaño casi trescientos (con sólo un error).

En definitiva, en este ejemplo, se observa la sensible disminución del tamaño muestral obtenida por la aplicación de la metodología bayesiana (en este caso).

Es más, incluso el auditor podría plantearse la posibilidad de obtener más información muestral. En tal caso las creencias a posteriori obtenidas anteriormente se transformarían en iniciales (a priori) en esta nueva fase. Un criterio habitual para determinar si se tienen suficientes evidencias consiste en comparar unos «rangos aceptables» (intervalos de materialidad) con el área bajo las curvas de creencia.

Respecto a la posibilidad de una confianza a priori excesiva, obsérvese en el cuadro los pronunciados decrecimientos en las probabilidades a posteriori cuando aumenta el número de errores en la muestra.

3. Propuesta del análisis bayesiano

En este epígrafe se realiza un breve repaso a los elementos fundamentales de un problema de decisión estadística bayesiana en el marco de la auditoría contable.

La formación de juicios (subjetivos) plausibles para la tasa (proporción) de error en una población contable es un problema importante en A. C. (tests sustantivos, tests de cumplimiento, muestreo de atributos, etc...). Si bien en el epígrafe anterior se suponía, por simplificación, una distribución discreta para dicha tasa es obvio que un enfoque más realista se corresponde con aquel que considera una distribución continua para tal tasa de error, que notaremos por ϕ $(0 \leq \phi \leq 1)$.

A la vista de lo anterior, si el auditor adopta una metodología bayesiana estricta procederá de la siguiente forma:

De acuerdo con sus creencias subjetivas iniciales el auditor asignará una función de probabilidad (densidad) a priori que contenga todas sus creencias sobre la tasa de error (ϕ) e incorporará la evidencia empírica proporcionada por la muestra para así revisar sus creencias iniciales mediante una densidad a posteriori obtenida vía teorema de Bayes, en la que el auditor debe basar sus determinaciones finales.

La función de probabilidad a priori se supone que captura una percepción del decisor individual sobre algún parámetro incierto. Esto ocurre cuando el auditor entrenado cree que la distribución que resulta es un buen resumen de sus creencias. Es decir, una especificación satisfactoria de la función de probabilidad a priori será la que resulta cuando el auditor, después de un entrenamiento, cree que la distribución resultante es un buen resumen de su evidencia cualitativa. Por tanto un buen método de especificación será aquel en el que un auditor entrenado tiene confianza.

Como fácilmente se deduce, *la habilidad para especificar probabilidades a priori es, en gran parte, una destreza adquirida.*

Winkler (1967) ha estudiado medios de especificar distribuciones a priori. Su estudio evalúa cuatro técnicas de especificarlas para el caso del proceso de Bernouilli. Winkler describe la experimentación de sus cuatro métodos en la Universidad de Chicago.

Corless (1972) publicó un experimento en el cual se pedía a los auditores que expresaran sus distribuciones de probabilidad a priori. En este experimento a los sujetos se les pedía que especificaran su distribución a priori sobre un caso hipotético usando dos métodos. Primeramente, usan el *método de especificar cuartiles* sobre su distribución a priori de la tasa de error en procedimientos de control interno. Este método es un método CDF (especificación de puntos de la función de distribución) en la clasificación de Winkler. El autor entonces ajustó una distribución beta a los resultados. Los sujetos también generan una distribución a priori discreta usando el *método del intervalo fijo* que es comparable a la aproximación PDF (especificación de puntos de la función de densidad) de Winkler.

La determinación de una distribución de probabilidad subjetiva que refleje adecuadamente las creencias del decisor depende fuertemente de los métodos desarrollados en la literatura psicológica (ver Chesley, 1975 y Slovic et al, 1977). Se han propuesto diferentes técnicas de especificación que pueden dar diferentes distribuciones y la literatura no da respuesta a la pregunta de qué técnica es la mejor. Además, se han realizado estudios empíricos para comparar técnicas que no han identificado una jerarquía de los métodos o una aproximación para seleccionar una técnica en una situación de decisión dada.

En el caso de estudios de especificación de probabilidades, usando a los auditores, los resultados son inconcluyentes. Hemos descrito antes y de manera muy somera el trabajo de Corless (1972), en donde se encuentra una notable diversidad entre distribuciones a priori especificadas por cada uno de los dos métodos. Félix (1976) comparó las técnicas de la muestra a priori equivalente y la de la función de distribución y encontró diferencias más pequeñas que Corless. Crosby (1980) examinó los efectos de usar diferentes técnicas de especificación sobre alguna de las decisiones siguientes en auditoría, tal como el tamaño muestral en muestreo de atributos. Encontrando diferencias en los tamaños muestrales si la distribución a priori especificada se usa en un modelo bayesiano.

Obsérvese que el trabajo de Crosby (1980) es muy interesante en el sentido de que más que preocuparnos por las diferencias entre las distribuciones especificadas vamos a preocuparnos por las consecuencias de usar diferentes distribuciones.

De todo lo anterior se pueden extraer algunas ideas muy generales que para nuestro propósito actual serán suficientes:

— Existen varias técnicas de especificación de distribuciones a priori que pueden dar lugar a distintas distribuciones.

— Algunas de esas técnicas están particularmente bien adaptadas al ambiente de la Auditoría.

— Un entrenamiento adecuado de los auditores parece disminuir las diferencias entre las distribuciones obtenidas por distintas técnicas.

Desarrollemos aquí uno de los métodos más usuales para seleccionar una densidad a priori para ϕ.

Pensemos por un momento en la información que el auditor obtiene de la muestra. Si en una muestra de tamaño n aparecen m errores la verosimilitud viene dada por:

(1) $$l(\phi) \propto \phi^{m} \cdot (1-\phi)^{n-m}$$

y como la densidad a posteriori es:

(2) $$\text{posterior} \propto \text{priori} \times \text{verosimilitud}$$

si el auditor pudiese modelar sus creencias iniciales (a priori) mediante una densidad de este «tipo» obtendríamos una densidad a posteriori dentro de la misma clase o familia (formalmente, esta propiedad de ser cerrada bajo el muestreo recibe el nombre de *familias conjugadas*).

Es decir, buscamos clases de densidades que sean atractivas desde varios puntos de vista: fáciles de tratar analíticamente, fáciles de programar e interpretar, etc.

Afortunadamente, tenemos una clase cerrada para el muestreo binomial y que además es especialmente atractiva en ambiente de auditoría. La familia de densidades Beta:

$$\{B(\alpha,\beta) \,/\, \alpha,\beta > 0\}$$

Las densidades de esta clase son del tipo:

(3) $$f(\phi) \propto \phi^{\alpha-1} \cdot (1-\phi)^{\beta-1}, \quad 0 \leq \phi \leq 1$$

Esta clase es lo suficientemente grande como para ser capaz de recoger las creencias del auditor. Es más, puede tomar formas totalmente distintas variando oportunamente los parámetros α y β. De hecho cuando $\alpha = \beta = 1$, tenemos el caso de una densidad *Unif* (0,1) (este caso se presenta cuando el auditor está poco dispuesto a cuantificar sus creencias o simplemente desea dar toda la relevancia posible a la muestra, suele conocerse como una situación de *información a priori difusa*). Cuando $\alpha = 1$ y β (>1) se hace crecer resulta una densidad concentrada a la izquierda con forma triangular con arista curvada de forma exponencial. Corresponde a situaciones en las que el auditor otorga mucho peso a pequeñas proporciones.

Medidas de interés de estas densidades son:

$$\textit{media} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \textit{varianza} = \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^2 \cdot (\alpha+\beta+1)},$$

$$\textit{moda} = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}, \quad (\text{si } \alpha > 1 \text{ y } \alpha+\beta > 2),$$

$$\textit{mediana} = \frac{\alpha \cdot (3\alpha-5) + \beta \cdot (3\alpha-1)}{3 \cdot (\alpha+\beta) \cdot (\alpha+\beta-2)}$$

Un estudio detallado de esta clase puede verse en Steele (1992) y mucho más en profundidad en Kendall y Stuart (1976).

Ahora de (1), (2) y (3) resulta que la densidad a posteriori de la tasa de error será:

$$(4) \qquad f(\phi/n,m) \propto \phi^{\alpha+m-1} \cdot (1-\phi)^{n-m+\beta-1}, \; 0 \leq \phi \leq 1$$

es decir, las creencias a posteriori del auditor corresponden a una distribución beta con parámetros $\alpha+m$ y $n+\beta-m$ (obsérvese cómo la observación muestral modifica las creencias iniciales. Además a diferencia con una metodología clásica, la no aparición de errores en la muestra no influye para nada en el modelo).

Adoptando una densidad Beta[3] el auditor tiene herramientas matemáticas para calcular sus parámetros de acuerdo con sus creencias. Principalmente asignando los valores de sus fractiles a priori (usualmente, cuartiles) o en algunas medidas que resulten fáciles de especificar por el auditor y con ellos encontrar numéricamente su relación con los parámetros de una Beta. Los trabajos de Blocher y Robertson (1976) y Steele (1992) son excelentes referencias en este sentido.

4. Un nuevo enfoque

Anteriormente hemos visto como el auditor puede encontrar dificultades para poder expresar una determinada densidad a priori (continua o discreta) sobre los parámetros de interés en auditoría.

Mucho más concreto, a ningún auditor que utilice una metodología bayesiana escapa que su asignación de densidad a priori para la tasa de error, por ejemplo, no puede ser dada de manera exacta y que a lo sumo (y después de un proceso bastante laborioso) podrá obtener una buena representación de sus creencias a priori.

Inmediatamente, el auditor puede (y debe) plantearse las siguientes cuestiones: ¿qué ocurrirá con las cantidades calculadas para la (verdadera) densidad a priori[4]?, ¿tomaré una decisión correcta si utilizo mis creencias a priori?, ¿habrá una diferencia significativa si se toma otra densidad *próxima*?

La manera de proceder sería: es claro que el auditor no conoce una única densidad a priori, sino que tiene unas creencias a priori que bien pueden definir una clase de todas las densidades a priori compatibles con esas creencias.

Sobre esa clase el auditor debe calcular las cantidades de interés para cada uno de los elementos y luego comprobar si existe mucha diferencia entre esas cantidades (dicha diferencia puede ser medida por el extremo inferior y el superior de las cantidades sobre la clase: medida que suele denominarse *rango de variación*). Cuando la diferencia es grande el auditor deberá tomar muchas precauciones en sus decisiones finales puesto que densidades muy *parecidas*

(3) La adopción de una distribución a priori Beta para ϕ es muy utilizada por los auditores que usan las técnicas bayesianas. Los trabajos de Félix y Grimlund (1977), Cox y Snell (1979) o Godfrey y Neter (1984) pueden convencernos de ello.

(4) Densidad que debe de ser muy parecida a la asignada. La idea de proximidad entre densidades no será tratada aquí.

no producen cantidades próximas. Suele decirse que en el modelo se ha detectado una falta de *robustez*. Cuando la diferencia sea pequeña el auditor tiene cierta seguridad de que sus decisiones no serán sustancialmente peores con un elemento u otro de la clase. Se dice entonces, que el modelo es *robusto*.

Para ilustrar las ideas anteriores, volvamos al ejemplo de la sección 2 para estudiar cómo podemos incorporar esas consideraciones. En el cuadro 1 veíamos como el auditor consideraba sólo cinco valores para la tasa de error del sistema auditado (ϕ), ya que tenía serias dificultades para determinar la distribución a priori sobre valores exactos de ϕ. Es evidente que el parámetro ϕ podrá variar en todo el intervalo [0, 1], esto implica que deben considerarse densidades a priori definidas en dicho intervalo.

Podemos por tanto considerar las probabilidades acumuladas y suponer que en realidad el auditor asigna las probabilidades de cada subintervalo definido por las tasas puntuales de error dadas. La información puede tabularse como muestra el cuadro 5.

Cuadro 5
CUANTILES A PRIORI

i	Intervalos T_i	Prob. a priori p_i
1	0−0,001	0,60
2	0,001−0,01	0,30
3	0,01−0,02	0,05
4	0,02−0,03	0,03
5	0,03−0,04	0,01
6	0,04−1,00	0,01
		1,00

Esto hace que el espacio paramétrico haya sido dividido en una partición:

$$[0,\ 1] = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k (k=6)$$

con conocimiento a priori: $pi = Prob\{\phi \in T_i\}$ $(i=1,\ldots,k)$

En el ejemplo original se desarrollaba un análisis bayesiano para la *«única»* distribución de probabilidad a priori que definen las p_i's. Ahora (y sin imponer ninguna restricción de forma como simetría, unimodalidad,... que a veces aparecen en A. C.) tenemos toda una clase de posibles densidades a priori: todas las densidades que posean esas probabilidades en esos intervalos (es decir, todas las densidades con esos cuantiles), llamémosla Γ.

Obtenida una muestra de tamaño n en la que aparecen m errores, el auditor está interesado en calcular las probabilidades a posteriori de cada intervalo T_i $(i=1,\ldots,k)$:

$$p_i(m) = Prob\{\phi \in T_i \mid m\} = \int_{T_i} g(\phi \mid m) \cdot d\phi$$

donde $g(\phi \mid m) \propto l(m \mid \phi) \cdot g(\phi)$ es la densidad a posteriori, siendo $l(m \mid \phi)$ la verosimilitud de m dado ϕ (Binomial de parámetros: n y ϕ); ya que ello le debe dar una idea del comportamiento de sus asignaciones de cuantiles a priori frente a la observación muestral.

El auditor puede medir la variación de estas probabilidades con:

$$u_i(m)=\sup_{g\in\Gamma} p_i(m) \quad (i=1,\dots,k),$$

$$l_i(m)=\inf_{g\in\Gamma} p_i(m) \quad (i=1,\dots,k)$$

En cada intervalo $T_i (i=1,\dots,k)$ y para una observación muestral determinada, el auditor observa el superior y el inferior de estas probabilidades a posteriori:

$$(l_i(m),\ u_i(m))$$

y decide sobre la robustez de ese cuantil. La metodología y el desarrollo de los resultados técnicos que permiten resolver estas cuestiones están elaborados en Vázquez-Polo (1992) y de manera muy resumida en el apéndice final. En el cuadro 6 se recogen los resultados que se obtienen en el ejemplo anterior para diferentes situaciones muestrales.

Cuadro 6
RANGOS ($n=100$)

Resultado muestral (m)	i	Inferior $l_i(m)$	Superior $u_i(m)$	Longitud
$m=0$	1	0	0,836	0,836
	2	0,15	0,97	0,82
	3	0,007	0,14	0,133
	4	0,001	0,033	0,032
	5	0,0002	0,004	0,0038
	6	0	0,001	0,001
$m=1$	1	0	0,5961	0,5961
	2	0,2463	0,9200	0,6737
	3	0,0251	0,3641	0,3390
	4	0,0232	0,2004	0,1772
	5	0,0036	0,0391	0,0355
	6	0	0,0187	0,0187
$m=5$	1	0	0,000	—
	2	0,0000	0,3580	0,3580
	3	0,0200	0,5555	0,5355
	4	0,1495	0,8591	0,7096
	5	0,0463	0,5989	0,5526
	6	0	0,5057	0,5057

En su asignación inicial el auditor consideraba una densidad muy concentrada a la izquierda, en concreto una masa de 0,95 para una tasa menor del 2%, (Prob $\{\phi \leqslant 0{,}02\}=0{,}95$) y el resto 0,05 lo repartía en (0,02, 1].

Si observamos el caso $m=0$, podemos deducir lo siguiente:

La densidad a priori se comporta muy satisfactoriamente cuando $m=0$, ya que en el mayor de los casos la probabilidad que se concentra en (0,02, 1] (observados cero errores en la muestra) es 0,033+0,004+0,001=0,038, o sea, el 0,05 baja hasta 0,038. Además en el resto parece que las densidades tienen un comportamiento muy parecido al inicial.

Cuando el número de errores es anormalmente alto con respecto a las creencias a priori (por ejemplo, $m=5$), la asignación empieza a mostrar una fuerte sensibilidad, la falta de robustez se hace patente. Observemos como T_1 pierde toda su probabilidad (y se le asignaba 0,60) y T_4 y T_5 que tenían 0,1 pasan a tener mínimos de: $l_4(5)=0{,}1495$ y $l_5(5)=0{,}0463$. Además las longitudes de todos los intervalos son altas, lo cual muestra que la asignación inicial en Kraft (1968) es muy sensible a la observación muestral obtenida (la robustez es una propiedad que suele depender del resultado muestral).

4. Conclusiones

De acuerdo con los resultados anteriores podemos enumerar cuatro conclusiones principales:

1. Se muestra una metodología que permite la incorporación de opiniones cualitativas de un profesional en el procedimiento de la evidencia empírica, suministrada por una investigación de auditoría.

2. La metodología presentada en las secciones 2 y 3, que es la bayesiana (en un sentido estricto), exige la especificación, por parte del auditor, de una distribución de probabilidad subjetiva. En este trabajo se pone de manifiesto la posibilidad de relajar esa condición que en la práctica puede resultar demasiado exigente.

3. Es posible conducir un análisis bayesiano solicitando del experto únicamente algunos cuantiles de la distribución. Los cuantiles tienen una fuerte significación intuitiva y por tanto son fáciles de especificar en la práctica incluso para personas sin entrenamiento estadístico.

4. Esta nueva metodología aquí presentada permite un análisis de la sensibilidad de las conclusiones a las variaciones en las opiniones cualitativas del experto.

Anexo

Para cualquier distribución a priori $g\in\Gamma$, su distribución predictiva será:

$$p(m/g)=\int_0^1 \sum_{i=1}^{k} p_i\cdot f(m/\phi)\cdot q_i(\phi)\cdot d\phi=$$

$$=\sum_{i=1}^{k} p_i\cdot \int_{T_i} f(m/\phi)\cdot q_i(\phi)\cdot d\phi=\sum_{i=1}^{k} p_i\cdot p(m/q_i)$$

de donde,

$$g(\phi/m)=\sum_{i=1}^{k} p_i(m)\cdot q_i(\phi/)$$

con

$$p_i(m)=\frac{p_i\cdot p(m/q_i)}{\sum_{j=1}^{k} p_j\cdot p(m/q_j)}\quad (i=1,\dots,k)$$

Para cada $i=1,\dots,k$

$$p_i(m)=\left\{\frac{p_i\cdot p(m/q_i)+\sum_{j\neq i}p_j\cdot p(m/q_j)}{p_i\cdot p(m/q_i)}\right\}^{-1}=\left\{1+\frac{\sum_{j=i}p_j\cdot p(m/q_j)}{p_i\cdot p(m/q_i)}\right\}^{-1}$$

Ahora bien, para cada $i=1,\dots,k$ tenemos que $f(m/\phi)$ (como función de ϕ) está acotada sobre el intervalo acotado $T_i=(a_{i-1},\ a_i]$, luego:

$$\underline{f}_i(m)=\inf_{\phi\in T_i} f(m/\phi)\leqslant f(m/\phi)\leqslant\sup_{\phi\in T_i} f(m/\phi)=\bar{f}_i(m)$$

luego,

$$\underline{f}_i(m)\leqslant p(m/q_i)=\int_{T_i} f(m/\phi)\cdot q_i(\phi)\cdot d\phi\leqslant\bar{f}_i(m)$$

En consecuencia, el inferior de $p_i(m)$ se alcanza cuando el cociente

$$\frac{\sum_{j\neq i}p_j\cdot p(m/q_j)}{p_i\cdot p(m/q_i)}$$

sea máximo, lo cual se consigue cuando simultáneamente

$$\sum_{j\neq i} p_j\cdot p(m/q_j)$$

sea máximo y $p_i\cdot p(m/q_i)$ sea mínimo. Esto ocurre en

$U-p_i\cdot\bar{f}_i(m)$ y $p_i\cdot\underline{f}_i(m)$, respectivamente (donde $U=\sum_{j=1}^{k} p_j\cdot\bar{f}_j(m)$). Por tanto,

$$l_i(m)=\inf_{\pi\in\Gamma} p_i(m)=\left\{1+\frac{U-p_i\cdot\bar{f}_i(m)}{p_i\cdot\underline{f}_i(m)}\right\}^{-1}$$

de donde se deduce que

$$l_i(m)=\frac{p_i\underline{f}_i(m)}{p_i\cdot[\underline{f}_i(m)-\bar{f}_i(m)]+U}$$

Del mismo modo para el superior, se tiene que se alcanzará cuando

$$\sum_{j\neq i}p_j\cdot p(m/q_j)\ \text{y}\ p_i\cdot p(m/q_i)$$

sean mínimo y máximo, respectivamente. Esto ocurre en

$L-p_i\cdot\underline{f}_i(m)$ y $p_i\cdot\bar{f}_i(m)$ (siendo $L=\sum_{j=1}^{k} p_j\cdot\underline{f}_j(m)$). Por tanto.

$$u_i(m)=\sup_{\pi\in\Gamma} p_i(m)=\left\{1+\frac{L-p_i\cdot\underline{f}_i(m)}{p_i\cdot\bar{f}_i(m)}\right\}^{-1}$$

y de aquí,

$$u_i(m)=\frac{p_i\bar{f}_i(m)}{p_i\cdot[\bar{f}_i(m)-\underline{f}_i(m)]+L}$$

En ambiente de auditoría, es muy común tener opiniones cualitativas sobre la tasa de error, como puede ser la unimodalidad. Un desarrollo completo bajo esta consideración puede verse en Vázquez-Polo y Hernández (1995).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almela Díez, B. (1988a): «El sistema de control interno en la empresa», *Técnica Contable*, año XL, enero, n.º 469, págs. 11-26.

Almela Díez, B. (1988b): «La función de auditoría interna», *Técnica Contable*, año XL, mayo, n.º 473, págs. 261-277.

Arens, A. A. y Loebbecke, J. K. (1981): *Applications of Statistical Sampling to Auditing*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc.

Baró Llinas, J. (1996): «El muestreo exploratorio en auditoría a partir de la ley de Poisson», *Técnica Contable*, año XXXVIII, octubre, págs. 433-436.

Blocher, E. y Robertson, J. C. (1976): «Bayesian Sampling Procedures for Auditors: Computer Assisted Instruction», *The Accounting Review,* abril, págs. 359-363.

Chesley, G. R. (1975): «Elicitation of Subjective Probabilities: A Review», *The Accounting Review,* abril, págs. 325-337.

Corless, J. C. (1972): «Assessing Prior Distributions for Applying Bayesian Statistics in Auditing», *The Accounting Review,* julio, págs. 556-566.

Cox, D. R. y Snell, E. J. (1979): «On Sampling and the Estimation of Rare Errors», *Biometrika,* vol. 66, n.º 1, págs. 125-132.

Crosby, M. A. (1980): «Implications of Prior Probability Elicitation on Auditor Sample Size Decisions», *Journal of Accounting Research,* vol. 18, n.º 2, págs. 585-593.

Dworin, L. y Grimlund, R. A. (1984): «Dollar Unit Sampling for Accounts Receivable and Inventory», *The Accounting Review,* vol. LIX, n.º 2, págs. 218-241.

Dworin, L. y Grimlund, R. A. (1986): «Dollar-Unit Sampling: A Comparison of the Quasi-Bayesian and Moment Bounds», *The Accounting Review,* vol. LXI, n.º 1, págs. 36-57.

Félix (Jr.), W. L. (1976): «Evidence on Alternative Means of Assessing Prior Probability Distributions for Audit Decision Making», *The Accounting Review,* vol. LI, n.º 4, págs. 800-807.

Félix (Jr.), W. L. y Grimlund, R. (1977): «A Sampling Model for Audit Tests of Composite Accounts», *Journal of Accounting Research,* Spring, págs. 23-40.

Fienberg, S. E.; Neter, J. y Leitch, R. A. (1977): «Estimating the Total Ovestament Error in Accounting Populations», *Journal of the American Statistical Association,* vol. 72, 358, págs. 295-302.

Frost, T. A. y Tamura, H. (1982): «Jackknifed Ratio Estimation in Statistical Auditing», *Journal of Accounting Research,* Spring, págs. 103-120.

Frost, T. A. y Tamura, H. (1986): «Accuracy of Auxiliary Information Interval Estimation in Statistical Auditing», *Journal of Accounting Research,* vol. 24, n.º 1, págs. 57-75.

Godfrey, J. y Neter, J. (1984): «Bayesian bounds for monetary unit sampling in accounting and auditing», *Journal of Accounting Research,* vol. 22, n.º 2, págs. 497-525.

Hill, H. P.; Roth, J. L. y Arkin, H. (1979): *Sampling in Auditing. A Simplified Guide and Statistical Tables,* Krieger Publishing Company, Huntington, New York.

Kendall, M. y Stuart, A. (1976): *The advanced Theory of Statistics,* vol. 1, Distribution Theory, Fourth Edition, Charles Griffin & Co. Ltd.

Kraft, W. H. (1968): «Statistical Sampling for Auditors: A New Look», *The Journal of Accountancy,* agosto, págs. 49-56.

Leitch, R. A.; Neter, J.; Plante, R. y Sinha, P. (1982): «Modified Multinomial Bounds for Larger Numbers of Errors in Audits», *The Accounting Review,* vol. LVII, n.º 2, págs. 384-400.

Neter, J.; Leitch, R. A. y Fienberg, S. E. (1978): «Dollar Unit Sampling: Multinomial Bounds for Total Overstatement and Understatement Errors», *The Accounting Review,* vol. LIII, n.º 1, págs. 77-93.

Roberts, D. M. (1978): *Statistical Auditing,* AICPA, New York.

Rohatgi, V. K. (1976): *An Introduction Probability Theory and Mathematical Statistics,* John Wiley & Sons, Inc., Delhi.

Slovic, P.; Fischhoff, B. y Lichtenstein, S. (1977): «Behavioral Decision Theory», Annual Review of Psychology, págs. 1-39.

Steele, A. (1992): *Audit Risk and Audit Evidence: The Bayesian Approach to Statistical Auditing,* Academic Press, London.

Stringer, W. W. (1963): «Practical Aspects of Statistical Sampling in Auditing», *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section,* págs. 405-411.

Suárez Suárez, A. S. (1991): *La Moderna Auditoría. Un Análisis Conceptual y Metodológico,* Ed. McGraw-Hill. Madrid.

Vázquez Polo, F. J. (1992): «Técnicas Estadísticas Bayesianas en Auditoría. Un Análisis de Robustez», Tesis Doctoral, Universidad de Las Palmas de G. C.

Vázquez Polo, F. J. y Hernández Bastida, A. (1995): «Behaviour of the Posterior Error Rate with Partial Prior Information in Auditing», *Journal of Applied Statistics,* vol. 22, n.º 4, págs. 469-476.

Winkler, R. L. (1967): «The Assessment of Prior Distribution in Bayesian Analysis», *Journal of the American Statistical Association,* págs. 775-800.

ABSTRACT

This paper presents the possibility of use of the Bayesian statistical methods in auditing to exploit the audit evidence, appropriately modelled. Moreover, the use of this methodology needs a sensitivity study of the model. Assuming the above, it is presented a bayesian sensitivity study on the subjective assessments, which will help in final decisions in practical audit situations.

Key words: prior density, posterior density, conjugate priors, error rate, prior quantiles.