Revista OIKOS año 12, Nº 26, diciembre de 2008
ISSN 0717-327 X • pp. 117 - 135

Cálculo del coste variable del endeudamiento perpetuo a través de la opción de responsabilidad limitada

The calculation of variable cost of the indebtedness perpetuity through the option of limited liability

Neus Orgaz Guerrero*

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo en el que, manteniéndose el horizonte perpetuo, de acuerdo con Merton (1974), los parámetros que determinan el coste del endeudamiento pasan a ser variables. El modelo proporciona un coste variable del endeudamiento ya que incorpora tanto las variaciones del tipo de interés libre de riesgo como las variaciones del valor de la opción de responsabilidad limitada. La variabilidad en el tipo de interés libre de riesgo se cuantifica a través de *swaps* sobre tipo de interés, y la variabilidad de la opción de responsabilidad limitada se cuantifica de dos formas diferentes: en primer lugar, mediante la diferencia de la opción de responsabilidad limitada del período actual y la del período anterior, y, en segundo lugar, se cuantifica a través de contratos *forwards* sobre el valor de la opción de responsabilidad limitada.

Palabras clave: coste fijo financiación, opción de responsabilidad limitada, coste variable financiación, swaps, contrato*s forward.*

ABSTRACT

This paper presents a model in which the remaining perpetual horizon, according to Merton (1974), the parameters that determine the cost of borrowing become variable. The model provides a variable cost of borrowing and incorporating both variations of interest rate risk-free as with the changes in the value of the option of limited liability. The variability in the risk-free interest rate is quantified by interest rate swaps and variability of the option of limited liability is quantified in two different ways: first by the option of limited liability of the current period and prior period, and secondly is quantified through forward contracts on the value of the option of limited liability.

Keywords: fixed cost of debt, optional limited liability, variable cost of debt, swaps, forward contracts.

* Española. Profesora asociada del Departamento de Economía de la Empresa, Universidad Autónoma de Barcelona, España. Correspondencia con el autor: Neus.Orgaz@uab.es

1. Introducción

El objetivo de este artículo consiste en elaborar un modelo en el que, manteniéndose el horizonte perpetuo, de acuerdo con Merton (1974), los parámetros que determinan el coste del endeudamiento pasan a ser variables. Para llevar a cabo este objetivo, se utiliza la teoría de valoración de opciones y los contratos de derivados.

Black y Scholes (1973) son los pioneros en aplicar la teoría de valoración de opciones para determinar la rentabilidad exigida de una empresa endeudada. Su propuesta consiste en valorar las acciones de una empresa endeudada como una opción de compra europea sobre su activo con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores, en un horizonte finito.

A partir del resultado obtenido por Black y Scholes (1973) y teniendo, además, en cuenta la paridad *call-put,* es posible valorar la responsabilidad limitada de las sociedades anónimas como una opción de venta y, asimismo, calcular la rentabilidad exigida tanto para la financiación ajena como por la financiación propia.

La principal ventaja del planteamiento de Black y Scholes radica en la aplicación de la teoría de opciones a la valoración de las acciones de las empresas endeudadas, a la valoración de la limitación de responsabilidad y a la determinación de la rentabilidad exigida. Merece destacarse que la limitación de responsabilidad no ha podido valorarse por métodos alternativos a la teoría de opciones. Sin embargo, el modelo de Black y Scholes presenta algunas limitaciones significativas: el horizonte finito, el tipo de interés constante y la volatilidad constante. El modelo de parámetros constantes limita su operatividad más allá de un contexto financiero estático. En base a estas limitaciones, en este trabajo se amplia el modelo en dos aspectos: el horizonte perpetuo y la variabilidad de los componentes del coste del endeudamiento. Por tanto, se considera que el endeudamiento de la empresa es perpetuo, pues, aunque las empresas no gozan de proyectos concretos de financiación ajena a un horizonte perpetuo, el conjunto de la financiación ajena a lo largo de la vida de la empresa puede considerarse permanente, puesto que unos proyectos de financiación sustituyen a otros. Merton (1974) y Black y Cox (1976) suponen también una deuda con vencimiento infinito en un modelo dinámico.

En base a esta premisa, el derecho de responsabilidad limitada de los accionistas se puede asimilar a una opción de venta americana de horizonte perpetuo sobre el activo de la empresa con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores. Esta opción de venta americana se valora aplicando los resultados obtenidos por Merton (1973).

El segundo punto de la ampliación del modelo de Black y Scholes (1973) y aportación de este artículo consiste en la adaptación del modelo a una realidad cambiante, en el cálculo del coste del endeudamiento de la empresa. En la realidad, el tipo de interés no es constante para todos los períodos. Por esta razón, se presenta un modelo en el que, manteniéndose el horizonte perpetuo, los parámetros que determinan el coste del endeudamiento pasan a ser variables, de modo que el coste de la financiación varía en cada período en función de los valores de las variables que lo determinan. Se consigue, así, determinar el coste básico conjunto del endeudamiento que, sin estar referido a una fuente de financiación ajena específica, determina la que debería ser la rentabilidad exigida por el conjunto de ellas teniendo en cuenta el horizonte ilimitado de la vida de la empresa.

Modigliani y Miller (1958) son los pioneros en el análisis moderno de la relación entre el valor de las acciones y el valor de la deuda, asumiendo una deuda con vencimiento infinito.

Los tradicionales modelos de estructura de capital están representados por Brennan y Schwartz (1978), Leland (1994), donde asumen un tipo de interés constante.

Leland (1994) examina el valor de la deuda a largo plazo, la rentabilidad y su estructura óptima de capital, cuando la rentabilidad de la empresa sigue un proceso con volatilidad constante.

Leland (1994) y Goldstein y otros (2001) demuestran que la estructura óptima de capital es muy sensible a los cambios en el nivel de los tipos de interés.

En la literatura, encontramos autores donde han tratado el tipo de interés estocástico. Nengjiu Ju and Hui Ou-Yang (2006) desarrolla un modelo en el cual la estructura óptima del capital y el vencimiento de la deuda son juntamente determinados por un tipo de interés estocástico. Masaaki Kijima y Teruyoshi Suzuki (2001) exponen un modelo de valoración de la deuda, donde el activo de la empresa y el tipo de interés siguen un proceso estocástico. En este artículo, se trata la variabilidad de los tipos de interés con contratos de derivados, en concreto los *swaps* sobre tipos de interés y los contratos *forwards.*

La estructura del este trabajo es la siguiente: en el apartado 2, se realiza una revisión del coste del endeudamiento en el modelo de tipo de interés constante y horizonte perpetuo. En el apartado 3, se describe cómo se pasa de un modelo de financiación de parámetros constantes a un modelo de parámetros variable, manteniendo el horizonte perpetuo de la financiación empresarial. En el apartado 4, se propone un modelo de coste variable del endeudamiento que incorpora tanto las variaciones del interés libre de riesgo como las variaciones de la opción de responsabilidad limitada. El modelo de coste del endeudamiento con parámetros variable se presenta en dos versiones: modelo de coste variable puro y el modelo de coste variable atenuado. Y, finalmente, en el último apartado, se describe las conclusiones del trabajo.

2. El coste de endeudamiento en el modelo de coste de parámetros constantes y horizonte perpetuo

2.1. Valor de la opción responsabilidad limitada en un horizonte perpetuo

En este apartado, se realiza una revisión del modelo de parámetros constantes y horizonte perpetuo. En primer lugar, se revisa el valor de la opción de responsabilidad limitada en un horizonte perpetuo y, en segundo lugar, se analizan los componentes del coste del endeudamiento de parámetros constantes.

Se considera, en este trabajo, que el endeudamiento de la empresa es de horizonte perpetuo. Por tanto, el derecho de responsabilidad limitada de los accionistas se asimila a una opción de venta americana de horizonte perpetuo sobre el activo de la empresa con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores. Los accionistas son propietarios del activo de la empresa, pagan los intereses de la deuda, y adquieren la opción de responsabilidad limitada emitida por los acreedores.

La opción de responsabilidad limitada, *ORL*, puede valorarse aplicando la fórmula de la opción de venta americana perpetúa deducida por Merton (1973 y 1990: 298-300), siendo:

A = valor del activo de la empresa (activo subyacente)

DN = valor de la deuda nominal (precio de ejercicio)

r = tipo de interés libre de riesgo

σ = desviación típica de la rentabilidad del activo (A)

La expresión del valor de la opción de responsabilidad limitada como una opción de venta americana perpetua es la siguiente:

$$ORL = \left[\frac{D}{1+\gamma}\right] \cdot \left[\frac{(1+\gamma)\cdot A}{\gamma \cdot D}\right]^{-\gamma} \tag{1}$$

Siguiendo la notación introducida por Merton,

$$\gamma = \frac{2 \cdot r}{\sigma^2} \tag{2}$$

Multiplicando y dividiendo por el valor del activo y denominando *d* al coeficiente de endeudamiento, se obtiene,

$$d = \frac{DN}{A} \tag{3}$$

El coeficiente de endeudamiento, *d*, se define como la relación entre el valor nominal del endeudamiento y el valor del activo.

Teniendo en cuenta el coeficiente de endeudamiento, la ecuación (1) toma la siguiente expresión:

$$ORL = A \cdot \left[\frac{d}{(1+\gamma)} \right] \cdot \left[\frac{1+\gamma}{\gamma \cdot d} \right]^{-\gamma} \tag{4}$$

Y, normalizando para A=1, se obtiene:

$$orl = \left[\frac{d}{1+\gamma} \right] \cdot \left[\frac{1+\gamma}{\gamma \cdot d} \right]^{-\gamma} \tag{5}$$

2.2. Componentes del coste del endeudamiento en el modelo de parámetros constantes

El valor de la opción de responsabilidad limitada que los acreedores venden a los accionistas, permite calcular el interés efectivo en condiciones de riesgo. Teniendo en cuenta el horizonte perpetuo, se puede escribir:

$$k^*(DN\text{-}ORL_0) = r^*DN \tag{6}$$

Siendo

$(DN\text{-}ORL_0)$ = cifra que la empresa recibe de los acreedores, deuda efectiva (D_0)

DN* r = interés a pagar a los acreedores

k= tipo de interés efectivo que incluye la prima por el riesgo

r = tipo de interés libre de riesgo

Por lo tanto, el coste del endeudamiento es:

$$k = r \cdot \frac{DN}{(DN - ORL_0)} \tag{7}$$

Es decir,

$$k = r \cdot \frac{1}{1 - \frac{ORL_0}{DN}} \tag{8}$$

A partir de esta expresión, se sustituye el valor de la opción de responsabilidad limitada por su valor según en (5) y el valor de γ por la ecuación (2). Se llega a la siguiente expresión:

$$k = r \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+\frac{2\cdot r}{\sigma^2}} \left[\frac{1+\frac{2\cdot r}{\sigma^2}}{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}\cdot d} \right]^{-\frac{2\cdot r}{\sigma^2}}} \tag{9}$$

Donde *d* es el coeficiente de endeudamiento, definido en la ecuación (3).

Por otra parte, la relación establecida por la ecuación (6), se completa con la siguiente relación:

$$D_0 \cdot k = (D_0 + ORL_0) \cdot r_0 \tag{10}$$

que establece la igualdad entre el producto del coste efectivo de la financiación ajena por la deuda efectiva y la tasa de interés libre de riesgo por la deuda nominal.

A partir de la ecuación (10), se constata que el coste de endeudamiento se divide en dos componentes:

1. un primer componente que consiste en el tipo de interés libre de riesgo sobre el importe de la financiación ajena efectiva: $(D_0 \cdot r_0)$, y
2. un segundo componente que consiste en el tipo de interés libre de riesgo sobre el importe de la opción de responsabilidad limitada: $(ORL_0 \cdot r_0)$.

3. Transformación del modelo de coste de parámetros constantes en un modelo de coste de parámetros variables

3.1. Condición para la equivalencia de modelos

El objetivo de este apartado consiste en la transformación del modelo del coste del endeudamiento de parámetros constantes en un modelo con parámetros variables. Como paso previo, se busca la equivalencia entre los dos modelos. Esta equivalencia requiere el cumplimiento de la siguiente condición:

> "El valor actual de la renta generada por el modelo de coste fijo debe ser equivalente al valor actual de la renta generada por el modelo de coste variable, bajo la condición de no arbitraje"

La condición de no arbitraje establece que, si dos activos financieros generan rentas futuras equivalentes, entonces necesariamente en cualquier momento estos dos activos financieros han de tener el mismo valor, ya que en caso de no ser así aparece una oportunidad de arbitraje.

Una oportunidad de arbitraje surge cuando resulta posible obtener un beneficio sin asumir riesgo alguno, como es el caso de una operación que proporciona un ingreso inmediato al inversor sin ningún pago futuro derivado de ella, es decir, los ingresos y pagos futuros se cancelan mutuamente.

Una vez encontrada la equivalencia entre los dos modelos, se elabora el modelo del coste de endeudamiento con parámetros variables en dos versiones. Para aplicar la variabilidad de los parámetros, se utiliza los contratos de derivados: los s*waps* sobre tipos de interés y los contratos *forwards.*

3.2. Equivalencia entre los modelos de coste del endeudamiento de parámetros constantes y parámetros variables

Para buscar la equivalencia entre los modelos, teniendo en cuenta la condición mencionada anteriormente, se calculará el valor actual de una inversión en renta fija y el valor actual de una inversión en renta variable: aplicado al caso de la opción de responsabilidad limitada.

Se ha visto que uno de los componentes del coste de la financiación en el modelo de coste fijo es una serie perpetua de flujo igual al producto del tipo de interés por el valor inicial de la opción de responsabilidad limitada $(ORL_0 \cdot r_0)$. Esta serie se denomina serie 1. Por tanto:

SERIE 1: $ORL_0 \cdot r_0$

Esta serie 1 es equivalente a la siguiente serie, que se denomina serie 2:

SERIE 2: $(ORL_1 - ORL_0) \quad (ORL_2 - ORL_1) \quad \ldots \qquad (ORL_t - ORL_{t-1})$

Se trata de una serie perpetua cuyo flujo al final del período t consiste en la diferencia entre el valor de la opción de responsabilidad limitada al final de este período y el valor de la misma opción al final del período anterior, o, lo que es lo mismo, al principio del período en curso. Así, el flujo del primer período resulta igual a la diferencia entre ORL_1, valor de la opción de responsabilidad limitada al final del primer período, y ORL_0, valor de la opción de responsabilidad limitada al principio de este período.

La equivalencia entre ambas series se demuestra por la condición de no arbitraje. El valor actual de la serie 2 es igual al valor inicial de la opción de responsabilidad limitada, y, por tanto, equivalente al valor actual de la serie 1.

El valor actual de la serie 1 es, evidentemente, ORL_0. El valor actual de la serie 2 es el siguiente:

$$VA(2) = ORL_0 + X \tag{11}$$

donde $X \neq 0$

Se demuestra que, para que sean equivalentes el valor actual de la serie 1 y la serie 2, X no puede ser ni positivo ni negativo. Se examina los dos casos $X>0$ y $X<0$.

(1) Primer caso: $X > 0$

Si $X > 0$, el valor actual de la serie 2 es superior al valor inicial de la opción de responsabilidad limitada, lo que da lugar a una oportunidad de arbitraje.

Para desarrollar la operación de arbitraje es preciso crear previamente un activo financiero que replique la serie 2. La creación de este activo consta de los siguientes pasos:

1. se adquiere la opción de responsabilidad limitada por ORL_0 unidades monetarias; y
2. se decide mantener ORL_0 unidades monetarias de forma permanente en la opción de responsabilidad limitada, de manera que:

- cuando el valor de la inversión se sitúa por sobre de ORL_0 unidades monetarias, es decir, cuando la diferencia entre ORL_t y ORL_{t-1} es positiva, retiramos el superavit.
- cuando el valor de la inversión se sitúa por debajo de ORL_0 unidades monetarias, es decir, cuando la diferencia entre ORL_t y ORL_{t-1} es negativa, aportamos la cifra necesaria para cubrir el déficit.

La serie de flujos (aportaciones y retiradas de fondos) que genera esta estrategia es la siguiente:

$$(ORL_1 - ORL_0) \quad (ORL_2 - ORL_1) \quad \ldots \quad (ORL_n - ORL_{n-1})$$

donde se observa que el saldo al final de un período cualquiera n es necesariamente igual al valor inicial de la opción de responsabilidad limitada:

$$ORL_n - \sum_{t=1}^{n}\left(ORL_t - ORL_{t-1}\right) = ORL_0 \tag{12}$$

En consecuencia, mediante esta estrategia, se ha generado una serie de flujos financieros que replican a la serie 2. Si su valor actual es superior a ORL_0 aparece una oportunidad de arbitraje que se materializa por medio de los siguientes pasos:

1. venta al descubierto de la serie 2, percibiendo $ORL_0 + X$ unidades monetarias; y asumiendo en esta posición de venta al descubierto los flujos posteriores.
2. compra de la opción de responsabilidad limitada ORL_0 ; y
3. una vez adquirida la opción de responsabilidad limitada, se mantiene permanen-

temente ORL_0 unidades monetarias en este activo y realizamos las aportaciones y retiradas oportunas. De esta manera, se genera una réplica de la serie 2.

Cuadro nº 1: Arbitraje cuando X > 0

	t = 0	T=1	T= 2	…	T= n
Venta serie 2	+ ORL_0+X	-(ORL_1-ORL_0)	-(ORL_2-ORL_1)	...	-(ORL_n-ORL_{n-1})
Compra ORL_0, réplica de la serie 2	- ORL_0	(ORL_1-ORL_0)	(ORL_2-ORL_1)	...	(ORL_n-ORL_{n-1})
Beneficio	+ X	-	-	...	-

Fuente: elaboración propia

Así se obtiene un beneficio igual a *X* en el momento inicial, siendo los flujos futuros de la serie 2 iguales pero de signo contrario a los flujos futuros de la réplica de la serie 2, con lo que los flujos que resultan de agregar ambas series son nulos en todo caso, excepto en el momento inicial. En consecuencia, se está ante un arbitraje. Se resume esta oportunidad de arbitraje en el cuadro nº1.

Por lo tanto, *X* no puede ser positivo puesto que aparecería una oportunidad de arbitraje

(2) Segundo caso, $X < 0$

Si $X < 0$, también existe una oportunidad de arbitraje, siendo la estrategia a realizar la siguiente:

1. compra de la serie 2 pagando ORL_0 + X unidades monetarias;
2. venta de la opción de responsabilidad limitada por ORL_0 unidades monetarias; y
3. una vez vendida la opción de responsabilidad limitada, se mantiene permanente una posición al descubierto de ORL_0 unidades monetarias en este activo realizando las aportaciones y retiradas oportunas. Se replica así la serie 2.

El arbitraje, en este caso, queda reflejado en el cuadro nº 2:

Cuadro nº 2: Arbitraje cuando X < 0

	t= 0	t = 1	t = 2	...	t= n
Compra de la serie 2	-ORL_0+X	(ORL_1-ORL_0)	(ORL_2-ORL_1)	…	(ORL_n-ORL_{n-1})
Venta de ORL_0 y réplica de la serie 2	+ORL_0	-(ORL_1-ORL_0)	- (ORL_2-ORL_1)	…	- (ORL_n-ORL_{n-1})
Beneficio	+X	-	-	...	-

Fuente: elaboración propia

En este caso, también se obtiene un beneficio igual a *X* en el momento inicial, anulándose los flujos posteriores de la serie 2 con los flujos de la réplica de la misma que hemos creado.

En consecuencia, si X toma un valor negativo, aparece una oportunidad de arbitraje.

Por tanto, dado que X no puede ser ni positivo ni negativo, el valor actual de la serie 2 debe ser igual al valor inicial de la opción de responsabilidad limitada, y puede considerarse equivalente a la serie 1.

$$VA(serie\ 2) = ORL_0 \tag{13}$$

$$VA\ (serie\ 2) \equiv VA\ (serie\ 1) \tag{14}$$

Este resultado indica que el componente $ORL_0 \cdot r_0$ del modelo de coste fijo puede sustituirse por el componente de coste variable:

$$ORL_t - ORL_{t-1} \tag{15}$$

4. El coste de la financiación en el modelo de coste variable

4.1. Modelo de coste variable puro

En el modelo de parámetros constantes, el endeudamiento presenta el siguiente coste, asimismo constante:

$$CF_{fijo} = D_0 \cdot r_0 + ORL_0 \cdot r_0 \tag{16}$$

donde el interés que se paga por el coste de financiación se desdobla en dos componentes:

1. el interés que se paga por la financiación ajena efectiva; y
2. el interés que se paga por la opción de responsabilidad limitada.

La suma de estos dos componentes es igual a la financiación ajena efectiva por el coste efectivo, que es el interés total. Aplicando la ecuación (6) a este caso, se obtiene:

$$D_0\, k_t = D_0\, r_0 + ORL_0\, r_0 \tag{17}$$

Transformando estos componentes, podemos construir un modelo de coste del endeudamiento con parámetros variables basado igualmente en la opción de responsabilidad limitada, e introduciendo los contratos de derivados para conseguir la variabilidad de estos parámetros:

1. sobre el componente $D_0 \cdot r_0$ aplicamos un *swap* sobre tipos de interés. El *swap* sobre tipos de interés consiste en una permuta de tipo de interés fijo por un tipo de interés variable. De esta manera, $D_0 \cdot r_0$ se transforma en el producto de la deuda efectiva por el tipo de interés del período: $D_0 \cdot r_t$; y
2. el componente $ORL_0 \cdot r_0$ se sustituye por la diferencia equivalente entre el valor inicial y el valor final de la opción, teniendo en cuenta la equivalencia entre la serie 1 y la serie 2 que se ha demostrado en el apartado 3.2.

En definitiva, por tanto, el coste fijo de la financiación puede sustituirse por su coste variable equivalente:

$$CVP = D_0 \cdot r_t + (ORL_t - ORL_{t-1}) \qquad (18)$$

Aplicando la operatoria de los *swaps* de tipos de interés, se consigue intercambiar los tipos de interés de los diferentes períodos.

Por tanto, el coste efectivo del endeudamiento en el período t se calcula utilizando la siguiente expresión:

$$D_0\, k_t = D_0\, r_t + (ORL_t - ORL_{t-1}) \qquad (19)$$

4.2. Modelo de coste variable atenuado

En el modelo anterior, modelo de coste variable puro, la diferencia entre la opción de responsabilidad limitada del periodo y la del periodo anterior provoca elevadas fluctuaciones del coste del endeudamiento. Para evitar estas fluctuaciones, se introduce la operatoria de un contrato *forward* sobre el valor de la opción de responsabilidad limitada. El primer componente del modelo de coste variable puro no sufre alteración alguna.. El valor del segundo componente, $ORL_t - ORL_{t-1}$, sí queda modificado: concretamente al final de $t-1$ se suscribe en posición de venta un contrato *forward* sobre la opción de responsabilidad limitada con vencimiento en t.

Las características de este contrato *forward* son:

Vendedor del contrato *forward*: la empresa

Comprador del contrato *forward*: sus acreedores

Activo subyacente: *ORL*

Precio de la opción de responsabilidad limitada en el momento actual = ORL_{t-1}

Precio efectivo en un día futuro de la opción de responsabilidad limitada = ORL_t

Precio del día actual para un día futuro (precio *forward*)= $ORL_{t-1}\,(1+r_t)$ Al tratarse de un activo sin rendimiento explícito, ni costes de custodia.

El cuadro número 3 recoge los movimientos financieros entre comprador y vendedor y los resultados del contrato *forward* a su vencimiento. Donde:

r_t indica el tipo de interés para el período t que queda fijado al principio del período, y

ORL_t expresa cómo ya se conoce el valor de la opción de responsabilidad limitada al final del período.

Cuadro nº 3: Movimientos financieros y resultados al vencimiento del contrato *forward*

	COMPRADOR	VENDEDOR
Recibe	ORL_t	$ORL_{t-1}\,(1+r_t)$
Entrega	$ORL_{t-1}\,(1+r_t)$	ORL_t
Resultado al vencimiento	$ORL_t - ORL_{t-1}\,(1+r_t)$	$ORL_{t-1}\,(1+r_t) - ORL_t$

Fuente: elaboración propia

Como se observa en el cuadro, la empresa, al estar en posición de vendedora del contrato *forward*, obtiene como resultado del contrato a su vencimiento al final de *t*:

$$ORL_{t-1}\,(1+r_t) - ORL_t \tag{20}$$

A continuación, se puede ver cómo afecta al componente $ORL_t - ORL_{t-1}$ del modelo de coste variable la introducción de este contrato *forward.* A partir de este momento, se pasa a denominar a este nuevo modelo logrado al introducir el contrato *forward*, modelo de coste variable atenuado:

Componente coste variable puro	$ORL_t - ORL_{t-1}$
Resultado contrato *forward*	$\underline{ORL_{t-1}\,(1+r_t) - ORL_t}$
Componente coste variable atenuado	$ORL_{t-1}\, r_t$

Con este nuevo componente del modelo de coste variable atenuado, la empresa al final de cada período paga el interés variable sobre el valor de la opción de responsabilidad limitada del período anterior o, lo que es lo mismo, al principio del período actual.

Dado que el valor inicial de un contrato *forward* es nulo en todo caso, el modelo de coste variable puro resulta equivalente al nuevo modelo de coste variable atenuado.

En este nuevo modelo de coste variable atenuado, el coste de la financiación toma el siguiente valor:

$$CVA = D_0 \cdot r_t + ORL_{t-1} \,.\, r_t \tag{21}$$

es decir,

$$D_0 \cdot k_t = D_0 \cdot r_t + ORL_{t-1} \,.\, r_t \tag{22}$$

Este modelo de coste variable atenuado reduce sustancialmente las fluctuaciones del coste de la financiación del modelo de coste variable puro.

4.3. Comparación del modelo de coste variable puro con el modelo de coste variable atenuado

A través de la ecuación (18) se puede deducir el modelo de coste variable puro:

$CVP = D_0\, r_t + (\, ORL_t - ORL_{t-1})$

Si se multiplica y se divide por ORL_{t-1} a $(ORL_t - ORL_{t-1})$ y se obtiene:

$$\left[\frac{ORL_t}{ORL_{t-1}} - 1\right] \cdot ORL_{t-1} \tag{23}$$

De esta manera, se consigue que aparezca explícitamente la tasa de rentabilidad de la opción de responsabilidad limitada *ORL.*

Obtenemos:

$\left(\frac{ORL_t}{ORL_{t-1}} - 1\right)$= tasa de rentabilidad de la opción de responsabilidad limitada. (24)

Si se compara este resultado con el modelo de coste variable atenuado, es decir, con la ecuación (21):

$CVA = D_0 \cdot r_t + r_t \cdot ORL_{t-1}$

Se puede concluir que el modelo de coste variable atenuado sustituye en el coste de la financiación la tasa de rentabilidad de la opción de responsabilidad limitada por la tasa de interés libre de riesgo.

A continuación, se realiza una simulación para comparar el modelo de coste variable puro con el modelo de coste variable atenuado.

En primer lugar, se calcula los parámetros iniciales, es decir la opción de responsabilidad limitada en el momento inicial, y el coste de financiación del modelo de parámetros constantes.

Tabla nº 1

T	R	σ	A	DN	ORL	D	CFfijo (*D*k)*	%CFfijo
0	0,05	0,25	10.000	5.000	291,73	4708,27	250	5,31

Fuente: elaboración propia
Donde r=tipo de interés libre de riesgo, σ=desviación típica del activo, A= valor del Activo, Dn=valor de la Deuda Nominal, ORL calculada según la ecuación (1), D es la deuda efectiva calculada como la diferencia entre la deuda nominal y la opción de responsabilidad limitada, CFfijo corresponde al coste de financiación del modelo de parámetros constantes ecuación (10), % CF fijo se calcula con el cociente entre el CFfijo y la deuda Efectiva D.

A continuación, se aplica el modelo de coste variable en sus dos versiones: modelo de coste variable puro y modelo de coste variable atenuada. Donde el tipo de interés libre de riesgo, la desviación típica del activo y el activo total van variando. En la tabla nº 2 se pueden observar los resultados.

Tabla nº 2 : Modelo de coste variable

t	*r*	σ	*A*	*ORLt*	*kcv1*	*kcv2*
0	0,05	0,25	10.000	291,73		
1	0,055	0,4	10.000	992,34	0,203	0,058
2	0,006	0,3	12.500	299,47	-0,087	0,072
3	0,075	0,25	12.000	77,97	0,027	0,079
4	0,03	0,15	15.000	31,15	0,020	0,003
5	0,05	0,3	10.000	537,35	0,157	0,050
6	0,04	0,25	7.500	623,32	0,058	0,044
7	0,03	0,4	10.000	1722,58	0,263	0,033
8	0,04	0,5	8.000	2070,82	0,113	0,054
9	0,05	0,75	9.500	2706,21	0,184	0,071
10	0,04	1	7.500	3639,42	0,238	0,062
11	0,045	0,75	10.000	2809,91	-0,131	0,079
12	0,03	0,5	12.000	2203,57	-0,098	0,047
13	0,08	0,4	15.000	416,67	-0,299	0,117
14	0,05	0,25	12.500	204,14	0,004	0,054
15	0,1	0,5	12.000	720,75	0,209	0,104
16	0,075	0,25	12.500	70,69	-0,063	0,086
17	0,035	0,1	12.000	0,54	0,002	0,035
18	0,05	0,15	15.000	2,82	0,050	0,050
19	0,06	0,3	12.500	299,47	0,123	0,060
20	0,075	0,2	12.500	13,96	0,014	0,079

Fuente: elaboración propia
kcv1 corresponde al coste de la financiación en el modelo de coste variable puro, y se calcula aplicando la ecuación (19)
kcv2 corresponde al coste de la financiación en el modelo de coste variable atenuado, y se calcula aplicando la ecuación (22)

En la tabla nº 3, se presenta el coste de financiación de los dos modelos, y el porcentaje de variación entre dos periodos. Se puede constatar que, en el modelo de coste variable puro, existen más fluctuaciones que en modelo de coste variable atenuado. En el gráfico nº 1, se puede apreciar más fácilmente cómo el modelo de coste variable puro tiene grandes oscilaciones, y el modelo de coste variable reduce considerablemente estas oscilaciones.

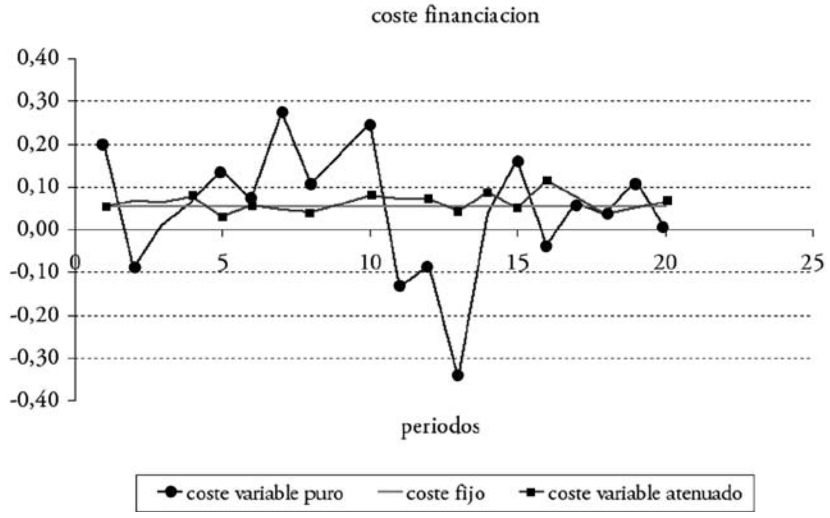
Tabla nº 3: Modelo de coste variable

t	*CF var 1*	*CF var 2*	*% CF var 1*	*% CF var 2*
0				
1	936,0276	250,0000	0,1988	0,.0531
2	-433,9192	313,5338	-0,0922	0,0666
3	60,9969	300,4644	0,0130	0,0638
4	306,3055	358,9681	0,0651	0,0762
5	647,4373	142,1828	0,1375	0,0302
6	321,3855	262,2808	0,0683	0,0557
7	1287,5910	213,2635	0,2735	0,0453

8	489,4870	192,9254	0,1040	0,0410
9	823,7246	271,1635	0,1750	0,0576
10	1168,6218	370,7240	0,2482	0,0787
11	-641,1751	333,9076	-0,1362	0,0709
12	-394,4713	338,3182	-0,0838	0,0719
13	-1645,6566	207,3552	-0,3495	0,0440
14	164,1344	409,9948	0,0349	0,0871
15	752,0202	245,6204	0,1597	0,0522
16	-179,2239	542,9015	-0,0381	0,1153
17	282,9596	358,4223	0,0601	0,0761
18	167,0776	164,8081	0,0355	0,0350
18	532,0618	235,5546	0,1130	0,0500
20	-3,0114	300,4644	-0,0006	0,0638

Fuente: elaboración propia
CFvar 1: Coste de financiación del modelo de coste variable puro
CFvar 2: Coste de financiación del modelo de coste variable atenuado

Gráfico nº 1: Comparación de modelos de coste variable



Fuente: elaboración propia

5. Conclusiones

Una de las variables que adquiere mayor relevancia en el ámbito de las finanzas empresariales es la rentabilidad exigida a una empresa. Es una variable fundamental, tanto en la toma de decisiones de inversiones como en los procesos de valoración de las acciones y de la deuda empresarial.

Para la determinación de la rentabilidad exigida de los accionistas, se suele aplicar el modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) o bien el modelo APT (*Arbitrage Pricing Theory*). Sin embargo, si se quiere determinar la rentabilidad exigida por los acreedores, estos modelos son insatisfactorios, dado que, por lo general, miden el riesgo a partir de coeficientes beta, es decir, del nivel de riesgo sistemático. Los coeficientes beta pueden aceptarse para distribuciones normales de la rentabilidad, pero éste no es evidentemente el caso de la financiación ajena.

Los modelos propuestos por Black y Scholes (1973) y Merton (1974) permiten determinar el que se denomina coste básico de la financiación ajena conjunto que, sin estar referido a una fuente de financiación específica, establece la que debería ser la rentabilidad exigida por el conjunto de ellas, teniendo en cuenta el horizonte ilimitado de la vida de la empresa.

Estos modelos presentan el inconveniente de depender de parámetros constantes que inevitablemente variarán en un horizonte a largo plazo. Para superar esta limitación, se ha construido en este trabajo una variante del modelo anterior en la que los parámetros que determinan el coste del endeudamiento pasan a ser variables, de modo que el coste de capital varía en cada período en función de los valores de estos parámetros.

En concreto, se propone un modelo de coste variable del endeudamiento que incorpora tanto las variaciones del interés libre de riesgo como las variaciones del valor de la opción de responsabilidad limitada. El coste de la financiación ajena se adapta anualmente a los valores de estos parámetros. Se construye así dos versiones de un modelo de coste del endeudamiento con parámetros variables.

La primera versión del modelo, coste variable puro se trata la variabilidad del tipo de interés como *swaps* sobre tipos de interés y la variabilidad de la opción de responsabilidad limitada como la diferencia de la opción de responsabilidad limitada del período actual y la opción de responsabilidad limitada del período anterior. Esta versión del modelo presenta grandes variaciones en el coste del endeudamiento que pueden, no obstante, suavizarse mediante la segunda versión del modelo.

La segunda versión del modelo, coste variable atenuado, sigue tratando la variabilidad del tipo de interés como *swaps* sobre tipos de interés, pero la variabilidad de la opción de responsabilidad limitada, principal causa de las fuertes oscilaciones que experimenta el coste de la financiación ajena en la primera versión del modelo, se modera mediante un contrato *forward* sobre el valor de esta opción.

En definitiva, con esta ampliación del modelo, se consigue determinar el coste del endeudamiento con parámetros variables. Se supera la limitación de los parámetros constantes, de manera que el nuevo modelo se adapta mejor a la realidad cambiante de los tipos de interés.

Bibliografía

Benson, R. y N. Daniel (1991): "Up, over and out", *Risk*, junio.

Black, Fisher y John C.Cox (1976): "Valuing corporate securities: some effects on bond indenture provisions", *The Journal of Finance*, vol.31, nº2, 351-67.

_________ y Myron Scholes (1973): "The princing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy,* 81, 637 – 654.

Brealey, Richard A. y Steward C.Myers, S. (2000): *Principles of Corporate Finance,* 8ª edición, Mc-Graw Hill, Nueva York.

Brennan, Michael y Eduard S. Schwartz (1978): "Corporate income taxes, valuation, and the problem of optimal capital structure", *Journal of Business*, vol.51, nº1, 103-14.

Cox, John C. y Mark Rubinstein (1985): *Options Markets*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Crosbie, Peter J. And Jeffrey R. Bohn (2002): Modellong *Default Risk.* KMV, www.kmv.com.

Dahlstrom, Tom; Mella-Barral, Pierre (2003): "Corporate walkout decisions and the value of default", *European Finance Review,* vol.7,nº3, 325-360.

Duffee, Gregory R. (1999): "Estimating the price of default risk", *The Review of Financial Studies,* vol. 12, nº1, 197-226.

Eliasson, A., S.Gao, y J.Song (2002): Exercising real options: The case of voluntary liquidations. *Documento de trabajo.*

Gemmill, Gordon (1993): *Options Pricing. An International Perspective*, McGraw-Hill, Londres.

Hudson, M. (1991): "The value of going out", *Risk*, marzo, 29-33.

Hull, John C. y Alan White (1995): "The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities", *Journal of Banking and Finance*, vol. 19, nº 2, mayo, 299-322.

_________ (2001): "The Estimation of Default Probabilities", in Alexander, Carol (ed.): *Mastering Risk*. Financial Times-Prentice Hall, vol.2, pp.171-180, Londres.

Jones, Philip E., Scott P.Mason y Eric Rosenfeld (1984): "Contingent claims analysis of corporate capital structures: an empirical investigation", *The Journal of Finance*, vol. 39, nº 3, 611-27.

Ju, N. y Ou-Yang, H. (2006): "Capital Structure, debt maturity, and stochastic interest rates", *Journal of Business*, vol. 79, nº5, 2469-2502.

Kijima, M y Suzuki T. (2001): "A jump-diffusion model for pricing corporate debt securities in a complex capital structure", *Quantitative Finance,* vol.1, 611-20.

Leland, Hayne E. (1994): "Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure", *The Journal of Finance*, vol. 49, nº4, 1.213-52.

Lintner, John (1965): "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", *Review of Economics and Statistics*, vol. 47, nº1, febrero, 13-37.

Longstaff, Francis A. y Eduard S. Schwartz (1995): "A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt", *The Journal of Finance*, vol. 50, nº3, 789-819.

Madan, D. y Unal H. (2000): "A two-factor hazard rate model for pricing risky debt and the term structure of crédito Spreads", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.35 nº 1, march, 43-65.

Mella-Barral, Pierre (1999): "The dynamics of default and debt reorganization", *Review of Financial Studies*, vol.12, nº3, 535-78.

_________ y William Perraudin (1997): "Strategic debt service", *The Journal of Finance, vol. 52, nº 2, 531-556.*

Merton, Robert C. (1973): "The Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, primavera, 141-183.

_________ (1974): "On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates", *Journal of Finance,* vol.29, mayo, 449-470.

_________ (1977): "On the pricing of contingent claims and the Modigliani-Miller theorem", *Journal of Financial Economics,* vol. 5, noviembre, 241-249.

_________ (1990): *Continuos-Time Finance*, 1ª edición revisada, Basil Blackwell, Oxford.

Modigliani, Franco y Merton H. Millar (1958): "The cost of capital, corporation finance and the theory of investment", *American Economic Review,* vol.48, junio, 261-297.

Peña, Juan Ignacio (2002): *La gestión de riesgos financieros de mercado y crédito*. Prentice-Hall, Madrid.

Ross, Stephen A. (1976): "The arbitrage theory of capital asset pricing", *Journal of Economic Theory*, 13, diciembre, 341-360.

Saunders, Anthony (1999): *Credit Risk Measurement*. John Wiley&Sons, New York.

Sharpe, William F. (1964): "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of Finance*, vol.19, nº3, septiembre, 425-442.

Wong, Kit Pong (2006): "The effects of abandonment options on operating leverage and forward hedging", *International Review of Economics of Finance, vol.15, nº1, 72-86.*

Cómo citar este artículo:

Orgaz, Neus (2008): "Cálculo del coste variable del endeudamiento perpetuo a través de la opción de responsabilidad limitada", *Oikos* Nº 26, 117 – 135, Escuela de Administración y Economía, Universidad Católica Silva Henríquez (UCSH), Santiago de Chile
[http://edicionesucsh.cl/oikos/]

Fecha de recepción: 19 / 06 / 2008
Fecha de aprobación: 06 / 11 /2008