



## NEUROIDENTIFICADOR BASADO EN FILTRO DE KALMAN

(Kalman Filter based Neuroidentifier)

**Hanna Aboukheir**

Universidad Rafael Belloso Chac n - Venezuela

[hanna2k2@hotmail.com](mailto:hanna2k2@hotmail.com)

### RESUMEN

El uso de las redes neuronales en la identificación de sistemas ha sido utilizado y estudiado extensivamente, estableciendo la red neuronal feedforward como un modelo en función de transferencia y una red retroalimentadas como un modelo en espacios de estado, esta última posee la desventaja de que en la mayoría de los casos no converge a los valores deseados, por lo que se propone utilizar una red feedforward acoplada a un Filtro de Kalman para la predicción y posterior identificación de un modelo lineal en espacios de estado, la propuesta es evaluada sobre un motor DC real.

**Palabras Clave:** Identificación de Sistemas, Filtro Kalman, Redes Neuronales

### ABSTRACT

The use of neural nets on system identification has been studied extensively establishing the feedforward neural nets as a transfer function and feedback neural nets as a model in state space, this one posses the disadvantage that in most of the cases it does not converge on desired values, for this reason, a Kalman Filter is coupled with a feedforward neural net for prediction and later identification of a linear model in state space. The proposed method is evaluated on a DC motor.

**Keywords:** System Identification, Kalman Filter, Neural Nets

### Introducción

Con el uso creciente de la informática, la visión y la robótica, los sistemas distribuidos para procesamiento de la información y las redes de sensores virtuales entre otros, se ha incentivado el estudio y diseño de sistemas complejos de producción como lo son los procesos de manufactura. Esto ha planteado un conflicto de paradigmas en el modelado y control de sistemas industriales, específicamente en aquellos fundamentados en el uso de técnicas basadas en modelos matemáticos y otros que emplean métodos basados en inteligencia artificial que claman no necesitar el uso de modelo alguno.

El objetivo de este trabajo consiste en desarrollar un método híbrido en el cual se mezclan las metodologías de entrenamiento de redes neuronales y la efectividad del Filtro de Kalman, para construir un modelo matemático de la planta en espacios de estados que se desea controlar. De esta manera la identificación de la planta, se realiza en dos etapas:



- Se construye un Filtro de Kalman ad-hoc, para predecir la salida, los estados actuales y los estados futuros.
- Se emplea una red neuronal para resolver el problema de programación dinámica que producirá el mejor modelo posible de la planta de acuerdo a la funcional de calidad dada.

En [1,2] se plantea el uso de redes neuronales tipo retroalimentadas para la obtención de modelos no lineales en espacios de estados, en este trabajo se plantea utilizar una red neuronal tipo feedforward para resolver el problema de identificación, el objeto es garantizar una convergencia más rápida y un menor número de datos para el experimento, pudiendo optimizar esta aplicación para un procedimiento en línea, tal y como se mostrara en los apartados siguientes

### Preliminares del Filtro de Kalman.

Con la finalidad de establecer el método propuesto se procederá a establecer los principios de funcionamiento del Filtro de Kalman.

Es irreal asumir que los estados  $x(kT)$  est n disponibles por medición directa, particularmente si las perturbaciones son parte de los estados, es por consiguiente de sumo interés elaborar un método que permita estimar los estados partiendo de un modelo del proceso y las mediciones disponibles, asumiendo que el modelo se encuentra descrito en variables de estado según:

$$\begin{aligned} x(kT+1) &= \Phi x(kT) + \Gamma u(kT) + v(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) + w(kT) \end{aligned} \quad (1)$$

Donde  $v(kT)$  y  $w(kT)$  es ruido blanco gaussiano de media cero y el par  $(\Phi, C)$  es observable

Con la finalidad de estimar los estados en el modelo anteriormente presentado, se pueden construir distintos tipos de estimadores sujeto a las mediciones disponibles, suponiendo que se poseen mediciones:

$$m_k = \begin{Bmatrix} y(1) & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ y(n) & u(n) \end{Bmatrix} n > 1 \quad (2)$$

Se desea obtener el estimado  $x(kT + \omega)$ , de donde es posible plantear los siguientes casos:

- Predicción  $\omega > 0$
- Filtrado  $\omega = 0$

c) Suavizado  $\omega < 0$

Siendo el objetivo plantear la estructura del Filtro Kalman considere la representación del predictor de un paso de adelanto presentado anteriormente:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(kT+1|kT) &= \Phi \tilde{x}(kT|kT-1) + \\ & \Gamma u(kT) + K_E (y(kT) - C \tilde{x}(kT|kT-1)) \end{aligned} \quad (3)$$

El problema del filtro Kalman se reduce entonces, en obtener una matriz  $K_E$  que garantiza que la medición del error tienda a cero en el menor tiempo posible, se plantea entonces, el uso de la representación auxiliar en espacios de estado:

$$\begin{aligned} \xi(kT+1) &= \Phi * \xi(kT) + C * v(kT) + v(kT) \\ \psi(kT) &= B * \xi(kT) + w(kT) \end{aligned}$$

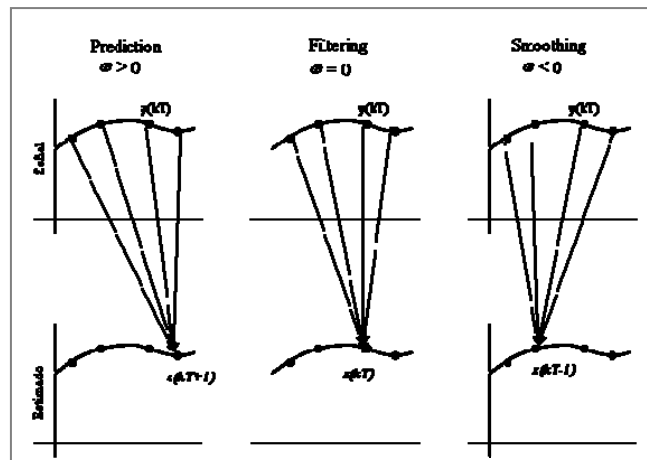


Figura #1: Suavizado, filtrado y predicción

Donde el problema de encontrar  $K_E$  correspondería a resolver el problema LQ del sistema equivalente, esto es minimizar:

$$J = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi^T Q_N \xi + v^T R_N v) \quad (4)$$

Utilizando la Ecuación de Ricatti en el dominio discreto:

$$\begin{aligned} P_E &= Q_N + \Phi *^T P_E \Phi * \\ & - \Phi *^T P_E C * (R_N + C *^T P_E C *)^{-1} C *^T P_E \Phi * \end{aligned} \quad (5)$$

Al igual que para el caso del observador de estado, la ganancia del Filtro Kalman será:

$$L_E = (R_N + C^*{}^T P_E C^*)^{-1} C^*{}^T P_E \Phi^* \quad (6)$$

Recordando que para la estimación de estado:

$$K_E = L_E^*$$

Las diferentes configuraciones de Filtro Kalman que resuelven los diferentes problemas de estimación se presentan a continuación:

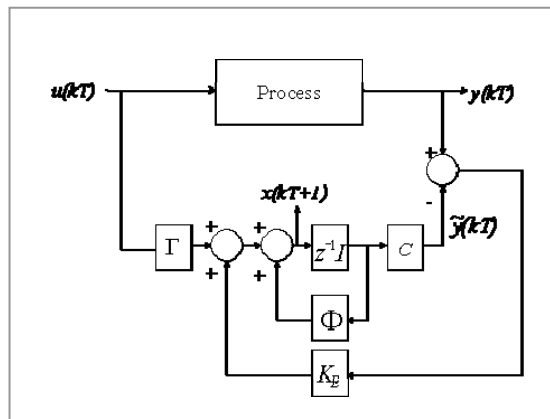


Figura #2: Filtro Kalman de Predicción  $\omega > 0$

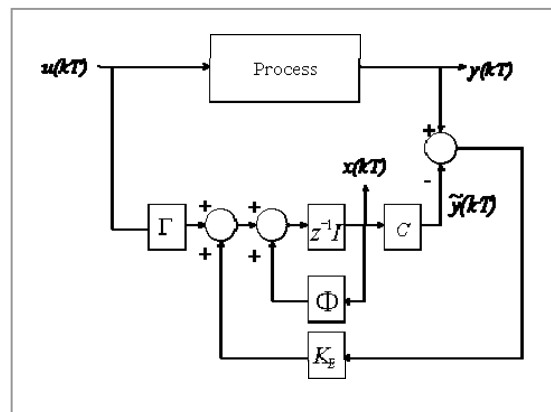


Figura #3: Filtro Kalman de Filtrado  $\omega = 0$

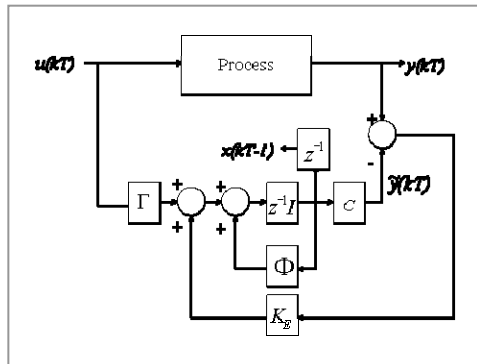


Figura #4: Filtro Kalman de Suavizado  $\omega < 0$

### Extensión del Filtro de Kalman para Identificación

Hasta el momento, el uso de un Filtro de Kalman ha sido especificado cuando se dispone de un modelo conocido del sistema, ahora se supone el caso donde el modelo del mismo no está disponible y desea ser estimado.

Suponga un sistema lineal invariante en el tiempo no necesariamente estable, cuyos pares de entrada  $u(kT)$  y  $y(kT)$  han sido obtenidos hasta un tiempo  $N$ , siendo el objetivo principal obtener el modelo matemático del proceso en espacios de estado se selecciona el caso  $\omega = 0$  del Filtro de Kalman.

Como no se dispone de los estados medidos se debe poner a funcionar el filtro de Kalman en línea con el proceso, suponiendo valores aleatorios para  $\Phi, \Gamma, C$  los cuales deben cumplir con los siguientes criterios:

- $(\Phi, C)$  debe ser observable
- $\Gamma = 0$  esto con la finalidad de minimizar el error de medición entre  $\tilde{y}(kT)$  y  $y(kT)$  de esta forma, es posible reproducir los estados deseados  $\tilde{x}(kT)$  y  $\tilde{x}(kT + 1)$  respectivamente.
- Obtener  $K_E$  vía ecuación de Ricatti, garantizando de esta manera que  $(\Phi - K_E C) \in D(0,1)$ .

Con esto en mente es posible construir el arreglo:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(kT + 1) \\ y(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(kT) \\ u(kT) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Con:  $\tilde{x}(kT + 1), y(kT)$  = los patrones de salida

$\tilde{x}(kT), u(kT)$  = los patrones de entrada

$\Phi, \Gamma, C$  = El modelo de la planta lineal a identificar.

Tomando como base a [3] se postula el siguiente teorema para estimar a  $\Phi, \Gamma, C$  mediante el uso de una red neuronal tipo feedforward:

**Teorema #1:** Sea una red neuronal de dos capas cuya función base es  $\sigma(x) = x$  con patrón de entrada el vector :

$$\varphi = \begin{bmatrix} \tilde{x}(kT) \\ u(kT) \end{bmatrix} \quad (8)$$

y patrón de salida:

$$y_r = \begin{bmatrix} \tilde{x}(kT + 1) \\ y(kT) \end{bmatrix} \quad (9)$$

El vector de parámetros que minimiza la distancia entre  $y_r$  y  $\varphi$  esta descrito por:

$$\theta_w = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

*Demostración:* La red neuronal feedforward con funciones de base lineales, esto es,  $\sigma(x) = x$  se describe como:

$$y(k) = W_{ij} x(k)$$

para el caso particular, al poseer 2 capas y patrón de entrada igual a  $\varphi$  y salida igual a  $y_r$ , entonces la red se convierte en:

$$y_r(k) = w_{21} w_{1i} \varphi$$

Considere el caso en el que existen "m" pares de entrada y salida,  $\varphi$  posee "n" regresores, entonces  $w_{2i}$  es la matriz de pesos de la capa de salida de dimensión  $m \times n$  y  $w_{1i}$  es la matriz de pesos de la capa oculta de dimensión  $n \times n$ , siendo el producto matricial:

$$W_T = w_{2i} w_{1i} = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & \cdots & w_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Una matriz  $m \times n$  de pesos de la red, por lo cual:

$$y_r(t) = W_t \varphi$$

De donde es posible notar que:

$$\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & \cdots & w_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \hat{\theta} \equiv W_t \Rightarrow \theta_w$$

donde los pesos de la red corresponden a cada uno de los parámetros a identificar en  $\theta$  por lo que es válido concluir que se puede obtener un modelo paramétrico donde el predictor será:

$$\tilde{y}(t) = \theta_w \varphi \quad \text{QED}$$

**Corolario #1:** El número de neuronas en las capas ocultas en una red neuronal propuesta como el teorema #1 está determinado por el orden del modelo a identificar en  $\theta_w$ .

Si el caso fuese un sistema no lineal, donde la aproximación utilizando funciones base lineales resulta insuficiente, es posible extender el teorema #1 al caso no lineal tal y como lo plantea el siguiente Teorema:

**Teorema #2:** Dado un vector de salida y un vector de entrada,  $y_r$  y  $\varphi$  como en (8) y (9) respectivamente la red neuronal que minimiza la distancia entre ellos está descrita por:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(kT + 1) \\ y(kT) \end{bmatrix} = w_{21} \sigma_{NL} \left( w_{1i} \begin{bmatrix} x(kT) \\ u(kT) \end{bmatrix} \right) \quad (11)$$

Donde  $\sigma_{NL}$  es una función base no lineal la cual puede tener una de las siguientes representaciones:

a) Función Sigmoide:

$$\sigma_{NL}(x) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-\theta)}} \quad (12)$$



b) Tangente Hiperb  lico:

$$\sigma_{NL}(x) = \frac{1 - e^{-a(x-g)}}{1 + e^{-a(x-g)}} \quad (13)$$

c) Base radial

$$\sigma_{NL}(x) = e^{\left(\frac{(x-a)^n}{2 * g^2}\right)} \quad (14)$$

donde  $a \in \mathfrak{R}$  y  $g \in \mathfrak{R}$ , son constantes reales denominadas ganancia y umbral respectivamente, todas estas funciones est  n adscritas a un espacio de Sobolev.

Es evidente que cuando es utilizado el teorema #2, no es posible obtener un modelo parametrico en espacios de estado y por ende la red neuronal deja de ser el elemento de minimizaci  n y pasa a ser el modelo en si.

El procedimiento puede presentarse como un algoritmo de la forma siguiente:

- Paso #1: Seleccione cualquier valor  $\Phi, C$  observable y  $\Gamma = 0$ , construya el Filtro de Kalman. con (5) y (6).
- Paso #2: Estime en l  nea  $\tilde{x}(kT), \tilde{x}(kT + 1)$
- Paso #3: Con los estimados  $\tilde{x}(kT), \tilde{x}(kT + 1)$  y las mediciones  $u(kT), y(kT)$  construya  $y_r, \varphi$  seg  n (8) y (9)
- Paso #4: Si se desea un modelo lineal, utilice el Teorema #1
- Paso #5: Si se desea un modelo no lineal utilice el Teorema #2.
- Paso #6: si el modelo satisface se detiene sino vuelva al Paso #1.

### Aplicaciones

En este cap  tulo se presentan los resultados obtenidos al aplicar la t  cnica presentada anteriormente presentadas sobre un Motor DC para el teorema #1 y un Calentador el  ctrico para el caso del teorema #2.

#### *Ejemplo #1*

Considere un motor DC controlado por armadura cuya salida son las RPM del motor y su entrada el voltaje aplicado:



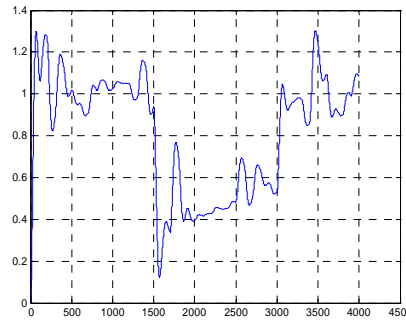


Figura #5: RPM del Motor DC

Con la finalidad de construir el Filtro de Kalman son seleccionados los siguientes valores de  $\Phi, \Gamma, C$  cumpliendo con los requerimientos previamente presentados:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el Filtro de Kalman para el caso  $\omega = 0$  de la planta en cuestión será:

$$K_E = \begin{bmatrix} 0.7321 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ahora, con el Filtro de Kalman construido se procede a estimar los estados del sistema al comparar la salida real de la planta con la salida del Filtro, tal y como lo muestra la siguiente figura:

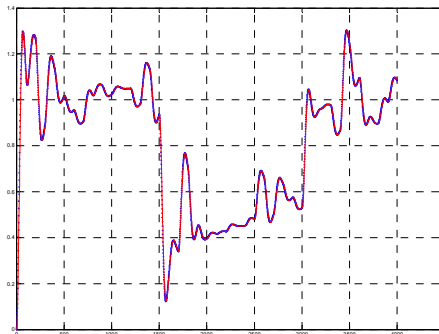


Figura #6: Salida Real vs. Salida del Filtro Kalman

Como se aprecia en la Fig.#6, el Filtro reproduce con precisión la salida real del proceso, por lo que es posible utilizar una red neuronal como la propuesta en el Teorema #1 para identificar el modelo.

Se seleccionó una red neuronal feedforward de 2 capas ocultas con funciones bases lineales, como se desea obtener un modelo de segundo orden, fueron utilizadas 2 neuronas en la capa oculta tal y como lo especifica el corolario #1.

A continuación se presenta la curva de entrenamiento de la red neuronal, la cual luego de 5 iteraciones alcanza un error inferior a  $10^{-9}$  :

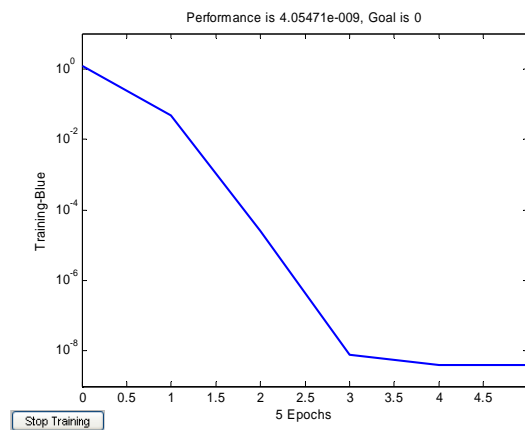


Figura #7: Entrenamiento de la Red Neuronal

El modelo en espacios de estado estimado será:

$$\tilde{x}(kT+1) = \begin{bmatrix} 1.9641 & -0.9662 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0.0021 \\ 0 \end{bmatrix} u(kT)$$

$$\tilde{y}(kT) = [2.6829 \quad -1.6857] \tilde{x}(kT)$$

### Ejemplo #2

El segundo caso corresponde a un calentador eléctrico, una planta no lineal cuya entrada es la corriente aplicada al circuito de calentamiento y la salida es la temperatura del horno

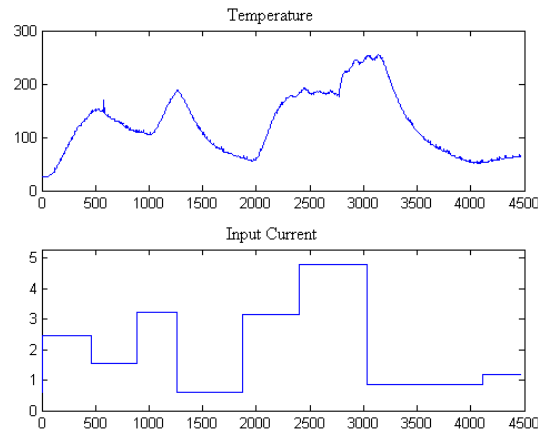


Figura #8: Calentador Eléctrico

Siguiendo el procedimiento se selecciona un  $\Phi, C$  arbitrario y observable para realizar la estimación del estado  $\tilde{x}(kT)$ , en este caso se selecciona:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = [1 \quad 1]$$

Al cumplir con el requisito de observabilidad se diseña el Filtro de Kalman correspondiente:

$$K_E = [0.36 \quad 0.36]$$

Tal y como lo plantea el Teorema #2, se selecciona una red neuronal feedforward de regresión generalizada o GRNN con funciones de activación de base radial como las presentadas en (13), de esta forma la red obtenida se compara con la salida medida en:

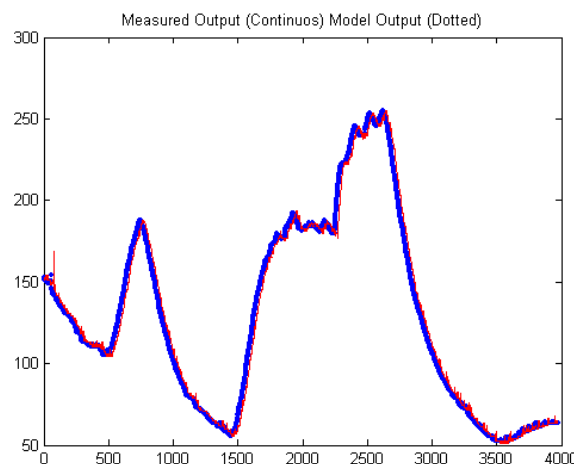


Figura #9: Planta Real vs. Modelo



Pudiendo observar como claramente la red ha reproducido la dinámica real del proceso con gran precisión

## CONCLUSIONES

Se ha podido presentar una técnica para la identificación de plantas utilizando el Filtro de Kalman y la programación neurodinámica, pudiendo integrar de manera efectiva ambas metodologías y apreciar su funcionamiento en la planta de prueba seleccionada.

Las redes neuronales retroalimentadas aunque efectivas involucran un mayor gasto computacional que su contraparte feedforward además de que no garantizan la convergencia a los valores deseados, todos estos problemas han sido resueltos al transferir los cálculos de los estimados al Filtro de Kalman dejando el trabajo de la red solo como elemento de minimización.

Las metodologías aquí planteadas pueden ser extendidas a todo tipo de procesos industriales tanto SISO como MIMO, y según los requerimientos del proceso es posible generar tanto modelos lineales como no lineales que lograrían aproximar con gran precisión la salida real de un proceso industrial, en futuras investigaciones se plantea utilizar las redes ANFIS y las wavenets como elementos de minimización y aproximación.

## REFERENCIAS

- [1] M, Norgaard. **Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic Systems**. Springer Verlag (2003)
- [2] J. Sjoberg et al. **Nonlinear black box modelling in system identification: A unified Overview**. Automatica. 31(12):1691-1724
- [3] H. Aboukheir. **Closed loop identification using Youla parameterization and neural nets**. Proceedings of 2006 American Control Conference (ACC 2006). Minneapolis, Minnesota, USA. (2006).
- [4] H. Aboukheir. **Sistemas de Control II**. Fondurbe (2006).