

## GEOMETRÍA Y FÍSICA: DE HERTZ A EINSTEIN

RAFAEL ANDRÉS ALEMAÑ BERENGUER  
Universidad Miguel Hernández (Elche, Alicante)

### RESUMEN

*Heinrich Hertz es bien conocido como descubridor experimental de las ondas electromagnéticas, predichas teóricamente en la obra de Maxwell, así como del efecto fotoeléctrico. No tanto se le recuerda por la interesante reconstrucción de la mecánica clásica que publicó en 1894 bajo el título Los Principios de la Mecánica. Y aunque son muchos los estudios realizados sobre las críticas de Ernst Mach contra los fundamentos de la mecánica clásica, menor es el número de los que analizan comparativamente su influencia sobre la mecánica de Hertz y la Relatividad General de Einstein. Ambas teorías pretendían incorporar la filosofía relacionista de Mach y, como veremos, ambas fracasaron en el empeño.*

### ABSTRACT

*Heinrich Hertz is well-known as discoverer of electromagnetic waves, forecast in the works of Maxwell. He is not so recognized as the author of one of the most interesting reconstructions of classical mechanics, which was published in 1894 and entitled The Principles of Mechanics. And despite the great number of studies on Mach's criticism against classical mechanics, there are not so many comparative analysis about his influence on Hertz's Mechanics and on Einstein's General Relativity. Both theories attempted to include the relationist philosophy of Mach, and both of them failed to achieve that goal.*

Palabras clave: Mecánica, Gravitación, Geometrización, Geometría, Física, Einstein, Hertz, Mach, Siglos XIX-XX.

Keywords: Mechanics, Gravitation, Geometrization, Geometry, Physics, Einstein, Hertz, Mach, 19<sup>th</sup>-20<sup>th</sup> Centuries.

## 1. Introducción

La filosofía positivista en boga durante el siglo XIX arrojó serias y justificadas dudas sobre la solidez epistemológica de la mecánica clásica. Repudiando toda metafísica, los seguidores de Auguste Comte (1798-1857) defendieron calurosamente una depuración de las ciencias —y especialmente de la física— de todos aquellos conceptos desligados de la percepción directa de nuestros sentidos. La física, lejos de construir una imagen abstracta y lógicamente congruente del mundo, debía limitarse a ofrecer esquemas formales mediante los cuales organizar nuestras sensaciones, con suficiente poder predictivo para resultar de utilidad práctica al género humano. La filosofía científica del positivismo vinculaba de este modo un firme rechazo a cualquier «oscuridad metafísica» en nuestro conocimiento con un compromiso igualmente firme con el progreso de la humanidad. La ciencia positiva habría de encontrar soluciones a los problemas prácticos de la gente común, sin adherirse a grandes visiones del cosmos empíricamente incontrastables.

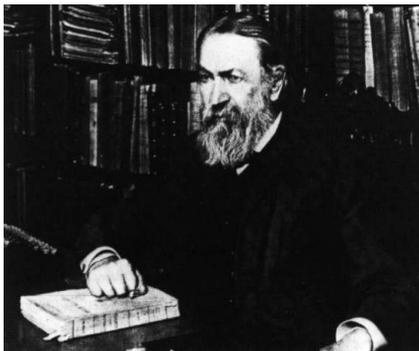
Un objetivo tan ambicioso como del de los positivistas no podía dejar de enfrentarse al espinoso debate sobre los fundamentos de la mecánica clásica. Ya Isaac Newton (1642-1727) había postulado la existencia de un espacio y un tiempo absolutos como marcos de referencia indispensables para la formulación de sus tres leyes del movimiento [NEWTON, 1726, p. 6]. Pero desde ese mismo momento, tales entidades quedaron sujetas a la controversia. Leonhard Euler (1707-1783), gran continuador de la obra de Newton, defendió en un principio el carácter absoluto del espacio y el tiempo como exigencia previa imprescindible para la formulación de las leyes del movimiento [EULER, 1736, I, pp. 2-3]:

«Lo que se ha dicho aquí acerca del espacio inmenso e infinito y de sus límites debe considerarse en cuanto concepto puramente matemático. (...) En efecto, no alegamos que haya tal espacio infinito, que tenga límites fijos e inmóviles, sino que, no preocupándonos de si existe o no existe, postulamos únicamente que quien deba considerar el movimiento absoluto y el reposo absoluto, tiene que representarse tal espacio a partir del cual se juzgue sobre el estado de reposo o de movimiento de los cuerpos (...).

Tal como Euler estaba señalando con sus palabras, persistía la duda sobre la naturaleza físicamente real del espacio y el tiempo absolutos, o si se trataba meramente de enteiquias imaginarias introducidas en la mecánica para el auxilio de los cálculos matemáticos. La necesidad de materializar de algún modo la evanescente idea de un espacio absoluto, estuvo en el origen del no menos insoluble «problema del éter» que embebió casi toda la física del siglo XIX.

El alemán Carl Neuman (1832-1925) buscó una salida a los enojos del espacio absoluto, proponiendo la existencia de un hipotético «cuerpo *alpha*» absolu-

tamente rígido, con respecto al cual podrían diferenciarse con total seguridad los movimientos inerciales de los no inerciales [NEUMAN, 1870]. Por desgracia pronto se hizo evidente que la introducción de un cuerpo ficticio cuya única característica era la inmovilidad absoluta, no pasaba de ser una simple sustitución verbal del mismo concepto; tanto daba decir «espacio absoluto» como «cuerpo alpha», si las consecuencias físicas eran las mismas.



Ernst Mach

El dilema parecía tan intrincado que el científico austriaco Ernst Mach (1838-1916) no vio más salida que una reconstrucción profunda de la mecánica clásica. Admiraba a Newton y apreciaba la importancia de sus descubrimientos, pero sostenía con la misma firmeza que la forma usual de presentar sus teorías estaba gravemente equivocada. A este respecto, Mach opinaba que el formato de la mecánica clásica se debía a un mero accidente histórico —podía haber preponderado el formalismo de Huygens en lugar del euleriano— y reflejaba la honda influencia que en ella tuvieron las convicciones teológicas de sus creadores [MACH, 1960, pp. 316 y 554].

No sólo rechazó la noción de fuerza por su presunta oscuridad metafísica, sino también el concepto de masa, que creía definible a partir de las aceleraciones que se imparten mutuamente pares de cuerpos en interacción<sup>1</sup> [MACH 1883, 1942, 1960]. Mach no pareció comprender que una elección tal implica, de hecho, aceptar la validez de las leyes de Newton, que sólo se cumplen en sistemas de referencia inerciales. Sin embargo, resulta inaplicable en cosmología, pues deja indefinida la masa total del universo. Tampoco encuentra acomodo en la mecánica de los medios continuos o en el caso de las masas atómicas. Nada de ello inquietaba a Mach, cuyos intereses mecánicos se limitaban a los movimien-

tos perceptibles por el ojo humano, ayudado quizás por ciertos instrumentos que suscitasen su confianza (cámaras fotográficas, telescopios o microscopios).

Entregado en cuerpo y alma a la refundación de la ciencia de su tiempo, Mach buscaba unificar la física —reducible, en su opinión, a la mecánica— con la fisiología de la percepción<sup>2</sup>. Su propia lógica le condujo a extirpar de la mecánica todos los conceptos que no fuesen cinemáticos<sup>3</sup>, ya que sólo estos —ligados a datos espaciales y temporales— son susceptibles de observación directa.

### La mecánica de Hertz

Tan profunda y justificada en algunos aspectos como pudiera ser la crítica de Mach, su análisis de la mecánica clásica resultaba meramente negativo. Considerado en su conjunto, no consistía más que en una desaprobación explícita de la fragilidad del armazón conceptual en el que se sustentaba la mecánica de Newton-Euler. Ciertamente, algunas de sus premisas se mostraban confusas, endebles y empíricamente discutibles; pero, ¿qué alternativa ofrecía Mach?

Ninguna en realidad, y ese fue uno de los acicates que impulsó a Heinrich Hertz (1857-1894) a elaborar su propia propuesta. La publicación de su obra monumental *Los Principios de la Mecánica* (Hertz, 1894) constituyó una declaración pública sobre la necesidad de refundar las bases conceptuales de la mecánica en bien de su consistencia lógica. La obra de Hertz apareció tras su muerte (el gran físico vivió sólo 37 años), razón por la cual no tuvo ocasión de asistir a los debates que suscitó ni argumentar en su defensa. En la introducción, Hertz reconoce su deuda intelectual con las ideas críticas de Mach [HERTZ, 1956, 6-9]. Sus instrumentos teóricos principales serán la distancia espacial, la duración temporal y la partícula material; ni la fuerza, ni la masa, ni la energía tienen cabida en la nueva lectura de la mecánica que hace Hertz<sup>4</sup>. Así, en uno de los pasajes donde sus opiniones al respecto aparecen con absoluta transparencia [HERTZ, 1956, p. 12] nos dice:

«El peso de una piedra y la fuerza ejercida por el brazo parecen ser tan reales, y tan fácil y directamente perceptibles como los movimientos que producen. Pero sucede algo distinto cuando nos fijamos en el movimiento de las estrellas. Aquí las fuerzas jamás han sido objeto de percepción directa; todas nuestras experiencias previas se relacionan tan solo con las posiciones aparentes de las estrellas. Ni esperamos en el futuro percibir tales fuerzas. (...) Es sólo en la deducción de experiencias futuras a partir del pasado, cuando las fuerzas gravitatorias entran como auxiliares transitorios en los cálculos, y desaparecen entonces de nuestra consideración. Precisamente lo mismo es cierto en la discusión sobre fuerzas moleculares, acciones químicas, y muchas acciones eléctricas y magnéticas. (...) Aquí tampoco las fuerzas reales han sido jamás objeto de experiencia previa; ni esperamos que lo sean en

futuras experiencias. Únicamente durante el proceso de deducción de futuras experiencias partiendo del pasado, entran y salen revoloteando con toda calma».

D'Alembert había tratado de proporcionar una visión unificada de la mecánica reduciendo la dinámica a la estática; Hertz emprendió un camino similar cuando trató de reducir la dinámica a la cinemática. Con ello evitaba recurrir a conceptos —como masa, fuerza o energía— que juzgaba prescindibles a causa de la excesiva laxitud con la que sus contemporáneos los interpretaban [BAC, 2000]. Hertz se decidió a conseguirlo invocando «movimientos ocultos» de partículas, a los cuales atribuir la complejidad de los movimientos visibles. Sin esos cuerpos ocultos, los objetos perceptibles no describirían más que movimientos simples. La idea resulta poderosamente atractiva: cualquier sistema mecánico (un agregado de partículas móviles con ciertas conexiones entre ellas) que se mueve de una manera más o menos complicada, puede considerarse incluido en un sistema mayor, algunas de cuyas partes no son observables, el conjunto del cual se mueve de una forma mucho más simple.

Hertz comienza por tomar una colección de partículas en el espacio euclídeo tridimensional, donde la posición del sistema es el agregado de las posiciones de cada uno de sus componentes. Como en la mecánica de Lagrange, un conjunto de  $n$  partículas se representa con  $3n$  coordenadas en total. La trayectoria de un sistema vendrá dada por la totalidad de sus posiciones a lo largo del tiempo. Entre dos posiciones sucesivas infinitamente próximas se dice que hay un «elemento de trayectoria» o «camino elemental». La magnitud de la trayectoria de un sistema entre dos posiciones dada, se define como el promedio ponderado con la masa (en el sentido que Hertz atribuye a este término, como veremos un poco más adelante) de los correspondientes desplazamientos de las partículas individuales. En concreto, si la posición  $x$  se compone de  $3n$  coordenadas  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_p, x_{3n}\}$ , las masas se denotan como  $m_k$  (no todas las  $m_k$  son diferentes, ya que cada partícula posee tres coordenadas espaciales) y  $m$  es la suma de todas ellas, la trayectoria entre dos posiciones  $x'$  y  $x$  tendrá una magnitud  $s$ , dada por la igualdad

$$ms^2 = \sum_{k=1}^{3n} m_k (x'_k - x_k)^2 \quad (1)$$

Hertz considera que cada objeto físico se halla compuesto por un número determinado de partículas infinitesimales, todas ellas iguales, inmutables e indestructibles. La masa de un cuerpo concreto, así pues, se define como el cociente entre el número de partículas —«átomos» estaríamos tentados a decir— en ese cuerpo entre el número correspondiente a un objeto patrón. El gran físico alemán dio por sentado más adelante que este número podía obtenerse en la práctica mediante el uso de las balanzas.

Si dos trayectorias parten de una misma posición  $x$  para llegar respectivamente a  $x'$  y a  $x''$ , el ángulo se entre ellas queda establecido por la igualdad

$$\cos\theta = \frac{1}{m\mathfrak{S}\mathfrak{S}_2} \sum_{k=1}^{3n} m_k (x'_k - x_k)(x''_k - x_k) \quad (2)$$

Esta fórmula permite conocer la dirección de una trayectoria a partir de otra dirección elegida como referencia. Obviamente, las definiciones (1) y (2) son enteramente arbitrarias, pero también muy plausibles.

La trayectoria de un sistema se considera «recta» si tiene la misma dirección en todas sus posiciones, por otra parte, se juzgará «curva» si varía su dirección con la posición. La curvatura de la trayectoria se define como el límite del cociente de la diferencia de direcciones en los dos extremos de un elemento de la trayectoria, entre la magnitud de dicho elemento. Un elemento de trayectoria se dirá «más recto» que otro si su curvatura es menor. La trayectoria de curvatura mínima es aquella cuyos elementos presentan una curvatura menor que la de cualquier otro elemento de trayectoria con la misma posición y la misma dirección.

### La Ley Fundamental de la Mecánica Hertziana

Con su nuevo planteamiento, Hertz buscaba reorganizar axiomáticamente la mecánica de un modo que prescindiese, muy especialmente, de las acciones a distancia. Y creyó conseguirlo mediante su Ley Fundamental que hoy podríamos denominar «principio de mínima curvatura». Entre las partículas de un sistema mecánico existen vínculos especificados analíticamente mediante ciertas relaciones entre sus coordenadas. Si tales relaciones no dependen del tiempo, sino tan solo de las posiciones mutuas de las partículas, hablamos de un sistema «libre»; en caso contrario, se llamaría «ligado». Sentadas estas premisas, el lema fundamental de la mecánica de Hertz dice así: *Todo sistema libre permanece o bien en estado de reposo o bien en movimiento uniforme a lo largo de la trayectoria con curvatura mínima*. El objetivo de la mecánica, según el físico alemán, consistiría en investigar todas las consecuencias lógicas que se desprenden del anterior enunciado, y compararlas con los datos experimentales. Cabría objetar que la mayoría de los sistemas realmente existentes no son libres en absoluto. El ejemplo más sencillo es el de una partícula abandonada a si misma en un campo gravitatorio. Aunque la redujésemos inicialmente al reposo, una vez se deja en libertad no permanece quieta en absoluto.

A ello Hertz respondió suponiendo que los sistemas ligados pueden suponerse pertenecientes a un sistema libre mayor, algunas de cuyas partes no percibimos directamente. Los movimientos de los sistemas libres, o de aquellos que no

lo son pero obedecen el principio de mínima curvatura, se llaman *movimientos naturales*. Deducimos la existencia de los cuerpos ocultos —que reunidos con los visibles formarían el sistema libre total— precisamente porque los cuerpos observables no se describen movimientos naturales.

Hertz sabía que el recurso a masas ocultas ponía en entredicho la respetabilidad epistemológica de su teoría. Por eso tuvo buen cuidado en destacar que (1) tales masas eran necesarias para la consistencia lógica de su sistema y (2) la fuerza y la energía de la mecánica clásica también eran entidades ocultas —de una clase espacial, además— en tanto sus masas son cuerpos ordinarios, solo que no visibles [HERTZ, 1956, p. 25]:

«Si tratamos de comprender los movimientos de los cuerpos a nuestro alrededor, y referirlos a reglas simples y claras, prestando atención sólo a lo que puede ser directamente observado, nuestra tentativa fallará en general. Pronto nos percataremos de que la totalidad de las cosas visibles y tangibles no forman un universo sometible a una ley, en el cual los mismos resultados se sigan siempre de las mismas condiciones. Llegamos a convencernos de que la multiplicidad del universo real debe ser mayor que la variedad del universo que se nos revela directamente por medio de nuestros sentidos (...).

Si deseamos obtener una imagen del universo que esté bien aquilatada, completa y conforme a la ley, hemos de suponer, tras las cosas que vemos, otras, cosas invisibles —hasta imaginar agregados ocultos más allá de los límites de nuestros sentidos (...).

Podemos admitir que hay algo oculto funcionando, y sin embargo negar que ese algo pertenezca a una categoría especial. Somos libres de suponer que ese algo oculto sea de nuevo nada más que movimiento y masa. —movimiento y masa que difieren de los visibles no en sí mismos sino en relación a nosotros y a nuestros medios usuales de percepción».

Es importante subrayar que la consistencia lógica de la mecánica hertziana exige invocar la existencia de cuerpos y movimientos en el universo, muchos de los cuales no son directamente discernibles por el observador. No era una idea tan extraña; Urban LeVerrier había predicho correctamente la existencia Neptuno en 1846 basándose en las irregularidades del movimiento de Urano. ¿Por qué no pensar que sucede igual con el resto de los cuerpos de la naturaleza?

Así, la mecánica acaba expurgada también de la noción de fuerza, pues queda privada de cualquier desempeño en la teoría de Hertz. Si se introduce, aparece como la influencia mutua entre las partes no libres de un sistema libre más amplio y abarcador; es decir, siempre podemos imaginar que una parte de un sistema libre ejerce una «fuerza» sobre otra parte de ese mismo sistema. No es más que una cuestión de conveniencia.



Heinrich Hertz

La estrategia, empero, no deja de tener sus propias debilidades. En la mecánica clásica se postula una geometría espacial y una ley de fuerzas, de modo que su combinación permita deducir la trayectoria de las partículas como geodésicas del espacio escogido (análogamente sucede en Relatividad, adoptando, desde luego, la geometría espacio-temporal y cambiando las ecuaciones dinámicas). Hertz renuncia a las fuerzas, se limita a una cierta estructura espacial y postula que las trayectorias deben ser geodésicas de un cierto tipo. Como, en general, esto no es suficiente para obtener los mismos resultados que la mecánica clásica, el papel que allí desempeñaban las leyes de fuerzas, lo cumplen aquí las masas ocultas y sus movimientos.

Al fin y al cabo, que los movimientos de unos cuerpos influyan por su mera presencia sobre los movimientos de otros objetos, no deja de ser igualmente enigmático, ya recurramos al concepto de fuerza o ya prescindamos de él. Antes o después encontraremos que las derivadas segundas de la posición con respecto al tiempo de las partículas de un sistema, estarán relacionadas mediante ciertas funciones dependientes de las distancias —en ocasiones, de las velocidades y del tiempo— así como de magnitudes características (masas, cargas, etc.), que no resulta tan sencillo suprimir. Y sobre todo, ¿tiene sentido afirmar la existencia de objetos completamente iguales en todo, salvo por el hecho de que uno es observable y otro no? Significativamente Hertz no ofreció ejemplos concretos del modo en el que las masas ocultas operaban para producir los movimientos observables, por lo cual no es tan grande la ganancia obtenida si elegimos admitir su mecánica.

Mach, por su parte, leyó y alabó la obra de Hertz, como se demuestra por los elogios expresados en una de las secciones añadidas en la tercera edición alemana de su tratado *La Ciencia de la Mecánica* (1897). Incluso en 1909 (cuatro años después de la publicación por Einstein de su primer artículo sobre la Relatividad Especial, y dos tras la formulación realizada por Planck de la dinámica relativista del electrón), en el prefacio de su libro *Historia y raíces del principio de conservación de la energía*, dice [MACH, 1911, p. 11] de las ideas de Hertz que «...coinciden tan exactamente como resulta posible con las mías propias, considerando que Hertz fue un defensor de la física mecánica y atómica y un seguidor de Kant». En esta cita se pone de relieve cómo Mach, aun en medio de sus alabanzas, traba de marcar distancias con las posiciones físicas y filosóficas de Hertz.

### La Relatividad General de Einstein

Albert Einstein (1879-1955), el más celebre físico del siglo XX y auténtico icono de la ciencia de todos los tiempos, nunca negó la profunda impresión que las críticas de Mach habían dejado en su espíritu juvenil. Buena parte de ese análisis de las deficiencias de la mecánica clásica sustentaban las convicciones sobre el funcionamiento de la naturaleza que finalmente le llevaron a la Relatividad Especial [SANCHEZ RON, 1983]. Esa es una cuestión más allá de cualquier duda histórica razonable. Consideración aparte merece el caso de la Relatividad General, nacida en noviembre de 1915, cuando Einstein presentó ante la Academia Prusiana de Ciencias un artículo titulado «Las ecuaciones de campo de la gravitación». En él se condensaba el nervio de su teoría espacio-temporal de la gravedad, históricamente conocida como Relatividad General [EINSTEIN, 1915]. La teoría de Einstein describe los efectos de la gravedad, sustituyendo el entramado espacio-temporal plano de la Relatividad Especial —debido al matemático germanorruso Herman Minkowski (1864-1909)— por uno con curvatura diferente en cada punto.

Las variedades geométricas multidimensionales con curvatura variable dependiendo del punto considerado, habían sido estudiadas ya por el matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) en su venerable tesis *Sobre las hipótesis en las que se funda la geometría*<sup>5</sup>, leída en 1854 bajo la supervisión de su mentor, Carl Friedrich Gauss. Riemann demostró la posibilidad de clasificar todas las geometrías existentes —euclídeas y no euclídeas— sobre la base de su elemento de línea, entendido como una forma cuadrática diferencial  $(ds)^2 = g_{ij} dx_i dx_j$ . A partir del tensor métrico,  $g_{ij}$ , era posible construir el tensor de curvatura,  $R_{ijkl}$  (también tensor de Riemann, o de Riemann-Christoffel), del cual se podía obtener la información deseada. El hecho de que  $g_{ij}$  fuese definida positiva en los

espacios de Riemann, pero indefinida en Relatividad General, hizo aconsejable llamar «pseudo-riemanniano» al espacio-tiempo curvo de Einstein.

En el artículo fundacional de 1915, Einstein otorga escaso papel a los principios variacionales; no así en «Los fundamentos de la Teoría de la Relatividad General», una exposición más amplia y elaborada escrita en 1916. Allí se dedica la sección novena, titulada «Ecuación de la línea geodésica (o del movimiento puntual)» al cálculo de las trayectorias por medio de un principio que minimice el elemento de línea en el espacio-tiempo relativista. Dice Einstein [EINSTEIN, 1950, p. 154]:

«Como el «elemento de línea» es una magnitud definida independientemente del sistema de coordenadas, tiene también un significado independiente de la elección del sistema de coordenadas la línea trazada entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  del continuo cuadrídimensional, para la cual  $\int ds$  es un extremo (línea geodésica). Su ecuación es

$$\ddot{a} \left\{ \begin{matrix} p_2 \\ \hline \tilde{h}_i \end{matrix} \right\} = 0$$

Como es sabido, efectuando la variación indicada en esta ecuación, se hallan cuatro ecuaciones entre diferenciales totales que determinan la línea geodésica (...).

Tras una serie de manipulaciones simbólicas, el genio alemán llega a las ecuaciones usuales de la geodésica:

$$\frac{d^2 x_k}{d\tau^2} + \tilde{A}_{im}^k \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dx_m}{d\tau} = 0 \quad (3)$$

donde  $\Gamma_{lm}^k$  son los conocidos símbolos de Christoffel (o conexión afín), y  $\tau$  es el «tiempo propio» (tiempo medido por un reloj que se mueve con la partícula que describe la trayectoria).

Einstein, por tanto, no aplica el cálculo de variaciones a la curvatura de las trayectorias espacio-temporales, sino a su longitud. La búsqueda del movimiento natural, según esto, no descansa en la línea «más recta», sino en la «más corta». Podría parecer que ambas nociones van inextricablemente unidas, pero cometeríamos un error pensando así. Gracias a los trabajos de los prominentes matemáticos italianos Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) y Tullio Levi-Civita (1873-1941), auténticos padres del análisis tensorial, sabemos que las «geodésicas métricas» (líneas de mínima longitud) y las «geodésicas afines» (líneas de mínima curvatura) entre dos puntos sólo coinciden bajo ciertas condiciones. La más importante de ellas es la anulación de la derivada covariante de la métrica<sup>6</sup>.

Ocurre que las geodésicas se definen, en su concepción métrica, para un espacio riemanniano, como las líneas que minimizan la función longitud (tetradimensional, en el caso de la física relativista, con la signatura (1, 3) para la métrica). Pero las geo-



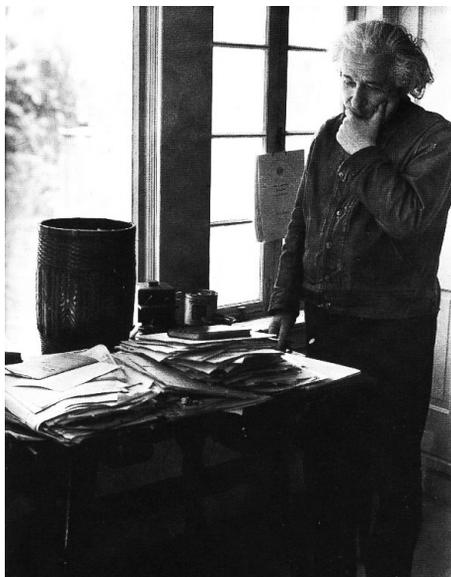
Bernhard Riemann

désicas «afines» se definen para una variedad cualquier —métrica o no— dotada de conexión afin. Esa es la concepción de Levi-Civita, de 1917, señalada arriba. Sin embargo, toda variedad riemanniana (con signatura o no) posee una conexión única, llamada precisamente la conexión de Levi-Civita, que es simétrica (la torsión es nula) e isométrica (la derivada covariante de la métrica es nula). Entonces coinciden el concepto afin y el métrico para las geodésicas. De hecho, en los espacios de Riemann la derivada covariante del tensor métrico es cero,  $D_\mu g^{\lambda\sigma} = 0$ .

A partir de esta igualdad puede obtenerse la siguiente expresión para los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (4)$$

El hecho de que la derivada covariante del tensor métrico fuese idénticamente nula, sugirió a Einstein la posibilidad de emplearla a modo de potencial gravitatorio, cuya divergencia también se anula en la gravitación newtoniana. Utilizando una forma simplificada del tensor de curvatura, llamada tensor de Ricci,  $R_{\mu\nu}$ , Einstein construyó un tensor que hoy lleva su nombre,  $G_{\mu\nu}$ , y dedujo a continuación las ecuaciones gravitatorias de la Relatividad General,  $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ . El tensor  $T_{\mu\nu}$  condensa todas las contribuciones de masa-energía (la equivalencia de ambos conceptos fue establecida a través de la célebre ecuación  $E = mc^2$ ) responsables de la curvatura espacio-temporal que comúnmente llamamos «grave-



Albert Einstein

dad». La atracción gravitatoria, así entendida, no es más que el efecto de la curvatura espacio-temporal, causada por el contenido de materia y radiación en una cierta región, sobre las trayectorias espacio-temporales situadas a su alrededor.

### Comparación entre ambas teorías

La nueva formulación de la mecánica elaborada por Hertz fue acogida con gran interés en un primer momento, y no pocos estudiosos vieron en ella un profundo y prometedor programa de investigación para las décadas posteriores, pero lo cierto es que los grandes pensadores de la época (Russell, Whitehead, Lorentz, Poincaré, etc.) la juzgaron insuficiente o incluso insatisfactoria. El hecho de que seis años después de su publicación la teoría cuántica iniciase sus rimeros balbuceos, seguida en 1905 por la Relatividad Especial, barrió por completo cualquier posibilidad de ahondar en lo que parecía tan solo un ingenioso replanteamiento de un asunto ya superado.

Pero no todo se debió al surgimiento de grandes teorías rivales. Lo que podríamos denominar con propiedad el «programa mecanicista de Hertz», resultó tempranamente desafiado por parte de la escuela energetista, la cual rechazaba cual-

quier compromiso ontológico con hipótesis sobre la estructura microscópica de la materia. Los empiristas radicales —como Ostwald y Mach— que dudaban de la existencia de los átomos, no podían sino mirar con grave circunspección las especulaciones de Hertz sobre los micro-corpúsculos que suponía constituyentes de la materia, cuyos cocientes relativos habían de sustituir la noción de masa. Esa idea, en sí misma, era notablemente controvertida: una de las claves en los razonamientos de Hertz era la suposición de que tales corpúsculos resultaba idénticos entre sí, pues en caso contrario carecía de sentido establecer proporciones numéricas entre partículas disímiles. Sin embargo, ¿cómo establecer la igualdad de los corpúsculos sino comparando propiedades, como la masa, que los empiristas rechazaban de plano? Las apelaciones de Hertz al uso de la balanza revelan una sorprendente ingenuidad, no sólo por su imposible extensión al ámbito microscópico, sino también por su improbable aplicación en escalas astronómicas. Pese a ello, no se tiene noticia de que incluso los más radicales empiristas pusiesen en duda la existencia de los cuerpos celestes.

Es cierto que Hertz adopta los sistemas de partículas, y no las partículas individuales y presuntamente elementales, como el ingrediente básico de su teoría. Pero ello no limitó sus aspiraciones acerca de una reformulación de toda la física —no sólo de la mecánica— sobre los cimientos que acaba de establecer. El siguiente asalto que Hertz hubiese emprendido, de no haberlo impedido su temprano fallecimiento, se dirigía a encajar el problema del éter dentro de su esquema mecanicista. Cuesta trabajo imaginar hoy día, cómo hubiese podido acometer mediante su método, no sólo la descripción de un material con propiedades contradictorias, sino un sistema con infinitos grados de libertad y, en general, la misma noción de campo. En efecto, en ausencia de la idea de fuerza<sup>7</sup>, las dificultades para construir una teoría mecánica de los medios continuos crecen hasta hacerse insalvables.

Hertz, al igual que Einstein años después, prosiguió la tradición ya entonces añeja de geometrizar la mecánica tanto como los procedimientos matemáticos disponibles lo permitiesen. Así se había intentado desde el descubrimiento de las geometrías no euclídeas y el auge de la geometría diferencial (Liouville, Bertrand, Serret, Minding, Riemann, Clifford, Beltrami, Lipschitz, Darboux, etc.), por no mencionar las obras de Lagrange y Hamilton, con la diferencia de que sus antecesores no siempre habían tratado de suprimir conceptos como los de masa y fuerza. Hertz, no obstante, fue el primero en utilizar métodos propiamente dichos de geometría diferencial en la mecánica. Y se vio aquejado por muy persistentes dudas sobre la definición de curvatura de una trayectoria que debía escoger [LÜTZEN, 2006]. Sus vacilaciones se originaban en la cuestión del transporte paralelo de un vector en un espacio multidimensional. Hubo que esperar a

la brillante reformulación de la geometría diferencial en términos de conexiones afines, llevada a cabo a comienzos del siglo XX por Ricci y Levi-Civita, para que el asunto quedase definitivamente saldado; pero en tiempos de Hertz, la respuesta distaba mucho de estar clara.

Algunos autores, interpretando quizás demasiado libremente la historia, atribuyen a Hertz el papel de precursor de Einstein, como defensor de una cierta manera de geometrizar la física insistiendo en la importancia de la curvatura de las trayectorias [GRIGORJAN y POLAR, 1964]. Otros van más allá y llegan a afirmar [UNSÖLD, 1970, p. 342]:

«...Hertz en sus Principios de la Mecánica ha anticipado una serie de modos de pensamiento físico (...) que sólo fueron redescubiertos y fructificados veinte años después por Einstein en su (...) teoría general de la relatividad».

Pero las diferencias superan con mucho las semejanzas; la obra einsteiniana se inscribe mejor en la senda de geómetras como Lipschitz, William Clifford o el propio Riemann, que en un mecanicismo de masas inobservables como el de Hertz.

La noción de componentes reducidas de un vector, que aparece en la mecánica hertziana, sí se corresponde con el moderno concepto de componentes covariantes. Hertz recurrió a ellas para preservar la forma de las ecuaciones de Hamilton, y consiguió de hecho una atractiva expresión geométrica de los momentos generalizados. A su vez, las nociones de ligaduras holónomas y no holónomas también introducidas por Hertz, pervivieron hasta convertirse en una parte insustituible de la mecánica analítica. Hertz admitió asimismo la posibilidad de que algunas de sus consideraciones hubiesen de modificarse cuando las velocidades en juego se aproximasen a la de la luz [HERTZ, 1895, p. 556], pero no debe entenderse con ello que atisbó los fenómenos relativistas más tarde revelados por Einstein.

¿Qué decir de Einstein y su concepción de la física? Muy poco en relación con Hertz, a quien no menciona como una de sus fuentes de inspiración, ni se considera deudor de su obra, porque casi con toda seguridad la desconocía en sus detalles profundos. Einstein no rechaza la noción de fuerza, sino que la subsume en la estructura geométrica del espacio-tiempo. Su objetivo era muy sencillo de explicar: supongamos que el mundo físico se representa adecuadamente mediante una variedad  $n$ -dimensional cuya geometría (tensor métrico  $g$ , y afinidad  $\Gamma$ ) viene dada por los datos experimentales. Entonces, ¿existe en esta variedad una dimensionalidad finita, una métrica y una conexión afín cuyas geodésicas coincidan con las trayectorias de todos los campos de materia y radiación? O dicho de otra manera, ¿existe alguna estructura geométrica capaz de incorporar la dinámica de todas las fuerzas físicas fundamentales, tal como la geometría espacio-

temporal de la Relatividad General incorporó en su estructura la fuerza gravitatoria? De hecho, la Relatividad General sólo aspira, inicialmente, a conseguir esto en el caso de la gravitación. El programa einsteiniano de geometrizar el resto de la física ampliando el marco de las geometrías diferenciales disponibles, no llegó finalmente a buen puerto.

Tampoco logró Einstein incorporar el famoso «principio de Mach» —jamás enunciado con suficiente claridad— según el cual la inercia de un cuerpo, medida por su masa, estaba originada en la presencia del resto de cuerpos en el universo. Un objeto solitario en un cosmos vacío no poseería inercia alguna, de acuerdo con esta opinión; cualquier fuerza aplicada produciría sobre él una aceleración infinita. La circunstancia de que el tensor de energía-impulso  $T_{\mu\nu}$  sea la fuente del campo gravitatoria en Relatividad General, infundió en el genio alemán la esperanza de que su teoría incluyese ese discutido principio. Análisis posteriores demostraron que no era así; la estructura geométrica del espacio-tiempo no queda completamente determinada por el contenido de materia y radiación que representa  $T_{\mu\nu}$ . Sin exceder el marco de la geometría pseudo-riemanniana usual las deducciones canónicas de las ecuaciones de la Relatividad General [WEINBERG 1972, p. 153] muestran la aparición de términos —el famoso «termino cosmológico»— que contribuyen a la curvatura espacio-temporal sin provenir del tensor de energía-impulso habitual.

Sí ocurre, no obstante, que las ecuaciones del movimiento se deducen en Relatividad General a partir de las ecuaciones del campo [EINSTEIN, 1938 y 1949; PAPAPETROU, 1957; MISNER, 1973; o FRIEDMAN, 1984]. Algo así no sucede en la mecánica de Newton-Euler, donde hemos de estipular por una parte la ley de fuerzas actuantes (gravedad, electricidad, magnetismo, etc), y por otro lado las ecuaciones dinámicas (específicamente, las leyes newtonianas del movimiento). La mecánica de Hertz no mejora la situación, dado que se prescinde de la ley de fuerzas nos quedamos tan solo con la ecuación del movimiento junto con una serie de condiciones (masas y movimientos ocultos) con un fuerte aroma *ad hoc*, que no contribuye a incrementar nuestra confianza en las bases epistemológicas de la teoría.

**TABLA COMPARATIVA ENTRE LA MECÁNICA DE HERTZ Y LA GRAVITACIÓN DE EINSTEIN**

	<b>Hertz</b>	<b>Einstein</b>
Geometría	Tridimensional (espacial) euclídea	Tetradimensional (espacio-temporal) no euclídea
Concepto de Masa	No	Ampliado a masa-energía
Fuerza	No	Absorbido en la estructura geométrica del espacio-tiempo
Principio Variacional (Geodésicas)	Sí	Sí
Ecuación del Movimiento	Postulado de la teoría	Deducida a partir de las ecuaciones de campo de la teoría
Espacio	Categoría kantiana <i>a priori</i>	Ente físico dinámico

## Conclusiones

En síntesis, la mecánica de Hertz y la gravitación de Einstein pueden juzgarse ambas como hijas de la tradición decimonónica de geometrización de la física, e influidas notablemente por la crítica de Mach contra la vacuidad física de ciertos conceptos básicos en la mecánica clásica. Las repercusiones intelectuales de Mach sobre Einstein parecen ínfimas, si es que hubo alguna. Einstein dispuso de mejores herramientas matemáticas y de una visión física más amplia y poderosa que la de Hertz, aun cuando los dos se propusieron una reforma radical de la ciencia de su tiempo. Ninguno de ellos logró incorporar de manera estricta las ideas de mach en sus respectivas teorías, o bien porque eran lógicamente insostenibles (la eliminación completa de las nociones de masa y fuerza) o bien porque resultaron físicamente erróneas (el origen relacional de la inercia). El Einstein de 1915, por ejemplo, se halla profundamente alejado de las concepciones instrumentalistas y empiristas tan queridas por Mach, que el Einstein de 1905, inmerso en la elaboración de la Relatividad Especial. Tras presentar la Relatividad General, el genio alemán siempre sostuvo que la ciencia se construye mediante la contrastación experimental de conceptos no engendrados directamente por la experiencia («libre creación del pensamiento»).

Parece seguro que la noción de fuerza no puede ser expulsada de forma consistente de la mecánica; no lo es tanto que futuras teorías acerca de la composición elemental de la materia no puedan encontrar finalmente un origen relacionista a la noción de masa, en línea —al menos aproximada— con los pensamientos de Mach. La prematura muerte de Hertz, en todo caso, nos privó de su juicio sobre los desarrollos posteriores de la física en la primera mita del siglo XX. Sin duda sus opiniones hubiesen sido de un valor inestimable, tanto para sus contemporáneos como para la posteridad.

## NOTAS

1. Una argumentación previa de Mach abordó tempranamente este mismo tema, aunque de manera inadvertida por el público, en Mach [1858, 4, pp. 355-359].
2. Véase para ello su conocida obra *Análisis de las sensaciones* (Mach 1886).
3. Podemos decidir si un enunciado concreto de teoría axiomatizada es una hipótesis o una definición a través de un procedimiento de lógica formal introducido por el italiano Alessandro Padoa (1868-1937). El método de Padoa [1900] demuestra la imposibilidad de reducir los conceptos de fuerza a nociones cinemáticas. Así se explica nítidamente en Suppes [1957].
4. Ecos de la obra de Hertz se perciben en la filosofía de la ciencia de Wittgenstein cuyo *Tractatus Logico-Philosophicus* (*Logisch-Philosophische Abhandlung*, 1921) tanto influyó en la epistemología del Círculo de Viena. Además de Russell y Frege, Hertz es uno de los pocos autores que aparecen mencionados en el libro de Wittgenstein.
5. Hay traducción inglesa comentada del texto original en Ewald & William [1996], y en Spivak [1979, 2, pp. 135-145].
6. No necesariamente ha de ocurrir así; en los espacios con torsión la derivada covariante de la métrica no se anula, y ha de tenerse en cuenta el tensor de no metricidad (naturalmente, se pueden dar espacios riemannianos con otra conexión, y de hecho los trabajos de Einstein posteriores a 1917 los contemplan). La torsión resultante suele relacionarse con la densidad de espín, en el intento de insertar las propiedades de los fermiones en el marco geométrico espacio-temporal.
7. En la mecánica hertziana, de hecho, el papel de las fuerzas lo desempeñan multiplicadores de Lagrange, cuya interpretación como ligaduras y vínculos entre los cuerpos de un sistema se deducen de consideraciones muy generales —de acentuado cariz filosófico— sobre la continuidad de los movimientos físicos.

## BIBLIOGRAFÍA

- BAC, M. (2000) «Structure versus process: Mach, Hertz and the normative aspect of science». *Journal of General Philosophy of Science*, 3, 39-56.

- EINSTEIN, A. (1915) «Die Feldgleichungen der Gravitation». *Sitzbuzger Berliner Preussische Akademie der Wissenschaft*, 48, 844-847
- EINSTEIN, A. (1916) «Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie». *Annalen der Physik*, 49, 769-867.
- EINSTEIN, A. (1950) *La Relatividad (memorias originales)*. Buenos Aires, Emecé Editores S.A., Traducción de Fidel Alsina Fuertes y Damián Canals Frau de las memorias originales, 1950.
- EINSTEIN, A.; INFELD, L.; HOFFMANN, B. (1938) «Gravitational equations and the problems of motion». *Annals of Mathematics (ser. 2)*, 39, 65-100.
- EINSTEIN, A. & INFELD, L. (1949) «Motion of particles in general relativity theory». *Canadian Journal of Mathematics*, 1, 209-241.
- EULER, L. (1736) «Mechanica, sive scientia motus analytice exposita». En: *Opera Omnia*, series II, vol. 1, 2-3.
- GRIGORJAN, A. T., POLAK, L. S. (1964) *Die Grundideen der Mechanik von Heinrich Hertz*. NTM, Beiheft.
- HERTZ, H. (1894) *Die Prinzipien der Mechanik in neuen Zusammenhange dargestellt*. Gesammelte Werke, Bd. III. Edición de P. Lenard; introducción de H. L. von Helmholtz, Leipzig, J. A. Barth.
- HERTZ, H. (1956) *The principles of mechanics, presented in a new form*. Traducción de D. E. Jones & J. T. Walley; introducción de R. S. Cohen, New York, Dover Publications.
- LÜTZEN, J. (2006) *A Mechanical Image: Heinrich Hertz's Principles of Mechanics*. Netherlands, Springer, 2006
- MACH, E. (1885) «Ober die Definition der Masse». *Carls Repertorium der Experimentalphysik*, vol. 4 (Munich), 355-359.
- MACH, E. (1883) *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*. Leipzig, 1883. Edición inglesa sobre la IX edición alemana: *The Science of Mechanics. A critical and historical exposition of its principles*, La Salle (Ill., U.S.A.), Open Court, 1942 y 1960.
- MACH, E. (1886) *Beiträge zur Analyse der Empfindungen*. Jena, 1886.
- MACH, E. (1900) *Die Analyse der Empfindungen und das Verhältnis des Physischen zum Psychischen*. Jena.
- MACH, E. (1911) History and root of the principle of the conservation of energy (P. E. B. Jourdain, Trans.). Chicago, Open Court. Traducción inglesa de la primera edición alemana, *Die Geschichte und die Wurzel des Stazes von der Erhaltung der Arbeit*, 1909.
- MACH, E. (1959) *The Analysis of Sensations and the Relation of the Physical to the Psychological*. New York, Dover.

- MISNER, C., THORNE, K., WHEELER, J.A. (1973) *Gravitation*. New York, Freeman & Co., 1973.
- NEUMANN, C. (1870) *Die Galilei-Newtonsche Theorie*. Leipzig, J.A. Barth.
- NEWTON, I. (1726) *Naturalis Philosophiae Principia Mathematica*. Editio tertia, Londini, Regiae Societatis Typographos, 1726, p. 6.
- PADOA, A. (1900) «Essai d'un théorie algébrique des nombres entières précédé d'un introduction logique à une théorie dédudivo qulcanque». *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie 1900-1903* (Paris), 3, 1901, 309-311.
- PAPAPETROU, A. (1957) «Le problème du mouvement dans la Relativité générale et dans la théorie du champ unifié d'Einstein». *Annales de l'Institute Henri Poincare*, 15(3), 173-203.
- RIEMANN, B. (1854a) «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen». *Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13 (1867), 133-152.
- RIEMANN, B. (1854b) «On the hypotheses which lie at the foundation of geometry». En: A. Ewald y B. William (eds.) *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. 2 vols., Oxford, Oxford University Press, 1996, 652-61.
- RIEMANN, B. «On the hypotheses which lie at the foundation of geometry». En: M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Second edition, Berkeley, Publish or Perish, 1979, 5 vols.; Vol. 2, 135 y ss.
- SÁNCHEZ RON, J.M. (1983) *El origen y desarrollo de la relatividad*. 1ª edición, Madrid, Alianza Universidad, 1983.
- SUPPES, P. (1957) *Introduction to Logic*. Princeton (N.J.), Van Nostrand, 1957.
- UNSÖLD, A. (1970). «H. Hertz' Prinzipien der Mechanik, Versuch einer historischen Klärung». *Physikalische Blätter*, 26, 337-342.
- WEINBERG, S. (1972) *Gravitation and Cosmology*. New York, Wiley & Sons Inc.

