



MODELO MATEMÁTICO PARA TRANSMISIONES HOLOGRÁFICAS TRIDIMENSIONALES

MATHEMATICAL MODEL FOR THREE-DIMENSIONAL HOLOGRAPHIC TRANSMISSIONS

Richard Primera
Universidad Rafael Belloso Chacín. Venezuela

RESUMEN

El presente trabajo de investigación presenta un modelo matemático tridimensional para solucionar los problemas de creación y transmisión de hologramas, ayudando a potenciar futuras investigaciones en el campo y permitir las comunicaciones holográficas vistas hasta ahora en películas de ficción. Esta investigación se propone exponer un modelo matemático capaz de ser utilizado para capturar, almacenar ó transmitir y reconstruir hologramas de solo fase en el espacio libre, los algoritmos de compresión necesarios para lograrlo también son expuestos. Se presentan conceptos acerca de la telemática y la óptica los cuales son importantes para la presente investigación. Una verificación del modelo es presentada y se comentan las conclusiones de la investigación.

Palabras Claves: Frente de Onda, Interferometría, Holografía, Modelos Matemáticos.

ABSTRACT

The present paper presents a three-dimensional mathematical model to solve the problems of creation and transmission of holograms, helping to harness future investigations in the field and to allow seeing holographic communications until now only in fiction films. This investigation sets out to expose a mathematical model able to be used to capture, to store or to transmit and to reconstruct holograms of single phase in the free space, the algorithms of compression necessary to obtain are also exposed. Concepts appear about the Telematic and the optics which are important for the present investigation. A verification of the model is presented and the conclusions of the investigation are commented.

Key Words: Front of Wave, Interferometric, Holographic, Mathematical Model.



INTRODUCCIÓN

Los hologramas tradicionales son creados interfiriendo dos fuentes de la luz. Si el patrón de interferencia se registra en cierto medio, una de las fuentes originales puede ser reconstruida reproduciendo la segunda fuente. El fenómeno físico de cómo las diversas fuentes interfieren entre ellas es un proceso bien conocido, el patrón de interferencia se puede calcular en un computador en vez de producirlo físicamente en un laboratorio. Este patrón calculado debe difractar teóricamente la luz exactamente de la misma manera que un holograma físico. Este método se conoce como holografía generada por computadora (HGC).

Todos los métodos conocidos hasta ahora para realizar hologramas son considerados en el plano bidimensional, la presente investigación ofrece un método el cual involucra los procesos para la elaboración de escenas holográficas en el plano tridimensional.

Sería maravilloso si la escena de la famosa Guerra de las Galaxias fuese realmente posible. En esta escena el robot R2-D2 proyecta un holograma animado de la Princesa Leia: Ella dice "Ayúdame Obi-Won-Kanobi...". Este fue un gran efecto especial; tanto así, que el público cree que la holografía ha alcanzado ese estado. El vídeo holográfico ha sido recreado en muchas películas, shows de televisión y novelas de ciencia ficción. Sin embargo, algunos trabajos se han realizado al respecto y se sigue investigando.

Hay muchos métodos para calcular un patrón de franja holográfico, cada uno de ellos varía en las ventajas y desventajas. El espacio de tiempo de cómputo y de almacenaje para la imagen resultante son los dos factores principales limitadores en la holografía computacional.

MODELOS MATEMÁTICOS

Un modelo matemático es la codificación de los eventos que ocurren en el mundo real, bajo signos que son utilizados por la ciencia de las matemáticas según Doucet y Sloep (1992). Se está familiarizado con las previsiones del tiempo, las cuales se basan en un modelo matemático meteorológico; así como con los pronósticos económicos, basados éstos en un modelo matemático referente a economía.

Es importante acotar que los modelos matemáticos existentes para el estudio y creación de hologramas, están representados en el plano bidimensional y más aun aquellos utilizados para los hologramas generados por computadora, estos no consideran los procesos de captura y



reconstrucción de la escena, ya que consideran la no existencia física del objeto, si no, una imagen digitalizada, esta la describen matemáticamente, planteándola como un holograma. A continuación se presentan los tres modelos matemáticos más utilizados para hologramas generados por computadora (HGC).

MOLDELO DE BROWN-LOHMANN

El primer holograma generado por computadora fue el creado por Brown y Lohmann en 1966. Este primer holograma fue capaz de establecer una imagen 2-D más que un volumen 3-D puesto que el algoritmo computó los patrones de difracción de Fraunhofer, y no los patrones de difracción de Fresnel (el tipo requerido para crear un holograma 3-D).

El HGC fue creado al computar la transformada de Fourier de la imagen, describiendo así la difracción de campo lejano, o difracción de Fraunhofer; éste régimen de difracción puede ser usado puesto que la imagen es 2-D y lejano al área de interés: el plano donde la interferencia esta siendo calculada.

Este HGC fue llamado holograma de fase desviada. Fue una aproximación que permitió la reconstrucción fuera de eje sin incrementar el producto del ancho de banda del espacio del holograma. La idea era considerar el HGC como una rejilla distorsionada, entonces una onda frontal cercana al primer orden sería avanzada o retrasada por la distorsión en la rejilla. Esta distorsión se llevó a cabo a través del desplazamiento de una de apertura de su posición normal. La cantidad del cambio de fase fue proporcional al desplazamiento de la rejilla de apertura; mientras más lejos la onda de su dirección inicial, más grande el retardo de la fase.

El holograma de fase desviada es binario, puesto que no hay escala de grises; cualquier área dada es opaca o transparente. Como resultado de esto, el mismo es un holograma de amplitud. El holograma es representado con unidades básicas llamadas celdas, éstas son regiones de igual tamaño. Una celda se divide en 2 aperturas cuyo ancho total depende de la magnitud de transformación. La posición de las aperturas en la celda depende del retardo de fase computado para esa celda.

El trabajo de Brown y Lohmann constituyó un avance significativo en el campo de la holografía. Por primera vez, el objeto del escenario holográfico no necesitaba existir físicamente. En lugar de esto, un modelo matemático del objeto fue guardado en la memoria de un computador. Este logro abrió un nuevo campo para la holografía.



Las dificultades con el holograma de fase desviada de Brown y Lohmann provinieron de algunas de las aproximaciones hechas en el algoritmo. Un error en la fase de desvío asociado con la división en celdas, causó una intensidad de imagen no homogénea. El error cuántico condujo a imágenes falsas. Huecos y sobre posición ocurrieron cuando la fase excedía (+) o (-) π . Un error de truncamiento también ocurrió cuando el holograma era más pequeño que la extensión espacial de la transformación. Estaba claro que se necesitaba mucha más investigación.

MODELO DE W. H. LEE

Lee (1970), desarrolló un método que descompuso la transformada de Fourier del objeto en componentes de 4 cuadraturas, la fase de cada componente fue entonces codificada en funciones discretas. La suma de estas 4 funciones representó la función discreta. Lee llamó a esto el Método de retardo de muestreo. Las cuatro funciones fueron representadas por aperturas en cuatro posiciones desplazadas.

Este método simplificó los cálculos requeridos para obtener los HGC; no se requiere fase de cuantización puesto que la transmisión de cada celda varía. Adicionalmente, la tasa de muestreo vertical es un cuarto de la tasa de muestreo horizontal, y por lo tanto alguna compresión del límite del ancho de banda fue alcanzada.

En ese mismo orden de ideas Lee desarrolló un algoritmo binario para HGC que no usaba el concepto de desvío de fase. Sus experimentos estaban basados en computar el holograma como un interferograma. Las franjas se determinaron por el conjunto de puntos que satisfacían las desigualdades envueltas en la fase de la onda reconstruida.

Él demostró la reconstrucción de frentes de ondas esféricos, cónicos y helicoides. Usando este tipo de hologramas fue capaz de analizar las dificultades con los hologramas de fase desviada. Los mayores problemas descubiertos fueron: a) La falsa señal asociada con el muestreo en puntos discretos en el plano del holograma, y b) La falsa señal que ocurría cuando las variaciones excedían a 2π .

BURCKHARDT

Burckhardt (1978), propuso un algoritmo similar que usaba 3 componentes en vez de 2. La calidad de los hologramas resultantes fue mejorada en comparación con los previamente posibles en cada caso.



Hay que resaltar que estos tres modelos abrieron las puertas a un sin fin de posibilidades en el diseño y creación de hologramas digitales, porque permitieron el entendimiento de los fenómenos presentados en ellos.

FUNDAMENTOS TELEMÁTICOS

En cualquier estudio donde sea necesario el análisis, diseño, interpretación o desarrollo de los conceptos que están involucrados en los sistemas de comunicaciones no puede obviarse la teoría de la información planteada por Shannon en 1949.

En este sentido a partir de la acelerada difusión y especialización que experimentaron los medios de comunicación en el procesamiento y transmisión de información durante la primera mitad del siglo XX, se desarrolla el primer modelo científico del proceso de comunicación conocido como la Teoría de la Información o Teoría Matemática de la Comunicación. Específicamente, en el área de la telegrafía donde surge la necesidad de determinar, con la máxima precisión, la capacidad de los diferentes sistemas de comunicación para transmitir información.

Así, la primera formulación de las leyes matemáticas que gobiernan dicho sistema fue realizada por Hartley en 1928 y sus ideas son consideradas actualmente como la génesis de la Teoría de la Información. Posteriormente, Shannon y Weaver en 1949 desarrollaron los principios definitivos de esta teoría. Su trabajo se centró en los problemas que surgen en los sistemas destinados a manipular información: a) Mejores métodos para utilizar los diversos sistemas de comunicación, b) Establecer un método para separar las señales del ruido y c) Determinar los límites posibles de un canal.

Asimismo, el concepto de comunicación en el contexto de la Teoría de la Información es empleado en un sentido muy amplio en el cual quedan incluidos todos los procedimientos mediante los cuales una mente puede influir en otra. De esta manera, se consideran todas las formas que el hombre utiliza para transmitir sus ideas: la palabra hablada, escrita o transmitida (teléfono, radio, telégrafo, etc.), los gestos, la música, las imágenes, los movimientos, etc.

Igualmente, Ruiz (1983) expresa que en el proceso de comunicación es posible distinguir tres niveles de análisis diferentes, a) Técnico, b) Semántico y c) Pragmático. En el nivel técnico se analizan aquellos problemas que surgen en torno a la fidelidad con que la información puede ser transmitida desde el emisor hasta el receptor. En el semántico se estudia todo aquello que se refiera al significado del mensaje y su interpretación.



Por último, en el nivel pragmático se analizan los efectos conductuales de la comunicación, la influencia o efectividad del mensaje en tanto da lugar a una conducta. Es importante destacar que la Teoría de la Información se desarrolla como una respuesta a los problemas técnicos del proceso de comunicación, pero sus principios pueden aplicarse en otros contextos.

INFORMACIÓN

Antes de analizar lo referido a la capacidad y fidelidad de un canal determinado para transmitir información, es necesario precisar los alcances de este último concepto. Según Wells 1993, El concepto de información es definido en términos estrictamente estadísticos, bajo el supuesto que puede ser tratado de manera semejante a como son tratadas las cantidades físicas como la masa y la energía.

Para Kuhlmann y Concheiro (1997) el concepto de información se relaciona con la libertad de elección se tiene para escoger un mensaje determinado de un conjunto de posibles mensajes. Si se presenta una situación en la que se tenga que elegir entre dos únicos mensajes posibles, se dice, de un modo arbitrario, según Shannon la información correspondiente a esta situación es la unidad. La Teoría de la Información, conceptualiza el término información como el grado de libertad de una fuente para elegir un mensaje de un conjunto de posibles mensajes.

También puede expresarse, que información supone la existencia de duda o incertidumbre. La incertidumbre implica que existen diferentes alternativas que deberán ser elegidas, seleccionadas o discriminadas. Las alternativas se refieren a cualquier conjunto de signos construidos para comunicarse, sean estas letras, palabras, números, ondas, etc.

En este contexto, las señales contienen información en virtud de su potencial para hacer elecciones. Estas señales operan sobre las alternativas que conforman la incertidumbre del receptor y proporcionan el poder para seleccionar o discriminar entre algunas de estas alternativas.

Resulta así mismo interesante asumir, que en los dos extremos del canal de comunicación fuente y receptor, se maneja el mismo código o conjunto de signos. La función de la fuente de información será seleccionar sucesivamente aquellas señales que constituyen el mensaje y luego transmitir las al receptor mediante un determinado canal.

En todo caso, al medir cuanta información proporciona la fuente al



receptor al enviar un mensaje, se parte del supuesto que cada elección está asociada a cierta probabilidad, siendo algunos mensajes más probables que otros. Uno de los objetivos de esta teoría es determinar la cantidad de información que proporciona un mensaje, la cual puede ser calculada a partir de su probabilidad de ser enviada.

Llama la atención, el tipo de elección más simple es el que existe entre dos posibilidades, en que cada una tiene una probabilidad de $1/2$ (0,5). Esto es significativo al momento de transmitir la información, por lo cual los algoritmos deben ser diseñados de tal manera que manejen esta figura de probabilidad.

ÓPTICA

Hay aspectos importantes en la óptica que son fundamentales para poder entender la propuesta de la presente investigación, estos pueden dividirse como se presentan a continuación:

NATURALEZA FÍSICA DE LA PERTURBACIÓN

1. Ondas Mecánicas, cuando la perturbación física es de naturaleza mecánica, por ejemplo: desplazamiento, velocidad, presión, torsión, etc.
2. Ondas Electromagnéticas, cuando la perturbación es un campo electromagnético.

DIRECCIÓN RELATIVA DE LA PERTURBACIÓN Y EL DESPLAZAMIENTO ONDULATORIO

1. Ondas Longitudinales: cuando la dirección de la perturbación física y de la propagación ondulatoria coinciden, por ejemplo: onda de sonido.
2. Ondas Transversales: cuando la perturbación física se realiza en un plano transversal a la dirección de propagación de la onda; por ejemplo: el desplazamiento de un pulso en una cuerda, ondas electromagnéticas, etc.

Cuando se trata de caracterizar una onda, algunos conceptos planteados por Mouroulis y Macdonald (1997), debe ser considerados como:

1. Foco, es el recinto donde se produce la perturbación inicial.
2. Superficie/Frente de Onda, se puede decir que es el lugar geométrico de los puntos en que han sido alcanzados simultáneamente por la



perturbación.

3. Velocidad de Fase, velocidad con la que se propagan las superficies de onda.

ECUACIÓN DE ONDAS

Del mismo modo que existe una ecuación general que determina el momento lineal, p , de una partícula (o conjunto de ellas) en función de la fuerza externa, F , la cual se representa en la siguiente ecuación 1:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (1)$$

(o bien $F = m d^2x/dt^2$ para el caso del movimiento monodimensional), existe también una ecuación, denominada ecuación de ondas, planteada por Freeman (1990), que se aplica a todos los fenómenos ondulatorios. La ecuación que describe el comportamiento ondulatorio de una perturbación física descrita matemáticamente como $u(x, t)$ que se propaga con velocidad constante v sin distorsión (onda no-dispersiva) a lo largo del eje x .

ONDAS EN TRES DIMENSIONES

Según Pedrotti y Pedrotti (1992), el frente de ondas de una onda tridimensional se distorsiona al propagarse es decir, la onda no es del tipo $u(x, y, z, t) = u(x-vt, y-vt, z-vt)$, la obtención de una ecuación de ondas similar a (1.2) para una perturbación ondulatoria tridimensional del tipo $u(r, t) = u(x, y, z, t)$ no es trivial. No obstante, existe un tipo muy importante de ondas tridimensionales en el que la propagación se realiza sin distorsión. Este tipo de ondas son las ondas planas.

Entendiendo que una onda plana es aquélla cuyo frente de ondas es un plano, es decir, aquella onda en la que se cumple que todas las superficies que en un instante dado tienen la misma fase son un conjunto de planos. Siguiendo un procedimiento análogo, según Pedrotti y Pedrotti (1992) una onda armónica plana que se repite en el espacio cada longitud de onda λ , puede expresarse como se ve en la ecuación 2.

$$u(r, t) = A \text{ sen } [2\pi / \lambda (k \cdot r - vt)] \quad (2)$$

De esta manera se tiene para deducir la ecuación de onda que debe satisfacer una perturbación ondulatoria tridimensional se operara usando la



onda plana armónica.

Explica Mesa (2002), lo que se conoce usualmente como luz según es una radiación electromagnética de longitud de onda comprendida entre los 400 nm y los 700 nm, en este sentido el estudio de la propagación de la luz debe ser realizado como una particularización de las ondas electromagnéticas. De esta manera se podrá entonces verificar cada uno de los aspectos de la misma, sin olvidar claro está, que puede comportarse como onda o partícula, según Albarrán (1998) y Mesa (2002).

ALGORITMOS DE COMPRESIÓN

Estos algoritmos son los encargados de comprimir en ratios manejables la data que se genera por medio de los procesos de intercambio de información conocidos, son los encargados de tomar la información y convertirla en paquetes discretos sean estos de tamaño fijo o variable.

CODIFICACIÓN DE HUFFMAN

Este método fue planteado por Huffman en 1952 y menciona que el mismo es una técnica basada en la entropía, siendo uno de los más antiguos y extensos métodos de compresión utilizados. Este substituye cada símbolo en la entrada por un palabra código, asignando palabras código más cortos a símbolos más frecuentes. La codificación de Huffman se utiliza para la compresión de texto y es usada a menudo como la etapa final en la compresión de líneas en JPEG¹⁸⁻¹⁹. Es un ejemplo de código de longitud variable, substituyendo bloques de la entrada del tamaño fijo por cadenas pequeñas.

CODIFICACIÓN DE LEMPEL-ZIV

Este algoritmo, expuesto por Ziv y Lempel (1977), se aprovecha de secuencias repetidas en los datos de entrada. En contraste con la codificación de Huffman, una cadena de longitud variable de símbolos de la entrada es substituida por palabras código de tamaño fijo (una referencia a la ocurrencia anterior de esa secuencia).

El tamaño de esta palabra código es el límite de la ventana (el número de símbolos previamente vistos que el algoritmo puede referir). Variantes del LZ77 aplican compresión adicional a la salida de la etapa de substitución. Un compresor estadístico tal como Huffman se elige a menudo para aprovecharse de las probabilidades desiguales de las palabras código de salida. Alguno de los formatos que utilizan este algoritmo son el formato ZIP



y la forma V.42 bis para modems. Este tiene ventajas y desventajas, que dependiendo de su utilización se logrará el objetivo del mismo.

CODIFICACIÓN DE LEMPEL-ZIV-WELCH

En la codificación Lempel-Ziv-Welch propuesta por Welch (1984), un diccionario (tabla de operaciones de búsqueda) de cadenas encontradas previamente se mantiene para hacer un uso más eficiente de las palabras código de referencia. Esto reduce substancialmente el número de comparaciones requeridas durante cada paso de codificación. El algoritmo LZW es un refinamiento popular de LZ78, permitiendo palabras código de tamaño variable cancelando antiguas cadenas del diccionario, como lo implementado en el algoritmo GIF (formato de intercambio grafico).

METODOLOGÍA APLICADA

La metodología utilizada para el desarrollo de la presente investigación se diseñó considerando aspectos relevantes mediante los cuales seria posible alcanzar el objetivo principal de la misma, el cual es proponer un modelo matemático para transmisiones holográficas tridimensionales, este diseño surge por la no existencia de uno que se ajuste a las necesidades y requerimientos del tema de estudio, quedando conformado por tres fases principales, las cuales son:

Fase I: Diseño del modelo matemático; en esta fase se desarrollan una serie de etapas que conformaran en conjunto el modelo, estas se presentan como: a) proceso de captura del objeto, b) proceso de almacenamiento del holograma y c) proceso de reconstrucción de la imagen.

Fase II: Verificación del modelo; se verificó la consistencia del modelo comprobándose a través de una prueba que el modelo matemático era lógico, consistente y pertinente, esta prueba se baso en hacer z igual a 0.

Fase III: Algoritmo de compresión; planteadas las dos fases anteriores solo quedaba por definir el mecanismo de compresión necesario para transmitir la información de la escena holográfica. El mismo se dedujo de una serie de comparaciones realizadas a tres de los algoritmos de compresión más utilizados en el mercado.



PROPUESTA

DISEÑO DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA TRANSMISIONES HOLOGRÁFICAS

Es importante señalar que los modelos matemáticos expuestos no consideran el proceso de captura del objeto real y su transformación en una imagen real, los mismos plantean la descripción matemático de una imagen digital y su aplicación como un holograma.

El modelo matemático propuesto consiste de tres etapas fundamentales las cuales se definen como a) proceso de captura del objeto real, b) proceso de almacenamiento y c) proceso de reconstrucción de la imagen real, a continuación se describirán cada una de ellas.

PROCESO DE CAPTURA DEL OBJETO REAL

Para llevar a cabo esta etapa, se realizó un análisis de los tres modelos matemáticos más utilizados observándose que estos no consideran este proceso al momento de realizar sus hologramas, ya que plantean la existencia del objeto de forma numérica y no real, por esta razón no es considerado este aspecto, tocó entonces analizar el proceso de captura de hologramas convencionales (aquellos que son grabados en placas holográficas).

En este orden de ideas según Kock (1972), deben considerarse los conceptos de a) frente de onda, b) transmitancia, c) amplitud compleja, d) fase, e) frente de onda incidente, f) patrón de difracción. Así mismo es importante describir el proceso a seguir para realizar el registro de los hologramas, este es el primer paso a considerar.

El registro de los hologramas debe realizarse con un sistema óptico basado en un interferómetro tipo Mach-Zehnder como puede verse en la figura 1. Un haz láser de ion Argon polarizado linealmente, con una longitud de onda de 514.5 nm, es dividido en dos, un haz de referencia y el haz del objeto. Ambos son expandidos y filtrados espacialmente. El primer haz ilumina el objeto desde un arreglo ccd con 2028 x 2044 píxeles, cada uno de ellos es de $9\mu\text{m} \times 9\mu\text{m}$, con 1024 niveles de grises.

La referencia a la distribución de amplitud compleja será dada por $\tilde{U}_0(x,y)$. El haz de referencia pasa entre el plato de media onda ($\lambda/2$) y por el plato de un cuarto de onda ($\lambda/4$), identificados en la como RP1 y RP2. El haz polarizado linealmente puede ser modulado en fase por rotación de los platos

retardadores.

Se tiene entonces con las permutaciones lentas y rápidas de los platos se pueden alcanzar los siguientes cambios de fase $0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. El haz de referencia combinado con la luz difractada desde el objeto forma un patrón de interferencia en el plano de la cámara.

Deben entonces utilizarse estos cuatro valores reales de la imagen para computar el plano complejo $\tilde{U}(x,y,z)$. A este campo computado se le llamara holograma. Estos pueden según las características de las cámaras ccd tener dimensiones de 2028×2044 píxeles y son representaciones de punto flotante con 8 bytes de información de fase por cada píxel. El objeto 3D es iluminado por un haz láser enfocado, se considera la región paraxial donde la teoría de difracción escalar puede ser aplicada. El patrón de difracción propagado por una ccd es descrito por aproximaciones de Fresnel como:

$$\tilde{U}(x',y') = A(x',y') \exp\{j\phi(x',y')\} \frac{1}{j\lambda} \int \tilde{U}(x,y,z) \exp\{jkz\} \exp\left\{\frac{jk}{2}[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]\right\} dx dy dz \quad (7)$$

Donde

x : es la longitud de onda

k : el número de onda

$A(x',y')$: amplitud del campo complejo

$\Phi(x',y')$: fase del campo complejo

$\tilde{U}(x,y,z)$: amplitud compleja del frente de onda del objeto y viene dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x,y,z) &= \tilde{U}_0(x,y,z) t(x,y,z) e^{j\phi(x,y)} \\ &= \tilde{U}_0(x,y,z) [1-a(x,y,z)] e^{j\phi(x,y)} \end{aligned} \quad (8)$$

La ecuación anterior esta conformada por términos como:

$a(x,y,z)$: es la absorción de luz por parte del objeto,

$\tilde{U}_0(x,y,z)$: el frente de onda incidente,

$t(x,y,z)$: transmitancia

Ahora se está en la capacidad de definir la distribución de amplitud compleja del frente de onda en el plano del holograma calculado por la integral de difracción de Fresnel-Kirchoff de la siguiente manera:

$$\tilde{U}_n(x,y) = \frac{1}{j\lambda d} \exp\left(j2\pi \frac{d}{\lambda}\right) \int_{\xi} \int_{\eta} \tilde{U}(\xi,\eta) \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda d} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\right\} d\xi d\eta \quad (9)$$

Donde;

λ : es la longitud de onda del rayo en x

d : es la distancia entre el objeto y el holograma.

$\exp[j2\pi d/\lambda]$: constante dada en el plano (x,y) como un factor de fase.

Hay que acotar que para el proceso de captura, el haz difractado interfiere en línea con una onda plana refractada (haz de referencia) por usar el divisor de haz BS2. Para reconstruir el campo complejo del objeto 3D como se describe en la ecuación 7 desde el holograma digital, es implantada una técnica holográfica digital de cambio de fase. Esta técnica es efectiva para remover la conjugada reconstruida, hay que acotar que este proceso necesita pasos computacionales que consumen tiempo de cómputo.

PROCESO DE ALMACENAMIENTO

Considerada como la etapa intermedia, se plantearon distintos problemas como lo fueron el ancho de banda a utilizar por la información del holograma, los algoritmos de compresión que deben ser usados para llevar a cabo de forma exitosa la transmisión o el almacenamiento de la escena holográfica.

Al respecto se analizaron documentos de científicos que han elaborado modelos matemáticos para los hologramas generados por computadora, acotando que han trabajado siempre en el plano bidimensional, mas no, para transmisiones tridimensionales; encontrándose que el propuesto por Lee se ajustaba a las necesidades de la presente investigación, este describe el proceso de la siguiente manera:

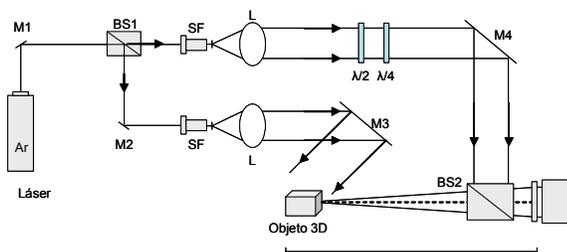


Fig.1. Interferometro Mach-Zenhder

El holograma es tratado como una composición numérica de los objetos, ya que el mismo no existe físicamente, lo observa como un interferograma,

la apertura del holograma es a las franjas en los interferogramas, la situación para el cual es dada por la siguiente ecuación:

$$2\pi x/T + \Phi(x,y) = 2\pi n \quad (10)$$

Las coordenadas del patrón formado por la interferencia de la onda del objeto $\exp[j\Phi(x,y)]$ con una onda plana $\exp[-j2\pi x/T]$ son dados por la solución de la ecuación 42, el patrón de franja generado por utilizar esta ecuación reproduce la onda del objeto $\exp[j\Phi(x,y)]$ exactamente en el paso de reconstrucción.

Un holograma convencional es formado por la interferencia de una onda plana de referencia $R \exp[-j2\pi x/T]$ con la onda del objeto $A(x,y)\exp[j\Phi(x,y)]$. Esta transmitancia es proporcionada por³:

$$t(x,y) = |R \exp(-j2\pi x/T) + A(x,y) \exp[j\Phi(x,y)]|^2 \quad (11)$$

$$= R^2 + A^2(x,y) + 2RA(x,y) \cos[2\pi x/T + \Phi(x,y)]$$

Y el tercer término de la ecuación anterior realiza la reconstrucción de la onda del objeto. Si la función $2RA(x,y)\cos[2\pi x/T + \Phi(x,y)]$, la cual sitúa los valores negativos y positivos de la función igual a 0 y 1, respectivamente, se tiene entonces:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{paracos}[2\pi x/T + \phi(x,y)] \geq 0, \\ 0 & \text{otrovalor} \end{cases} \quad (12)$$

La información de amplitud se pierde. El centro de la franja en $f(x,y)$ localizando a las soluciones de:

$$\cos[2\pi x/T + \Phi(x,y)] = L \quad (13)$$

Claramente la ecuación 10 implica la ecuación 12 y viceversa.

En lugar de usar el cero como el umbral, como en la ecuación 12, podemos reemplazarlo con una función $\cos\pi q(x,y)$. Equivalentemente la sinusoidal puede ser compensada con una función de diagonalidad y entonces extraerse con el umbral cero. La situación del borde es dado por las ecuaciones.

$$\cos[2\pi x/T + \Phi(x,y)] = \cos\pi q(x,y) \quad (14)$$

$$2\pi x/T + \Phi(x,y) = 2\pi n \mp \pi q(x,y) \quad (15)$$

Donde el borde superior determina el borde de dirección a y el borde inferior los arreglos b .

Le representación de la serie de Fourier de la salida binaria es:

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \pi m q(x, y)}{\pi m} \right] \quad (16)$$

$$x \exp\{jm[2\pi x/T + \phi(x, y)]\}$$

Donde Φ y q son constantes, la ecuación 16 es justamente la serie de Fourier de un tren de pulsos rectangulares. Al agregar la función $\cos \pi q(x, y)$ introducimos una fluctuación de amplitud para los diferentes términos en la expansión de la serie de Fourier de $f(x, y)$.

El primer método toma avances de la naturaleza 2-D de los hologramas por transformada de Fourier para registrar la información de la fase a lo largo de la dirección x y ajustando el alto de la franja en la dirección y para almacenar la amplitud. Más específicamente la altura de la apertura y como una función de x es obtenida para resolver la ecuación:

$$\cos 2\pi Y/\Delta = \cos \pi A(x, Y)$$

or

$$Y = n\Delta \pm \Delta A(x, Y)/2 \quad (17)$$

Excepto para la ausencia de una función de fase Φ , ecuación 17 y 14 son similares con $q(x, y)$ reemplazando para la función de amplitud $A(x, y)$ es normalizado a 0. Porque la información de amplitud varía despacio dentro del intervalo A , ecuación 17 puede ser aproximada por:

$$Y_n(x) = n\Delta \pm A(x, n\Delta)/s \quad (18)$$

Esta ecuación define el alto de todas las aperturas a lo largo de la línea de datos donde $y=n\Delta$. La situación de fase es determinada por la posición de la franja, y aquellas son conocidas usando la ecuación 14 con $q(x, y)$ fijo igual para $\frac{1}{2}$, el valor que produce las máximas eficiencias de difracción en el término $M=\pm 1$ en la ecuación 15.

La función de transmisión es:

$$T(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y) \quad (19a)$$

Donde;

$$f_1(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi p A(x, y)}{\pi p} \exp(j2\pi p y / \Delta) \quad (19b)$$

$$f_2(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin m\pi/2}{m\pi} \exp\{jm[2\pi x/T + \phi(x, y)]\} \quad (19c)$$

El orden difractado que contiene el termino $p=0$ y $m=\pm 1$ reproduce la onda de objeto.

El segundo método es menos complicado, utiliza la propiedad que el término $m=1$ en la ecuación (12). Tiene un factor de amplitud $\sin \pi q(x, y)/\pi$.

$$\sin \pi q(x, y) = A(x, y) \quad (20)$$

Se puede obtener la onda del objeto en el primer orden difractado ($m=\pm 1$). En este método la fase y la amplitud son registradas por la posición y la anchura de la franja a lo largo de la dirección de la frecuencia de portadora.

El tercer método completamente diferente a los métodos 1 y 2 en que la fase del objeto y la amplitud son combinadas y registradas por la superposición de dos hologramas de sólo fase. Este método ha sido usado en la sintetización de coeficientes de hologramas por Chu y Fienup, y más suficientemente en los hologramas de doble fase por Hsueh y Sawchuk. Poniendo esto simple, la superposición de dos hologramas generando un primer orden de difracción dada por la reconstrucción:

$$h(x, y) = \exp[j\Phi_1(x, y)] + \exp[j\Phi_2(x, y)] \quad (21)$$

Así

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \Phi(x, y) + \theta(x, y) \\ \Phi_2(x, y) &= \Phi(x, y) - \theta(x, y) + \pi \end{aligned} \quad (22)$$

Entonces

$$h(x, y) = 2j \sin \theta(x, y) \exp[j\Phi(x, y)] \quad (23)$$

Usando $\sin \theta(x, y) = A(x, y)$, la superposición de los dos hologramas de sólo fase producen un frente de onda con las variaciones de amplitud apropiados. Sin embargo, utilizando la ecuación 15 para determinar el patrón

de franja, el holograma tiene exactamente la representación de la serie de Fourier dada en la ecuación 16. Así la onda del objeto es reconstruida sin acudir a las aproximaciones de exactitud diferentes.

Más importante, cuando $\Phi(x,y)$ y $q(x,y)$ son constantes, el método presente produce un holograma idéntico, justo como se esperaría. Porque los HBGC contienen mucho orden de difracción, esto es importante que la frecuencia portadora $1/T$ sea suficientemente alta para evitar el espectro de solapamiento entre los diferentes  rdenes.

PROCESO DE RECONSTRUCCIÓN DE LA IMAGEN REAL

Luego de haber definido el objeto de forma numérica y realizado el proceso de captura y almacenamiento faltaba por concretar el paso correspondiente a la reconstrucción de la imagen real, obtenida desde un objeto real, este se realizó considerando el proceso inverso de captura y reconstruyendo el plano complejo de la imagen definida como $\tilde{U}(x,y,z)$, se realiza una correlación entre el objeto real U_o y $\tilde{U}(x,y,z)$, otro paso importante es la consideración del error y se presenta el cálculo de la evaluación del mismo.

La reconstrucción computacional del campo complejo del objeto 3D es calculada desde el holograma digital, obteniéndose por este medio una reconstrucción satisfactoria del objeto. Utilizando el campo complejo del holograma se puede entonces reconstruir numéricamente un objeto 3D por medio de la integral de Fresnel-Kirchhoff, como se describe en la siguiente ecuación.

$$R(x,y,z) = -\frac{1}{j\lambda} \int \int \tilde{U}(x',y') \exp\{-jkz\} \exp\left\{-\frac{jk}{2z} \left\{ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right\}\right\} dx'dy' \quad (24)$$

En el método propuesto que utiliza información de solo fase, la reconstrucción del objeto puede describirse:

$$P(x,y,z) = -\frac{a}{j\lambda} \int \int \exp\{j\varphi(x',y')\} \exp\{-jkz\} \exp\left\{-\frac{jk}{2z} \left\{ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right\}\right\} dx'dy' \quad (25)$$

Donde,

$$a = \left[\frac{\int |R(x, y, z)|^2 d_x d_y}{\int |P(x, y, z)|^2 d_x d_y} \right]^{1/2} \quad (26)$$

Así mismo puede evaluarse el error de reconstrucción de la imagen real por el siguiente criterio:

$$NRMS = \frac{\left[\int \left\{ |R(x, y, z)|^2 - |P(x, y, z)|^2 \right\}^2 dx dy \right]^{1/2}}{\left[\int |R(x, y, z)|^2 dx dy \right]^{1/2}} \quad (27)$$

Un holograma digital $H_0(x, y)$ contiene suficiente información de amplitud y de fase para la reconstrucción del plano complejo $\tilde{U}(x, y, z)$. Este puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\tilde{U}(x, y, z) = H_0(x, y) * h(x, y, z) \quad (28)$$

Donde

$$h(x, y, z) = -\frac{j}{\lambda z} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \exp\left[j\pi \frac{(x^2 + y^2)}{\lambda z}\right] \quad (29)$$

Siendo esta la función de extensión del punto para el espacio libre, λ es la longitud de onda, y $*$ es la operación de convolución. En $z = d$ y ignorando los errores en la propagación digital debido al espacio y al redondeo discreto, la reconstrucción digital $\tilde{U}(x, y, z)$ es aproximadamente $\tilde{U}_0(x, y)$.

Para la reconstrucción del frente de onda del objeto se realiza:

$$\psi(\xi, \eta) = A \exp\left\{ \frac{j\pi}{\lambda z} (\xi^2 + \eta^2) \right\} \int \int h(x, y) \exp\left\{ \frac{j\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right\} \times \exp\left\{ \frac{j2\pi}{\lambda z} (x\xi^2 + y\eta^2) \right\} d_x d_y \quad (30)$$

Se tiene también que la imagen difraccional, puede calcularse a partir de la amplitud compleja en el plano normal al rayo principal, a una distancia z' :

$$U(x', y', z') = \int \int A(x, y) \exp[j\Delta(x, y', x', y', z')] dx dy \quad (31)$$

Calculando por ultimo la entropía de la imagen en el mismo plano.

$$S(z') = \int \int P(x', y'; z') \ln[P(x', y'; z')] dx' dy' \quad (32)$$

VERIFICACIÓN DEL MODELO

Para comprobar que el modelo matemático propuesto en la presente investigación se encuentra entre los valores de coherencia, lógica y pertinencia debe ser verificado numéricamente, esta verificación se llevo a cabo asignando a z el valor de 0, por ser z la variable de tridimensionalidad, se obtuvo como respuesta un modelo bidimensional, concluyendo que el modelo matemático propuesto es consistente y puede ser considerado para futuras investigaciones en el área de la holografía. A continuación se presenta la prueba realizada a las tres ecuaciones mas importantes de modelo matemático, todas las demás depende de estas.

Haciendo $z=0$ en las ecuaciones 7, 24 y 25, se obtiene:

$$\tilde{U}(x,y) = A(x,y) \exp\{j\varphi(x,y)\} \frac{1}{j\lambda} \int \mathcal{Q}(x,y) dx dy \quad (33)$$

$$R(x,y) = -\frac{1}{j\lambda} \int \mathcal{Q}(x',y') dx' dy' \quad (34)$$

$$P(x,y) = -\frac{a}{j\lambda} \int \exp\{j\varphi(x',y')\} dx' dy' \quad (35)$$

FORMATO DE COMPRESIÓN

Varias técnicas de compresión para hologramas digitales creados por interferometria de cambio de fase, fueron analizadas. Así se obtuvo que las técnicas sin pérdida de datos pueden alcanzar índices de compresión de hasta 3.2, a su vez deben separarse la parte real de la imaginaria para llevar a cabo el proceso. Seleccionándose para ello el algoritmo de Lempel-Ziv-Welch²¹.

Este algoritmo está basado en las ideas de Lempel y Ziv²⁰, las cuales han sido perfeccionadas por Terry Welch en el año 1984. Comúnmente se le conoce como algoritmo de Lempel-Ziv-Welch o por sus iniciales, LZW. En lugar de trabajar con una ventana deslizante el algoritmo es del tipo diccionario. Esto último implica ir armando una tabla con cadenas de signos a medida que se van leyendo los datos de entrada.

Entonces a cada nueva cadena de caracteres que se agrega al diccionario se le asigna un código. Justamente, el efecto de compresión se produce al asignar un sólo código a varias grafías. Inicialmente, el diccionario debe tener como datos los elementos de la fuente a comprimir, asignándole



a cada elemento un código. Si la fuente es el conjunto de caracteres ASCII entonces a cada carácter le corresponde su código ASCII.

Para realizar la explicación del algoritmo de compresión se presenta un ejemplo. Suponga una fuente formada por el alfabeto {_, a, b, o, w}, donde el guión bajo representa un espacio, para mayor comodidad. Suponga además que la secuencia de caracteres a comprimir es la siguiente: wabba_wabba_wabba_wabba_woo_woo_woo la que indudablemente fue elegida adrede para que contenga secuencias repetidas de caracteres. De esta forma se arma el diccionario observado en la tabla nº 1.

El algoritmo es como sigue. Inicialmente el diccionario tiene cargado los 5 elementos de la fuente con sus correspondientes índices, que arbitrariamente en este ejemplo se han elegido del 1 al 5.

Se lee el primer carácter recibido, w, y se lo busca en el diccionario. Si está presente entonces se lee el carácter siguiente, a, y se forma la cadena wa. Se busca esta última en el diccionario. Como no está presente entonces se la agrega al diccionario en la columna Entrada (para que se pueda usar posteriormente) y se le asigna el índice 6. El código de salida (el que se transmite o se guarda en un archivo, etc.) es el 5.

Se analiza luego el segundo carácter de la secuencia, la letra a. Se lo busca en el diccionario y si está presente (como es en este caso) entonces se lee el carácter siguiente, la letra b, formando la cadena ab. Se busca ab en el diccionario.

Tabla N° 1
Diccionario de Ejemplo del Algoritmo LZW

Diccionario		
Salida	Índice	Entrada
	1	
	2	a
	3	b
	4	o
	5	w
5	6	wa
2	7	ab
3	8	bb
3	9	ba
2	10	a
1	11	w
6	12	wab
8	13	bba
10	14	a w



12	15	wabb
9	16	ba
11	17	wa
7	18	abb
16	19	ba w
5	20	wo
4	21	oo
4	22	o
11	23	wo
21	24	oo
23	25	woo
4		

Como no está entonces se la agrega al diccionario asignándole el índice 7 y transmitiendo el código de salida 2. El proceso continúa de esta manera.

Obsérvese qué ocurre luego de haber almacenado el índice 11 correspondiente a la cadena `_w`. Se lee a continuación el séptimo carácter de la secuencia que está entrando al compresor, la letra `w`. Se la busca en el diccionario. Como está presente se lee entonces el siguiente carácter de entrada, la letra `a`, y se forma la cadena `wa`.

Se la busca en el diccionario y si está presente (como es en este caso, en el índice (6) se lee entonces el siguiente carácter de entrada, la letra `b`, formando la secuencia `wab`. Se busca `wab` en el diccionario y como no está presente entonces se lo agrega asignándole el índice 12. El código transmitido es el 6 que corresponde al índice de la cadena `wa`. El proceso continúa hasta completar la tabla.

Nótese que al final se han transmitido 21 códigos, cuando para el caso sin compresión se hubiesen requerido 35 códigos, correspondientes a los 35 caracteres que conforman la secuencia de entrada. No obstante, hay que tener en cuenta que, para la transmisión sin compresión sólo se requieren 3 bits por carácter (para representar los 5 elementos de la fuente), mientras que para representar 25 índices se necesitan 5 bits lo cual va en detrimento de la compresión. Sin embargo, este algoritmo se hace realmente efectivo cuando la secuencia de caracteres es lo suficientemente extensa.

El algoritmo de compresión puede resumirse de la siguiente manera:

1. Al comienzo el diccionario contiene todos los elementos de la fuente, cada uno con su índice. Existe una variable `P` que está vacía.
2. `C:=` siguiente carácter leído de la secuencia de entrada.



3. ¿Está la cadena P + C en el diccionario?

a) Si está, entonces $P := P + C$;

b) Si no está,

i) La salida es el código que corresponde al carácter que contiene P;

ii) Agregar al diccionario la cadena P + C;

iii) $P := C$

c) ¿Hay más caracteres de entrada?

i) Si hay, entonces volver al paso 2.

ii) Si no hay, entonces la salida es el código correspondiente al carácter que contiene P y termina el proceso.

Si los caracteres iniciales del diccionario son los ASCII entonces los índices iniciales se enumeran desde 0 hasta 127 ó 255, según se usen 7 u 8 bits.

Ahora se vera cómo es el proceso de decodificación. Se tiene presente que, para el ejemplo visto, la secuencia que se transmite es 5, 2, 3, 3, 2, 1, 6, etc. Notemos que si en el receptor o decodificador tuviésemos un diccionario igual al que se ha armado la decodificación sería muy sencilla ya que cada vez que se recibe un código se lo busca en el diccionario en la columna de índice y se descomprime o decodifica la cadena correspondiente a ese índice.

Una solución no óptima sería transmitir al receptor el diccionario armado en la codificación, cosa que indudablemente hecha a perder el proceso de compresión llevado a cabo. Por lo tanto, la idea detrás del proceso de decodificación es tratar de armar el diccionario original pero sin que éste sea transmitido. ¿Será posible?

El diccionario reconstruido se puede formar con cuatro columnas: entrada, índice, diccionario y salida. Inicialmente debe contener los elementos de la fuente con sus respectivos índices del 1 al 5. A partir de ahí puede comenzarse a recibir la secuencia de datos codificados. El primer código que llega es el 5. Se lo busca en el diccionario en la columna índice. Si existe entonces la salida es el carácter asociado a dicho código, en este caso w.

Luego se recibe el código 2. Se lo busca en la columna índice. Si existe, entonces la salida es la cadena asociada, en este caso la letra a. Luego se arma una cadena entre la salida anterior (en este caso w) y el primer carácter

de la cadena de salida actual (la letra a), formándose wa. Se agrega wa en la columna diccionario y se le asigna el índice 6.

A continuación se recibe el código 3. Se lo busca en la columna índice. Si existe, entonces la salida es la cadena asociada, en este caso la letra b. Luego se arma una cadena entre la salida anterior y el primer carácter de la cadena de salida actual, formando ab. Se agrega ab a la columna diccionario y se le asigna el índice 7. El proceso continúa de esta manera.

En el momento que se recibe el código 6 se lo busca en el diccionario en la columna índice. La salida es la cadena asociada, en este caso wa. Luego se arma una cadena entre la salida anterior, _, y el primer carácter de la cadena de salida actual, formándose _w. Se agrega _w a la columna Diccionario y se le asigna en este caso el índice 11. Esto puede observarse en la tabla n° 2.

Tabla N° 2
Diccionario de Decodificación para el Algoritmo LZW

Entrada	Índice	Diccionario	Salida
	1		
	2	a	
	3	b	
	4	o	
	5	w	
5			w
2	6	wa	a
3	7	ab	b
3	8	bb	b
2	9	ba	a
1	10	a	
6	11	w	wa
8	12	wab	bb
10	13	bba	a
12	14	a w	wab
9	15	wabb	ba
11	16	ba	w
7	17	wa	ab
16	18	abb	ba
5	19	ba w	w
4	20	wo	o
4	21	oo	o

CONCLUSIONES

La exhibición de video holográfico, el cual aún no ha sido llevado a la práctica, ofrece la posibilidad de grandes avances en muchos campos. El diseño CAD, imágenes médicas, y las ciencias de la simulación son algunos



de los campos que pueden beneficiarse enormemente de tales dispositivos. La capacidad de reconstruir el paralaje binocular en una imagen es probablemente la señal más importante de profundidad que nuestros ojos y cerebro utilizan para procesar la información, por lo tanto perfeccionar técnicas para reconstruirla debe ser el tema de muchas investigaciones.

Se concluyó que el modelo matemático planteado era lógico, coherente y pertinente, luego de la verificación del mismo, así mismo, la utilización del algoritmo de compresión permite separar las partes reales e imaginarias para que luego puedan ser computadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albarrán, F. (1998). Manual de óptica geométrica. Universidad. de Valencia.
- Burckhardt, C. (1978). A simplification of Lee's method of generating holograms by computer. *Apl. Opt.* 9.
- Doucet & Sloep (1992). *Mathematical Modeling in the Life Sciences*. Ellis Horwood.
- Freeman, M. (1990). *Optics*, 10^a ed., Butterworths, London.
- Hartley, R. (1928). Transmission of information. *Bell Systems Technical Journal*. pp. 535.
- Huffman, D. (1952). A method for the construction of minimum redundancy codes, *Proceedings of the IRE*, vol 40, pp. 1098-1101, Sept.
- Kock, W. (1972). *Los rayos l ser y la holografía*. Editorial Universitaria de Buenos Aires.
- Kuhlmann, F., y Concheiro, A. (1997). *Información y telecomunicaciones*. Fondo de Cultura Econ mica.
- Lee, W. (1970). Binary computer-generated holograms. *Apl. Opt.* 18, 21, 3661- 3669
- Lohmann, A., and Brown. (1966). Binary fraunhofer holograms, generated by computer. *Apl. Opt.* 12, 1386 - 1388.
- Mateos, F. (1996). *Curso de introducción a la óptica geométrica*, Universidad de Alicante, Servicio de Publicaciones, 1996.



- Mesa, F. (2002). Fotonica aplicada a la computación y transmisión de información. Dept. de Física Aplicada, Ingeniería en Informática. Universidad de Sevilla.
- Mouroulis, T., Macdonald, J. (1997). Geometrical optics and optical design. Oxford University Press, Oxford.
- Pedrotti, F., & Pedrotti, L. (1992). Introduction to optics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Ruiz, L. (1983). Cibernética de lo humano. Madrid. Tecnos.
- Shannon, C. (1949). Communication in the presence of noise. Proc. IRE, vol. 37
- Shannon, C., y Weaver, W. (1949). The mathematical theory of communication.
- Wallace, G. (1991). The JPEG still picture compression standard, Communications of the ACM, vol. 34, pp. 30-44, Apr.
- Welch, T. (1984). A technique for high performance data compression, IEEE Computer, vol. 17, pp. 8-19, June.
- Wells, R. (1999). Applied coding and information theory for engineers. Prentice Hall.
- Ziv, J., and Lempel, A. (1977). A universal algorithm for sequential data compression. IEEE transactions on information Theory. vol. IT-23, pp. 337-343, May.