

# RELACIÓN ALTURA-DIÁMETRO GENERALIZADA PARA *QUERCUS ROBUR* L. EN GALICIA

M. Barrio Anta, J.G. Álvarez González, I.J. Díaz-Maroto y C.A. López Sánchez

Departamento de Ingeniería Agroforestal. Escuela Politécnica Superior. Campus Universitario s/n. 2700-LUGO (España). Correo electrónico: barrio@lugo.usc.es

## Resumen

La medición de la altura de los árboles se realiza habitualmente en una submuestra de árboles. Por tanto, es necesario obtener relaciones entre el diámetro normal y esta variable para poder estimar las alturas de todos los pies inventariables. Debido a que la curva de alturas varía con la edad, la calidad de estación y la selvicultura del rodal, es necesario incluir en el modelo variables de masa que tengan en cuenta el efecto de estos factores, obteniéndose las denominadas relaciones altura-diámetro generalizadas. En este trabajo se ha empleado una muestra de 4821 pares de datos altura-diámetro provenientes de 172 parcelas de *Quercus robur* repartidas por toda Galicia. Se han ajustado 9 relaciones diferentes, seleccionando la más adecuada en función de representaciones gráficas y el uso de estadísticos de comparación y validación cruzada.

Palabras clave: *Quercus robur*, Regresión lineal y no lineal, Validación cruzada

## INTRODUCCIÓN

El diámetro normal y la altura total son las dos principales variables que se miden en los inventarios forestales y su conocimiento es necesario tanto para la estimación de las existencias como para su uso en los modelos de crecimiento. El diámetro normal se puede medir en todos los pies de las parcelas de inventario con un coste bajo, en cambio, la medición de la altura total debido a su mayor dificultad tiene un coste más elevado, por lo que es medida en una muestra de árboles. Debido a esto se han desarrollado modelos de regresión que permiten estimar la altura de un árbol en función de su diámetro normal, bien mediante modelos lineales (NASLUND, 1937; MICHAÏLOFF, 1943, 1951) o más usualmente mediante modelos no lineales (HUANG et al., 1992), que pueden denominarse curvas altura-diámetro locales (PRODAN et al.,

1997). Tales modelos se ajustan separadamente para cada masa, rodal o estrato, lo que conlleva algunos problemas importantes cuando se intentan aplicar a las masas forestales (PRODAN et al., 1997; LÓPEZ SÁNCHEZ et al., 2003): (1) la curva de alturas de rodales jóvenes, en general, tiene pendientes más fuertes, mientras que a medida que aumenta la edad o se reduce la calidad, la curva se aplana; (2) la curva de alturas se desplaza con la edad, variando para cada clase sociológica; (3) los árboles que crecen en masas de elevada densidad tienen un diámetro menor, para la misma altura, que otros que crecen en masas menos densas, como consecuencia de la mayor competencia entre individuos.

Debido a estos problemas y para mejorar la estimación de la altura se han desarrollado los modelos altura-diámetro generalizados que incluyen variables de masa o de rodal que tienen en cuenta la calidad de estación y la densidad.

De este modo, una única ecuación permite estimar con bastante precisión la altura de cualquier árbol que pertenezca a una masa que se desarrolla dentro del ámbito de aplicación del modelo.

**MATERIAL Y MÉTODOS**

**Datos empleados**

Se ha utilizado la muestra de alturas y diámetros medidos en los árboles de cada una de las 172 parcelas permanentes instaladas por todo el ámbito de distribución de la especie en Galicia. En total se dispone de 4821 pares de datos altura-diámetro. En la tabla 1 se muestran los estadísticos descriptivos de las variables empleadas en el ajuste de los modelos altura-diámetro generalizados: *h* (altura total), *d* (diámetro normal), *dg* (diámetro medio cuadrático), *Hm* (altura media de la masa), *H<sub>0</sub>* (altura dominante), *G* (área basimétrica) y *D<sub>0</sub>* (diámetro dominante).

En la figura 1 se representa la nube de puntos altura-diámetro normal de la muestra empleada en el ajuste de los modelos.

**Procedimientos de ajuste**

Las ecuaciones empleadas han sido ajustadas por técnicas de regresión lineal y no lineal empleando para ello el procedimiento REG y NLIN del programa estadístico SAS/STAT® (SAS INSTITUTE, 2001).

La capacidad de ajuste de los modelos se ha basado en la obtención, a partir de los residuos de los siguientes estadísticos: sesgo ( $\bar{E}$ ), que evalúa la desviación del modelo respecto de los valores observados; error medio cuadrático (*EMC*) que analiza la precisión de las estimaciones y el coeficiente de determinación ajustado ( $R^2_{Adj}$ ), que refleja la variabilidad total que es

explicada por el modelo y que tiene en cuenta el número total de parámetros a estimar.

También se ha empleado como elemento de decisión el incremento del criterio de información de Akaike (*AIC*). En este trabajo se ha calculado el valor del *AIC* de cada modelo y se le ha restado el valor más pequeño, denominándose *AIC* en diferencias ( $\Delta_{AIC}$ ). Como el *AIC* se calcula como un logaritmo, el valor relativo se obtiene como una resta de los valores del *AIC* del modelo y el valor más pequeño. De esta manera se obtienen valores fáciles de interpretar que permiten una rápida comparación de los modelos candidatos (BURNHAM & ANDERSON, 2000).

Las expresiones de estos estadísticos derivan de los valores de los residuos del modelo y sus expresiones son las siguientes:

Sesgo: 
$$\bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)}{N}$$

Error medio cuadrático: 
$$EMC = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N - p}$$

$$R^2_{Adj} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \cdot \left( \frac{N - 1}{N - p} \right)$$

$$\Delta_{AIC} = N \cdot \ln \hat{\sigma}_j^2 + 2 \cdot K_j - \min(N \cdot \ln \hat{\sigma}_j^2 + 2 \cdot K_j)$$

siendo 
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}$$

| Estadísticos           | h     | d     | dg    | Hm    | H <sub>0</sub> | G     | D <sub>0</sub> |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|----------------|-------|----------------|
| Mínimo                 | 2,42  | 5,00  | 8,6   | 5,28  | 7,17           | 3,41  | 12,84          |
| Máximo                 | 31,60 | 71,60 | 39,99 | 23,30 | 25,58          | 72,88 | 56,90          |
| Media                  | 14,46 | 22,62 | 21,41 | 14,42 | 16,66          | 28,11 | 31,37          |
| Varianza               | 19,61 | 97,15 | 37,32 | 11,43 | 11,10          | 95,17 | 53,50          |
| Desviación estándar    | 4,42  | 9,85  | 6,10  | 3,38  | 3,33           | 9,75  | 7,31           |
| Coef. de variación (%) | 30,63 | 43,55 | 28,53 | 23,43 | 19,99          | 34,69 | 23,31          |

**Tabla 1.** Estadísticos descriptivos de los 4821 pares de datos empleados en el ajuste

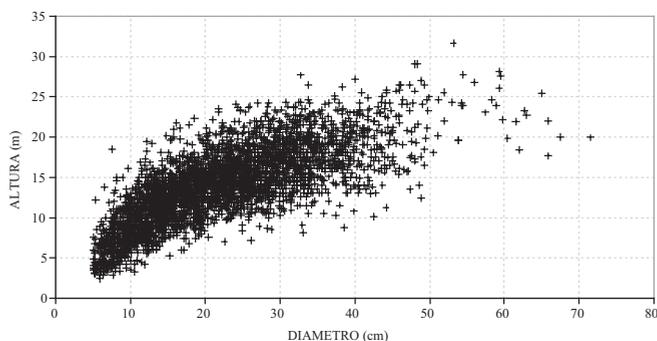


Figura 1. Gráfico de la altura total frente al diámetro normal para los datos usados

Donde  $Y_i$ ,  $\hat{Y}_i$  y  $\bar{Y}_i$  son los valores observado, predicho y promedio respectivamente;  $N$  el número total de datos usados en el ajuste del modelo;  $p$  el número de parámetros a estimar;  $R^2_{Adj}$  el coeficiente de determinación ajustado;  $K_j$  el número de parámetros del modelo  $j$  más 1 ( $K_j = p_j + 1$ ) y  $\hat{\sigma}^2$  el estimador de la varianza del error del modelo  $j$ .

Para analizar la capacidad predictiva de los modelos ajustados se ha realizado una validación cruzada por árbol (*leave-one-tree-out-cross validation*), metodología que se basa en el empleo de los residuos eliminados. Como en el caso de la fase de ajuste, se calcularon el sesgo, el error medio cuadrático, la eficiencia del modelo ajustada ( $MEF_{adj}$ , equivalente al coeficiente de determinación ajustado de la fase anterior) y el criterio de información de Akaike en diferencias, a partir de los valores de los residuos eliminados  $E_{(i)}$ . De acuerdo con estos estadísticos un modelo será mejor que otro si presenta un menor valor de  $\bar{E}$ , EMC y AIC y un mayor valor del  $R^2_{Adj}$ .

### Modelos empleados

Existen un gran número de ecuaciones que han sido empleadas en la modelización de la curva altura-diámetro. En un estudio reciente se recopilaron 26 modelos de estas características y se compararon empleando datos procedentes de parcelas de *Pinus radiata* D. Don instaladas en Galicia (LÓPEZ SÁNCHEZ et al., 2003). En la Tabla 2 se muestran los 10 modelos empleados en este trabajo, las referencias en las que se puede encontrar una descripción más detallada y un código de identificación con las letras HD (altura-diámetro) seguidas de un número de orden.

Los modelos de la tabla anterior, además de las variables de árbol, diámetro normal ( $d$ ) y altura total ( $h$ ), pueden incluir hasta seis variables de masa diferentes: altura dominante ( $H_0$ ); altura media ( $H_m$ ); área basimétrica ( $G$ ); diámetro medio cuadrático ( $dg$ ); diámetro dominante ( $D_0$ ) y edad ( $t$ ). Esta última variable puede aportar información al modelo cuando se trata de repoblaciones artificiales, pero carece de utilidad práctica en el caso de masas naturales por la dificultad de estimación; por tanto, se han descartado los modelos que incluyen la edad como variable independiente.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Figura 1, donde se representa la altura frente al diámetro, se puede observar que solamente un árbol del total de la muestra medida ha superado los 30 metros de altura. Esta situación es similar a la de los robledales ingleses, en los cuales es bastante difícil encontrar árboles maduros con una altura superior a los 25 m (SAVILL & SPILSBURY, 1991). Por el contrario, en la mayor parte de Europa es frecuente encontrar árboles de más de 40 metros de altura. Esta baja talla de los árboles y las frecuentes malas formas de los troncos han sido atribuidas a las cortas selectivas realizadas históricamente para abastecer a la Marina y a las importantes ferrerías existentes en el norte de España.

En la tabla 3 se muestran los valores de los estadísticos de comparación empleados para seleccionar los modelos en la fase de ajuste y en

| MODELO | REFERENCIA                         | VARIABLES       | ECUACIÓN   |
|--------|------------------------------------|-----------------|--|
| HD1    | HARRISON et al. (1986)             | $d, H_0$        | $h = H_0 \cdot \left[ 1 + \beta_0 \cdot \exp(\beta_1 \cdot H_0) \right] \left[ 1 - \exp\left(\frac{-\beta_2 \cdot d}{H_0}\right) \right]$  |
| HD2    | GADOW & HUI (1999)                 | $d, H_0$        | $h = 1,3 + \beta_0 \cdot H_0^{\beta_1} \cdot d^{\beta_2 \cdot H_0^{\beta_3}}$  |
| HD3    | MONNESS (1982)                     | $d, D_0, H_0$   | $h = 1,3 + \left[ \beta_0 \cdot \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{D_0} \right) + \left( \frac{1}{H_0 - 1,3} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-3}$  |
| HD4    | CAÑADAS et al. (1999)              | $d, D_0, H_0$   | $h = 1,3 + (H_0 - 1,3) \cdot \left( \frac{d}{D_0} \right)^{\beta_0}$   |
| HD5    | CAÑADAS et al. (1999)              | $d, D_0, H_0$   | $h = 1,3 + \left[ \beta_0 \cdot \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{D_0} \right) + \left( \frac{1}{H_0 - 1,3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-2}$  |
| HD6    | GADOW & HUI (1999)                 | $d, dg, H_m$    | $h = 1,3 + (H_m - 1,3) \cdot \exp\left( \beta_0 \cdot \left( 1 - \frac{d}{dg} \right) + \beta_1 \cdot \left( \frac{d}{dg} - \frac{1}{d} \right) \right)$                                 |
| HD7    | SLOBODA et al. (1993)              | $d, dg, H_m$    | $h = 1,3 + (H_m - 1,3) \cdot \exp\left( \beta_0 \cdot \left( 1 - \frac{d}{dg} \right) + \beta_1 \cdot \left( \frac{d}{dg} - \frac{1}{d} \right) \right)$                                 |
| HD8    | COX (1994)                         | $d, dg, H_m$    | $h = \beta_0 + \beta_1 \cdot H_m + \beta_2 \cdot dg^{0,95} + \beta_3 \cdot e^{-0,08 \cdot d} + \beta_4 \cdot H_m^3 \cdot e^{-0,08 \cdot d} + \beta_5 \cdot dg^3 \cdot e^{-0,08 \cdot d}$ |
| HD9    | SCHRÖDER & ÁLVAREZ GONZÁLEZ (2001) | $d, G, dg, H_0$ | $h = 1,3 + \left( \beta_0 + \beta_1 \cdot H_0 - \beta_2 \cdot dg + \beta_3 \cdot G \right) e^{-b_4/\sqrt{d}}$  |
| HD10   | WANG & TANG (2002)                 | $d, H_0$        | $h = 1,3 + \beta_0 \cdot H_0^{\beta_1} \cdot \exp(-\beta_2/d)$   |

Tabla 2. Estadísticos de comparación para los distintos modelos en la fase de ajuste y validación

la fase de validación. Según se puede observar en la tabla anterior el modelo que presenta un menor valor del criterio de información de Akaike y del error medio cuadrático, así como un mayor valor del coeficiente de determinación, tanto en el ajuste como en la validación es el modelo HD6 de GADOW & HUI (1999).

Este mejor comportamiento también se puede apreciar al observar el gráfico del sesgo y del error medio cuadrático por clases diamétricas para el conjunto de datos de validación (Figura 2).

En la tabla 4 se presentan para el mejor modelo obtenido (HD6), los valores de las estimaciones de los parámetros y sus errores estándar.

A la izquierda de la Figura 3 se han representado gráficamente los residuos del modelo frente a los valores predichos por el mismo. A la derecha de la misma se han representado las alturas observadas o medidas respecto a las alturas predichas, representándose igualmente la recta 1:1 para poder apreciar mejor la bondad del ajuste. En ambos gráficos se puede observar un buen ajuste global del modelo. La expresión definitiva del modelo altura-diámetro elegido (HD6) es la siguiente:

$$h = 1,3 + (H_m - 1,3) \cdot \exp\left( 0,2082 \cdot \left( 1 - \frac{dg}{d} \right) + 4,5931 \cdot \left( \frac{1}{dg} - \frac{1}{d} \right) \right) \quad (1)$$

| Modelo | AJUSTE    |        |             |                | VALIDACIÓN CRUZADA |        |              |                |
|--------|-----------|--------|-------------|----------------|--------------------|--------|--------------|----------------|
|        | $\bar{E}$ | EMC    | $R^2_{Adj}$ | $\Delta_{AIC}$ | $\bar{E}$          | EMC    | MEF $_{Adj}$ | $\Delta_{AIC}$ |
| HD1    | -0,014    | 4,6618 | 0,7624      | 340,71         | -0,0143            | 4,6678 | 0,7620       | 340,22         |
| HD2    | -0,014    | 5,099  | 0,7402      | 774,82         | -0,0149            | 5,1080 | 0,7396       | 776,71         |
| HD3    | -0,002    | 4,7445 | 0,7581      | 420,4          | -0,0028            | 4,7469 | 0,7580       | 416,24         |
| HD4    | 0,0357    | 5,1372 | 0,7381      | 803,77         | 0,03565            | 5,1400 | 0,7380       | 800,76         |
| HD5    | -0,0063   | 4,7277 | 0,7590      | 403,32         | -0,0064            | 4,7301 | 0,7588       | 399,16         |
| HD6    | 0,2170    | 4,3474 | 0,7784      | 0,00           | 0,2170             | 4,3515 | 0,7787       | 0,00           |
| HD7    | -0,0079   | 5,1579 | 0,7371      | 824,16         | -0,0082            | 5,1659 | 0,7366       | 826,98         |
| HD8    | 1,9E-13   | 4,55   | 0,7681      | 223,8          | 0,00022            | 4,5639 | 0,7673       | 231,71         |
| HD9    | -0,0060   | 4,6495 | 0,7632      | 326,92         | -0,0061            | 4,6597 | 0,7624       | 330,82         |
| HD10   | 0,0119    | 4,7506 | 0,7579      | 428,63         | 0,0118             | 4,7570 | 0,7575       | 431,49         |

Tabla 3. Modelos altura-diámetro generalizados empleados

Donde  $h$  es la altura del árbol en m,  $H_m$  la altura media de la masa en m y  $dg$  el diámetro medio cuadrático de la masa en cm.

de clasificación visual de madera en pie en masas naturales de *Quercus robur* L. en Galicia".

**Agradecimientos**

La realización de este trabajo ha sido posible gracias a la financiación de la Xunta de Galicia a través de los proyectos de investigación: PGIDT99MA29101 "Estudio epidemiológico de las masas de *Quercus robur* L. en Galicia y su influencia sobre la calidad de la madera" y PGIDIT02RFO29101PR "Estudio de modelos

**BIBLIOGRAFÍA**

BURNHAM, K.P. & ANDERSON, D.R.; 2000. *Model selection and inference: a practical information-theoretic approach*. Springer-Verlag. Heidelberg  
 CAÑADAS, N.; GARCÍA, C. Y MONTERO, G.; 1999. Relación altura-diámetro para *Pinus pinea* L. en el Sistema central. *En*: A. Rojo Albornoz et

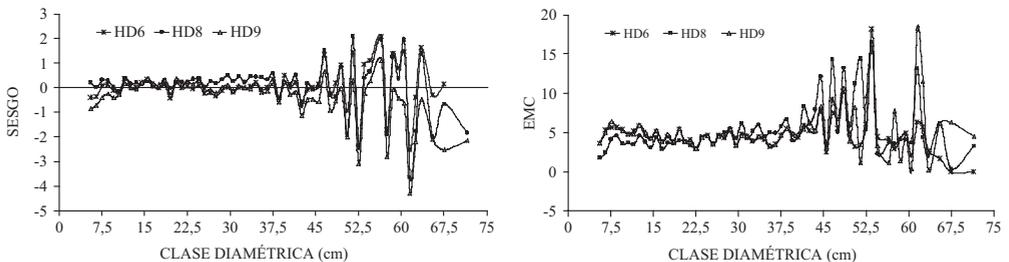
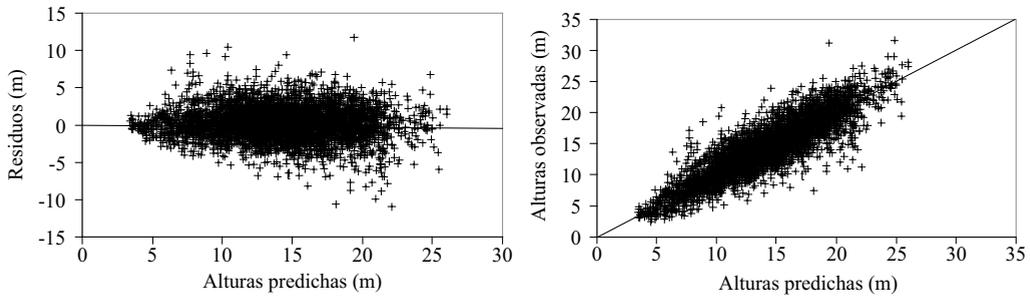


Figura 2. Gráficos de evolución del sesgo y del EMC por clases diamétricas, para los tres mejores modelos, usando los valores de los residuos obtenidos en la validación cruzada

| Parámetro | Estimación | Error estándar | Intervalos de confianza asintóticos al 95% |          |
|-----------|------------|----------------|--|----------|
|           |            |                | inferior                                   | superior |
| $\beta_1$ | 0,2082     | 0,0251         | 0,1591                                     | 0,2573   |
| $\beta_2$ | 4,5931     | 0,5209         | 3,5719                                     | 5,6142   |

Tabla 4. Estimación de los parámetros del modelo HD6



**Figura 3.** Gráfico residuos-predichos para la fase de ajuste (izquierda) y gráfico de valores reales-predichos para la fase de validación (derecha) para el modelo HD6

- al. *Actas del Congreso de Ordenación y Gestión Sostenible de Montes I*: 139-153. Consellería de Medio Ambiente. Lugo.
- COX, F.; 1994. *Modelos parametrizados de altura*. Informe de convenio de investigación interimpresa.
- GADOW, K.V. & HUI, G.; 1999. *Modelling Forest Development*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- HARRISON, W.C.; BURK, T.E. & BECK, D.E.; 1986. Individual tree basal area increment and total height equations for Appalachian mixed hardwoods after thinning. *South. J. Appl. For.* 10: 99-104.
- HUANG, S.; TITUS, S.J. & WIENS, D.; 1992. Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species. *Can. J. For. Res.* 22: 1297-1304.
- LÓPEZ SÁNCHEZ, C.; GORGOSO VARELA, J.; CASTEDO DORADO, F.; ROJO ALBORECA, A.; RODRÍGUEZ SOALLEIRO, R.; ÁLVAREZ GONZÁLEZ, J.G. & SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, F.; 2003. Comparison of generalized height-diameter models for *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwest Spain). *Ann. Sci. For.* 60: 237-245.
- MICHAÏLOFF, J.L.; 1943. *Zahlenmäßiges Verfahren für die Ausführung der Bestandeshöhenkurven*. Sonderdr. Fw. Cbl. U. Tharandter Forstl. Jb. H.6.
- MICHAÏLOFF, J.L.; 1951. *Über die Anwendung der Methode der Kleinsten Quadrate bei der Aufstellung von Massentafeln mit einem Eingange*. Skopie.
- MONNESS, E.N.; 1982. Diameter distributions and height curves in even-aged stands of *Pinus sylvestris* L. *Medd. No. Inst. Skogforsk* 36(15): 1-43.
- NASLUND, M.; 1937. *Die Durchforstungsversuche der forstlichen Versuchsanstalt Schwedens im Krefernwald*. M.S.S.
- PRODAN, M.; PETERS, R.; COX, F. Y REAL P.; 1997. *Mensura Forestal*. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA). Costa Rica.
- SAS INSTITUTE INC.; 2001. *SAS/STAT™ User's Guide, Release 8.2*, Cary, N.C. USA.
- SAVILL, P.S. & SPILSBURY, M.J.; 1991. Growing oaks at closer spacing. *Forestry* 64: 373-384.
- SCHRÖDER, J. & ÁLVAREZ GONZÁLEZ, J.G.; 2001. Developing a generalized diameter-height model for maritime pine in Northwestern Spain. *Forstw. Centr.* 120(1): 18-23.
- SLOBODA, V.B.; GAFFREY, D. & MATSUMURA, N.; 1993. Regionale und lokale Systeme von Höhenkurven für gleichaltrige Waldbestände. *Allg. Forst. Jagdztg.* 164: 225-228.
- WANG, M. & TANG, S.; 2002. *Research on universal height-diameter curves*. Reality, models and parameter estimation-the forestry scenario. Sesimbra.