

MODELIZACIÓN MEDIANTE SISTEMAS DE CONTROL DE FLUJOS DE NUTRIENTES EN LAS PLANTAS

R. Bru García, R. Cantó Colomina y B. Ricarte Benedito

Institut de Matemàtica Multidisciplinar. Dep. Matemàtica Aplicada. Univ. Politècnica de València. 46071-VALENCIA (España). Correo electrónico: {rbbru, rcanto, bearibe}@mat.upv.es

Resumen

En este trabajo mostramos una aplicación práctica de los sistemas compartimentales que son modelos matemáticos muy utilizados para modelizar procesos de transporte, pérdida o acumulación de diversos productos en determinados sistemas. Construimos un modelo que describe el flujo de un nutriente en la planta y se aplica a la modelización de la dinámica del nitrógeno en los cítricos.

Palabras clave: *Sistemas compartimentales, Simulación, Nitrógeno*

INTRODUCCIÓN

Los sistemas compartimentales se definieron por primera vez en fisiología para describir sistemas en los que había flujo de materia entre unidades denominadas *compartimentos* (JACQUEZ & SIMON, 1993). La ley de conservación que domina estos sistemas es la ley de conservación de masa.

Son modelos naturales para muchas áreas de aplicación en las que se cumple esta ley. Por ejemplo, los sistemas compartimentales se utilizan mucho en hidrología para designar redes naturales o artificiales destinadas al control de inundaciones o al suministro hídrico en agricultura. Modelos de este tipo también sirven para describir los procesos de absorción, transporte, acumulación, y pérdida de sustancias, como hormonas, glucosa, insulina, metales o fármacos en el cuerpo humano. Del mismo modo también pueden utilizarse para estudiar el flujo de determinadas sustancias, por ejemplo nutrientes, en las plantas. Otro ejemplo de sistemas compartimentales son los procesos industriales en los que intervienen reactores químicos, intercambiado-

res de calor, columnas de destilación, y otros. Y por supuesto, un sistema compartimental también puede describir la propagación de una información, una innovación o un producto nuevo entre una cierta población (BENVENUTI & FARINA, 2002; BISCHI, 1998; FARINA & RINALDI, 2000; VAN DER HOF, 1998).

Las variables de estado de estos sistemas representan la cantidad de materia contenida en cada compartimento, es decir, su masa y por tanto son necesariamente no negativas a lo largo del tiempo. De aquí que pertenezcan a una clase más amplia de sistemas, los sistemas positivos.

En este trabajo mostramos una aplicación práctica de este tipo de sistemas. Construimos un modelo que describe el flujo de un nutriente en la planta. Además, se muestra un ejemplo donde se modeliza la dinámica de la absorción, transporte y acumulación del nitrógeno en los cítricos. La finalidad principal de este modelo será obtener información que pueda utilizarse para mejorar los criterios que actualmente se siguen en la fertilización nitrogenada de los cítricos. La fertilización nitrogenada es una

práctica cultural de gran repercusión tanto económica como ambiental en producción vegetal, ya que su mala gestión puede disminuir la rentabilidad de los cultivos y aumentar la contaminación ambiental por lixiviación de nitratos.

FLUJO DE NUTRIENTES EN LAS PLANTAS

Para el estudio del flujo de un nutriente en una especie arbórea podríamos considerar el sistema suelo-plantas como un sistema compartimental formado generalmente por los compartimentos mostrados en la figura 1.

En la figura 1, las flechas discontinuas rayapunto indicarían pérdidas de nutriente por muerte del órgano. Por otra parte, la flecha discontinua a trazos indicaría que el sentido del flujo cambia según la época del año en la que nos encontremos, ya que en toda especie arbórea a lo largo de

un año normalmente distinguimos varias etapas. Etapas que están relacionadas con la actividad del árbol en ese momento. Así, podríamos considerar las siguientes etapas: letargo (L), brotación de primavera y floración (F), cuajado (C), segunda brotación (2B), tercera brotación (3B) y los últimos meses del año, con el frío, el árbol volvería a entrar de nuevo en letargo (2L).

De aquí que el esquema mostrado en la figura no sea el mismo a lo largo del año. Al inicio, en el letargo, el sistema estará formado por los cinco primeros compartimentos. En la siguiente etapa, la de floración, tendrá lugar la brotación de primavera y la floración, apareciendo los tres compartimentos siguientes. A continuación, en verano, tendrá lugar la segunda brotación, y finalmente en otoño, la tercera brotación completando todo el esquema de la figura. El esquema del año siguiente será el mismo, ya que los órganos de las brotaciones del año anterior se considerarán

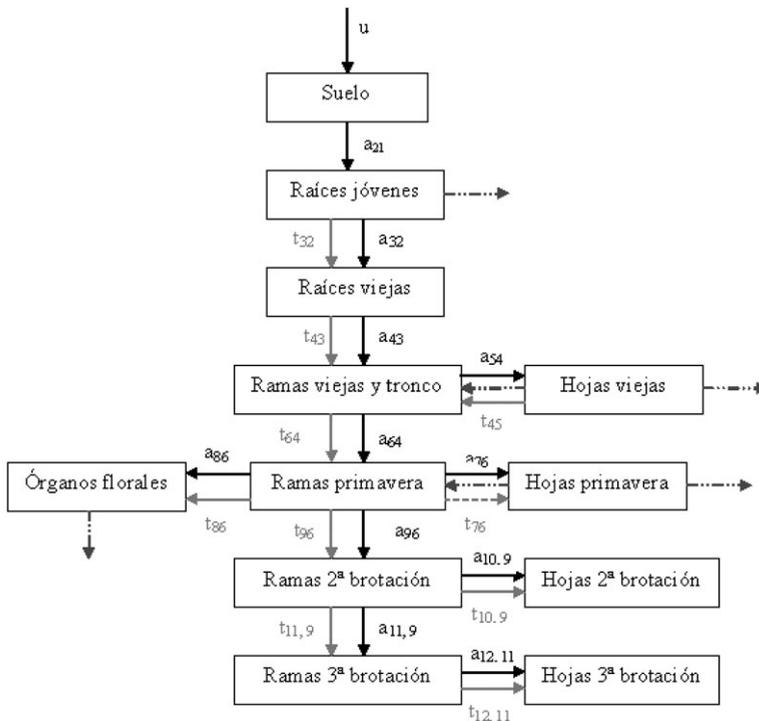


Figura 1. Sistema suelo-plantas. Leyenda = u : cantidad de nutriente aplicado al suelo en cada instante de tiempo k ; a_{ij} : proporción de nutriente que pasa del compartimento j al compartimento i en cada instante de tiempo k debido a la absorción de nutriente por la planta; t_{ij} : proporción de nutriente que pasa del compartimento j al compartimento i en cada instante de tiempo k debido a la movilización de las reservas

ahora órganos viejos. Volveremos a tener un sistema formado por los cinco primeros compartimentos. Y así año tras año. Como vemos, se trata de un proceso periódico de periodicidad 1 año.

Luego, para modelizar la dinámica de un nutriente utilizaremos un sistema compartimental periódico. Sistema que vendrá dado por la siguiente ecuación

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

donde $A(k) = A(k+N) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B(k) = B(k+N) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, ambas matrices no negativas; $k \in \mathbb{Z}$, siendo n el número de compartimentos del sistema y N el periodo. En el sistema que nosotros hemos considerado $n = 12$ (ver figura 1) y $N=365$ tomando como unidad de tiempo 1 día. En esta ecuación denotamos por

- $x(k)$: cantidad de nutriente que hay en cada uno de los compartimentos en el instante de tiempo k ,
- $x(k+1)$: cantidad de nutriente que hay en cada uno de los compartimentos en el instante de tiempo $k+1$,
- $u(k)$: el control es la cantidad de nutriente aplicado al suelo en cada instante de tiempo k .

La matriz $A(k)$ será invariante dentro de cada etapa, pero variará de una etapa a otra. Tendremos, entonces, las siguientes:

- $A(0) = \dots = A(i_1) = AL$
- $A(i_1+1) = \dots = A(i_2) = AF$
- $A(i_2+1) = \dots = A(i_3) = AC$
- $A(i_3+1) = \dots = A(i_4) = A2B$
- $A(i_4+1) = \dots = A(i_5) = A3B$
- $A(i_5+1) = \dots = A(364) = A2L$

siendo $0 < i_1 < \dots < i_5 < 364$ donde cada i_r corresponde al inicio de cada etapa.

Todas las matrices correspondientes a este modelo aplicado a la dinámica de la absorción, transporte y acumulación del nitrógeno en los cítricos se pueden ver en BRU et al. (2003); por ejemplo, en la página siguiente se muestra la matriz correspondiente a la etapa del cuajado, $AC = [\bar{a}_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, 12$.

Los elementos de la diagonal principal, \bar{a}_{ii} , indican la proporción de nitrógeno del contenido en el compartimento i que permanece en ese compartimento en el instante siguiente. Los valores nulos indican que en esa etapa todavía no tenemos los órganos correspondientes a esos compartimentos.

El resto de elementos, \bar{a}_{ij} , $i \neq j$, indican la proporción del nitrógeno contenido en el compartimento j en un instante que pasa al compartimento i en el instante siguiente. Si recordamos la figura, estos elementos corresponden a la suma del porcentaje de nitrógeno movilizado debido a la absorción (a_{ij}) más el porcentaje de nitrógeno procedente de las reservas (t_{ij}). Los valores nulos de estos elementos indican que los correspondientes compartimentos i, j , no están relacionados.

Las matrices $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ son todas de la forma $[1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, ya que sólo se aplica control (abono) al primer compartimento, es decir, al suelo. Luego,

$$B(0) = \dots = B(364) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

Los estudios de la absorción estacional de nitrógeno y de la movilización de las reservas

$$AC = \begin{bmatrix} 0.9936 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0054 & 0.8564 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1370 & 0.9804 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0196 & 0.9779 & 0.0032 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0056 & 0.9944 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0165 & 0 & 0.9105 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3980 & 0.9991 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0.9870 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nitrogenadas se llevaron a cabo en árboles de naranjos Valencia Late [*Citrus sinensis* (L.) Osbeck], injertados sobre citrange Troyer, de 2 a 5 años de edad al inicio de las experiencias (LEGAZ, 1993).

Como conclusión final al trabajo comentar que, aunque el ejemplo desarrollado es agronómico es extrapolable al campo forestal. Un modelo de este tipo puede utilizarse para profundizar en el estudio de la absorción, transporte y acumulación de cualquier elemento en cualquier otra especie agronómica o forestal. Además, por los ejemplos que comentábamos en la Introducción, también los podríamos utilizar para estudiar la propagación de una plaga o enfermedad en un bosque.

SIMULACIÓN

Para ver la utilidad del modelo matemático volvamos al ejemplo del nitrógeno en los cítricos. Una vez validado, el modelo se utilizará para realizar simulaciones con distintos programas de abonado con el fin de sacar conclusiones que ayuden a mejorar los criterios que hoy en día se siguen en la fertilización nitrogenada. Permitirá estudiar el comportamiento real del nitrógeno una vez es aplicado al suelo en forma de fertilizante con el agua de riego. Podremos predecir qué ocurrirá si aplicamos una cantidad de nitrógeno distinta a la óptima, considerando

que el programa óptimo es el que hemos utilizado en la construcción del modelo.

Supongamos que aplicamos el 75% de la cantidad óptima de nitrógeno. Según el modelo, con esta nueva secuencia de control la cantidad de nitrógeno en los órganos viejos disminuye (Figura 2), pero prácticamente no cambia en los órganos nuevos (Figura 3). Este resultado parece lógico ya que la mayor parte del nitrógeno absorbido normalmente va hacia los órganos en desarrollo, quedando el resto para los órganos viejos. Esta última cantidad constituirá las reservas de nitrógeno que se translocarán hacia los nuevos órganos en desarrollo las próximas brotaciones.

Como se observa en las figuras 2 y 3, el modelo también puede decir qué ocurrirá el próximo año. Las diferencias entre ambos tratamientos aumentan en este segundo ciclo. Como cabría esperar, la cantidad de nitrógeno en los órganos jóvenes disminuye considerablemente. Incluso en los órganos viejos, se observan ahora diferencias significativas.

Agradecimientos

Trabajo financiado parcialmente por los proyectos DGI AGL2004-03263/AGR y BFM2001-0081-CO3-02 y el proyecto de la Oficina de Ciencia y Tecnología de la Presidencia de La Generalitat Valenciana: GRUPOS03/062.

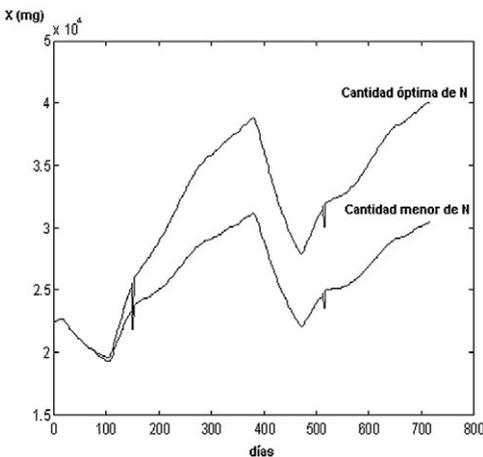


Figura 2. Contenido en nitrógeno en raíces viejas

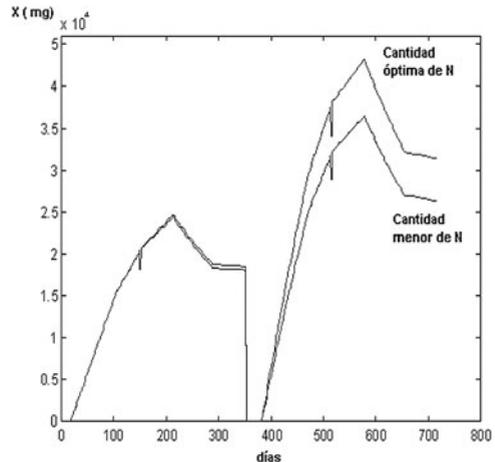


Figura 3. Contenido en nitrógeno en hojas de primavera

BIBLIOGRAFIA

- BENVENUTI, L & FARINA L.; 2002. Positive and Compartmental Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47: 370-373.
- BISCHI G.I.; 1998. Compartmental analysis of economic systems with heterogeneous agents: an introduction, Beyond the Representative Agent. In: A. Kirman and M. Gallegati (eds.): 181-214. Elgar Pub. Co.
- BRU, R.; CANTÓ, R. & RICARTE B.; 2003. Modelling nitrogen dynamics in citrus tree. *Math. Comp. Modell.* 38: 975-987.
- FARINA, L & RINALDI S.; 2000. *Positive Linear Systems. Theory and Applications, Pure and Applied mathematics.* John Wiley & Sons. New York.
- JACQUEZ J.A. & SIMON C.P.; 1993. Qualitative theory of compartmental systems. *SIAM Rev.* 35: 43-79.
- LEGAZ F.; 1993. *Absorción, distribución y traslocación del N en cítricos.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia. Valencia.
- VAN DEN HOF J.M.; 1998. Structural identifiability of linear compartmental systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 43: 800-818.