UNIVERSITAS PHILOSOPHICA, Año 25, 50: 233-253
junio 2008, Bogotá, Colombia

LAS PARADOJAS Y LA TEORÍA DE LOS TIPOS LÓGICOS

JORGE ROBERTO PALACIO FERNÁNDEZ *

RESUMEN

Este artículo expone tesis fundamentales de Russell con respecto a los tipos lógicos, el principio del círculo vicioso, las funciones proposicionales y su jerarquía, las paradojas y sus soluciones, así como algunos problemas filosóficos en torno a la teoría de los tipos.

Palabras clave: Russell, Gödel, lógica matemática, paradojas, tipos

* Profesor. Facultad de Filosofía Pontificia Universidad Javeriana. RECIBIDO: 04.05.08 ACEPTADO: 10.06.08

UNIVERSITAS PHILOSOPHICA, Año 25 50: 233-253
junio 2008, Bogotá, Colombia

PARADOXES AND THE THEORY OF LOGICAL TYPES

JORGE ROBERTO PALACIO FERNÁNDEZ *

ABSTRACT

This article is about Russell's foundational thesis on logic types, his principle of the vicious circle, the propositional functions and their hierarchy, paradoxes and their solutions and also on some philosophical problems of the theory of logical types.

Key words: Russell, Gödel, mathematical logic, paradoxes, types

* Facultad de Filosofía. Pontificia Universidad Javeriana. RECIBIDO: 02.07.08 ACEPTADO: 15.08.08

Quizás la mayor de todas las paradojas
es que hay paradojas en matemáticas
Edward Kasner

1. El principio del Círculo Vicioso

Russell comienza su teoría de los tipos lógicos asegurando que todas las paradojas que él pretende analizar se originan en lo que podemos llamar un 'círculo vicioso'. El círculo vicioso consiste básicamente en suponer que una colección de objetos puede contener miembros que sólo pueden ser definidos por medio de la colección como un todo (*Principia Mathematica*: 37)[1]. Así, por ejemplo, podemos pensar que la colección de *todas* las proposiciones contiene una proposición que versa así mismo sobre *todas* las proposiciones, como podría ser la siguiente proposición:

Todas las proposiciones son o verdaderas o falsas. (1)

Esta proposición habla de 'todas las proposiciones' pero a la vez pertenece al mismo conjunto sobre el que ella versa, que es justamente el de 'todas las proposiciones'. Es un típico caso de 'círculo vicioso'.

La falacia que las paradojas contienen consiste, pues, en la circunstancia de que se definen o presuponen totalidades cuya existencia implicaría la existencia de nuevos elementos definibles únicamente en términos de la totalidad en su conjunto (Gödel 1981: 51) (caso de la proposición (1)).

Por ahora, nos interesa destacar simplemente lo siguiente: para evitar el surgimiento de las paradojas, Russell propone evitar los círculos viciosos y lo hace sencillamente mostrando que nada que implique el todo de una colección debe ser miembro de la colección, ya que si una supuesta colección tiene un total e intentamos estipular nuevos miembros que sólo son definibles en términos de esa totalidad, entonces la colección en cuestión ya no es una totalidad. Tendrá que incluir el nuevo miembro si quiere ser una totalidad. Es como si no pudiéramos alcanzar la totalidad, dado que siempre la estamos empujando un paso más allá: ella siempre va un paso adelante. Esto recuerda inevitablemente el caso del burro que para empezar a andar debe intentar

[1] Citada en adelante como *PM*.

alcanzar una zanahoria que tiene delante de sí, pero no puede ya que la zanahoria pende de la punta de una varilla que está atada a su cabeza. Russell nos lo dice así: "(...) si la suposición de que una colección forma un todo implica que ella posee miembros que no son definibles más que en términos de este todo, entonces esta colección no forma un todo". (*PM*: 38)

Estas totalidades que 'se nos escapan' (si se me permite la expresión) son las que Russell llama totalidades ilegítimas y son justamente ellas las que sufren el ostracismo de *PM*. Esto no quiere decir, sin embargo, que no podamos hablar de totalidades, o mejor, que no haya totalidades legítimas. Las totalidades legítimas son aquellas que han sido limitadas para completar su totalidad y cualquier totalidad posterior que se refiera a esa totalidad debe caer por fuera de la totalidad primera. Es interesante notar aquí que se habla de totalidades anteriores y posteriores, como si ese 'corte' que se introduce para limitar una totalidad fuera temporal. En ese caso, estamos hablando de una lógica que incluye la noción de tiempo, como lo puede incluir una de las ciencias naturales (la física por ejemplo). Esta en realidad no es una idea tan descabellada. Russell en 1920 consideraba que la lógica era similar en algunos aspectos a otras ciencias naturales: "La lógica se ocupa del mundo real de igual manera que la zoología, aunque con rasgos más abstractos y generales" (Gödel 1981).[2]

Nos podemos formular la siguiente pregunta en torno al principio del círculo vicioso: ¿por qué hemos de aceptarlo? A diferencia de lo que sucede con el caso del axioma de reductibilidad, Russell no nos ofrece una serie de razones para su aceptación. Su utilidad en materia de destrucción de las paradojas parece ser suficiente para justificar su existencia. Sin embargo, lo que nos dice Alexandre Koyré (1981) en su artículo acerca del tratamiento russelliano de las paradojas puede ser de interés en este punto. En su forma más simple, nos dice Koyré, el principio del círculo vicioso establece la imposibilidad de que un todo se contenga a sí mismo como elemento. Esto es algo, nos dice, que parece perfectamente evidente. Y, a continuación, nos ofrece una imagen bastante gráfica del problema: hay algo que jamás se puede meter en un saco, por grande que este sea, y es el saco mismo. En efecto, el continente debe ser más grande que el contenido. "Se podría incluso preguntar si vale la pena hacer de esta observación un principio". (Ibid.: 95)

[2] Cfr. *Introduction to Mathematical Philosophy.* Citada por Gödel 1981.

La evidencia con que se presenta el principio de círculo vicioso parece ser para Koyré una razón más que suficiente para aceptar dicho principio. Sin embargo, cuando veamos las razones que el mismo Russell aduce para aceptar otro de los principios de *PM* como lo es el axioma de reductibilidad, veremos que Russell le resta importancia a la evidencia como motivo para aceptar un principio o un axioma. Al final de este ensayo veremos algunas de las dificultades que surgen en torno a este principio del círculo vicioso.

Las funciones proposicionales

Un caso particular del principio del círculo vicioso se refiere a las funciones proposicionales. Así como no es posible que la colección de una totalidad contenga un elemento que presuponga la totalidad misma, ninguna función proposicional puede aceptar como argumento a la función misma o a un objeto que sólo se pueda definir en términos de la función misma. Veamos.

Al hablar de la naturaleza de las funciones proposicionales, Russell comienza explicando la diferencia que hay entre una proposición y una función proposicional.[3] La última se distingue de la primera sobre todo por el hecho de que la función proposicional es ambigua. La función proposicional contiene variables cuyo valor no está asignado. Russell piensa que la ambigüedad no es sólo una característica accidental de las funciones proposicionales sino que constituye la esencia misma de una función. El símbolo φ x tiene una doble ambigüedad pues él denota ambiguamente tanto la función como el argumento. Cuando hablamos, por ejemplo, de la función φ x donde el significado de φ está especificado, pero la x no está especificada, queremos hablar de un valor de la función pero no de uno definido. Podemos expresar esto diciendo que φ x denota ambiguamente φ a, φ b, φ c, etc... para aquellos argumentos designados por las constantes a,b,c etc..., donde estos (φ a, φ b, φ c, etc...) son los diversos valores de φx.

[3] Russell no es claro en su terminología aquí. En una nota nos dice que cuando habla de función en este pasaje se refiere a función proposicional y llama a φ x una función (es decir, una función proposicional). Pero algunas líneas más adelante llama a φ x un valor indeterminado de una función y se reserva el nombre de función proposicional (o función simplemente) para φ *x. En la introducción a la segunda edición de PM, Russell nos confirma esta idea de que φ x ya no designa la función sino un valor genérico. Pero sobre esto volveremos más adelante.

Para decirlo en otras palabras, cuando decimos que φ x denota ambiguamente a φ a, φ b, φ c, etc..., queremos decir que φ x significa uno de los objetos φ a, φ b, φ c, etc... pero, no uno definido sino uno aún no definido. Para que el valor ambiguo φ x se vuelva un valor definido, deben estar definidos tanto los argumentos como sus valores bajo la función específica. Una función no está bien definida si sus valores no están bien definidos (*PM*: 39) (aunque podemos decir que es una condición necesaria pero no suficiente para que una función esté bien definida el que sus valores estén bien definidos). De esto Russell concluye:

> (...) ninguna función puede tener entre sus valores alguna cosa que presuponga la función, porque si la tiene, no podemos considerar los objetos ambiguamente denotados por la función como definitivos hasta que la función sea definitiva, y, así mismo, la función no puede ser definitiva hasta que sus valores sean definidos.(Ibid.)

Este es un caso particular pero quizá el más importante del principio del círculo vicioso en cuanto al análisis de las paradojas se refiere. A lo que apunto es que no se puede definir el dominio de argumentos admisibles y el recorrido de valores (o conjunto de valores) producidos por la función aplicada a los argumentos admisibles ya que no es posible saber cuáles son los argumentos admisibles antes de haber aplicado la función (ya que para esto tenemos que mirar el recorrido). Pero, para aplicar la función y llegar a saber cuál es el recorrido, debo saber cuáles son los argumentos admisibles. Por eso no se puede incluir en una función la función misma como argumento ya que se estaría violando el principio del círculo vicioso. Lo que nos interesa de esta parte de *PM* es que Russell saca en claro de esto que cada valor ambiguo como φ x presupone la totalidad de sus valores y por lo tanto la totalidad de sus posibles argumentos. No sucede lo contrario, los valores no presuponen la función: podemos aprehender la proposición *'Sócrates es humano'* sin tener que considerarla como el valor de la función *'x es humano'*. Pero aún si tomamos como verdadero el primer caso que hemos mencionado, que una función presupone la totalidad de sus valores y de sus argumentos, nos encontraremos con un problema: el número de los valores de una función es infinito. ¿Cómo, entonces, puede una función presuponer sus valores y argumentos? La solución de Russell tiene que ver con las intensiones. Los valores de la función no se deben dar individual y extensionalmente sino intensionalmente, de tal manera que podamos determinar, al menos teóricamente, si un objeto dado es valor de una función.

Como ya lo mencionábamos más arriba en una nota, Russell introduce una nueva notación para estas ideas.φ x que antes era considerado como una función (y es más, como una función proposicional) ahora pasa a ser un valor genérico indeterminado de una función. Cuando decimos ‘ φ x es una proposición’ queremos decir algo que es verdadero de cualquier posible valor de x, hacemos una afirmación ambigua sobre cualquier valor de la función, mientras que φ *x es la función proposicional misma y como tal, al nosotros hacer cualquier afirmación sobre esta función, estamos haciendo una afirmación sobre un valor ambiguo (dado que la función se refiere a un valor ambigua). La x con el asterisco lo que quiere decir es que nos fijemos en la función misma y no tanto en la variable.

Con esta nueva notación podemos volver a lo que decíamos en el texto que corresponde a la nota 8. Si una función ha de ser definida, sus objetos deben ser definidos. Pero, para que esos objetos sean definidos, la función misma debe serlo. Para evitar esta situación con la nueva notación, Russell propone prohibir por no significativas fórmulas como φ (φ *x) . Este símbolo no expresa nada, por lo tanto, no es significativo (*PM*: 40). Aquí es importante hacer una aclaración. No es totalmente correcto decir que Russell piensa que todas las construcciones de la forma φ (φ *x) o φ (φ x) son no significativas. Es evidente que Russell no querría tachar de no significativas construcciones como cos (cos x) o cos (cos *x) que sí son significativas. Cuando a un número le aplicamos la función cos, el resultado es un número. Y, si a ese número cos x, a su vez le aplicamos otra función cos, el resultado seguirá siendo un número. El resultado de aplicar la función cos a la función cos x siempre será un número. De alguna manera, la aplicación de la función cos (incluso sobre otra función cos) hace que no nos salgamos del conjunto de salida que son los números naturales (en este caso). Si el conjunto de salida es el pozo y la función cos x es el salto de uno de los peces del pozo, podremos decir que el pez siempre caerá en el pozo del cual saltó. El problema (las fórmulas no significativas) se presentan cuando el pez que salta cae en otro pozo que no era aquel del cual saltó. Es decir, las construcciones problemáticas son aquellas que ‘arrojan’ elementos que caen por fuera del conjunto de salida. Si el conjunto de salida son los individuos de nivel 0, por poner un ejemplo, el valor φ x o la función φ *x no pertenecen a ese conjunto de salida que son individuos. Ellas no son individuos.

Antes de pasar a la siguiente sección de la primera parte, pienso que es importante aclarar otra parte de la notación lógica que introduce Russell y que va a ser útil en su análisis de las paradojas. Vamos a definir el símbolo (φ) . φ x. Entendemos por él ‘ para cualquier φ , φ x’.

En la fórmula (φ) . φ x, φ es una variable para funciones. Debe anotarse que siempre que se escribe φ x para cualquier φ y para cualquier x, la fórmula puede fallar tanto por φ como por x en el sentido de que algunos x’s son admisibles para algunos φ ‘s y no para otros. También debe decirse que el cuantificador (φ) tiene metido (por así decirlo) un conjunto sobre el cual recorre. Lo que hay es un conjunto de funciones en (φ). Un conjunto específico de funciones sobre el cual versa el cuantificador debe estar bien definido previamente a (φ) . φ x, entonces, se deben tomar sólo aquellos x’s admisibles para todas y cada una de las funciones de ese conjunto. El símbolo no significa ‘φ x con todos los valores de x’ ya que hemos visto que hay valores de x con los cuales φ x no es significativo. Lo que el símbolo significa es el conjunto de funciones que son valores para φ *x.

La jerarquía de funciones

COMO LO VIMOS EN LA SECCIÓN ANTERIOR, no es admisible para Russell la construcción que incluye una función proposicional aplicada a la misma función, como lo es el caso de φ (φ *x) ya que se viola el principio del círculo vicioso.

Pero Russell no se queda solamente con este tipo de funciones. Las amplía a construcciones como la siguiente (φ). f (φ *z, x). (φ). f (φ *z, x) es una función que tiene dos variables φ *z y x. A pesar de ser una función que sólo puede aceptar a *a* como argumento, ella forma una totalidad ilegítima ya que φ *z es una función y como tal no es admisible por el principio del círculo vicioso.

Lo interesante de estas funciones, a mi modo de ver, es el descubrimiento que Russell hace (si es que podemos llamarle descubrimiento) trabajando con este tipo de construcciones. Supongamos que le damos el nombre de ‘***funciones - a***’ a las funciones que son significativas con un argumento dado ***a***. También asumamos la siguiente proposición: ‘*a* satisface a todas las funciones que pertenecen a la selección en cuestión.' Decir que *a* satisface φ significa que φ a es verdadera. De lo que se trata es de encontrar una *a* que no sólo sea admisible como argumento sino que verifique todas las instancias φ adonde φ es una de las funciones de la totalidad inicial. Se trata, pues, de encontrar una *a* que sea aplicable y que satisfaga cualquier φ de esa totalidad. Sólo así podemos decir (φ) (φ a). Por lo tanto, *a* no puede ser una de las funciones de la totalidad previamente determinada ni puede ser una de las proposiciones φ a, φ b, φ c.... Supongamos también que llamamos f (φ *z) a la selección. Tendremos entonces una expresión como la siguiente:

$$(\varphi).\ [f(\varphi\ {}^*z) \text{ implica } \varphi\, x]$$

En el caso de la expresión que acabamos de ver, dado que buscamos todos los posibles argumentos que satisfacen la función φ *z (lo cual está dicho por el cuantificador universal (φ)) siempre tendremos que dejar por fuera a φ x que no puede ser argumento de φ *z por lo que explicábamos en el párrafo inmediatamente anterior a la fórmula. El truco se posibilita porque hacemos variar a la φ y porque incluimos en la expresión una totalidad como φ *z. Ese cuantificador (φ) unido con la totalidad φ *z son los elementos que hacen que siempre se vaya un pasito más allá, que siempre quede por fuera φ x. Esto es lo mismo a lo que nos referíamos anteriormente cuando hablábamos de tener que hacer un corte. La totalidad 'total' es algo que siempre se está escapando.

Lo que se debe hacer entonces para evitar las falacias de círculo vicioso, como las que pueden surgir en el ejemplo que acabamos de mencionar, es hacer que todas las funciones - *a* estén divididas en ordenes, cada uno de los cuales no contiene funciones que se refieren al todo del orden. Con base en esta idea, Russell desarrolla lo que se ha llamado su *teoría de los tipos lógicos*. Esta teoría tiene por fin clasificar los objetos y las funciones según el 'nivel' u 'orden' al cual pertenecen.[4] Como nos lo explica Koyré en su artículo (1981), el 'tipo' de una proposición es el grado de su complejidad lógica. Así, los individuos, siendo los objetos lógicos más sencillos, serán de nivel 0. Las propiedades de los individuos y las funciones que contienen individuos, siendo objetos lógicos que se fundan en individuos,

[4] Utilizaré la palabra 'orden' para referirme a funciones, la palabra 'tipo' para referirme a los valores y las proposiciones y la palabra 'nivel' para referirme a los objetos.

serán de primer orden. Las funciones que se refieren a funciones serán de segundo orden etc... Lo importante de entender es que toda función debe ser de un orden superior a sus elementos. Como lo explica Fraenkel: en una función cualquiera no se puede atribuir propiedades determinadas a individuos si el orden de propiedades no es superior en 1 al menos (en cuanto al orden al que pertenece). En palabras sencillas, lo que un orden hace es mantener una función limitada porque la 'presiona desde arriba'. Esto lo hace porque el no permite que la función suba a un orden superior.

Sin embargo, Russell tiene un nombre y una simbología para las funciones en especial. Las funciones que no tienen explícitas ni implícitas variables distintas de las que pueden ser sustituidas únicamente por individuos pueden ser llamadas funciones de primer orden. La función la simboliza Russell de la siguiente manera:φ !*x. Más adelante nos dice que también pretende llamar 'predicado' o incluso 'función predicativa' a esta función. Un valor cualquiera de la función lo podemos simbolizar así: φ !x.

El axioma de la reductibilidad

ESTA NOTACIÓN QUE ACABAMOS de ver en la sección anterior es importante para entender el axioma de la reductibilidad. Efectivamente, la teoría de los tipos lógicos de Russell se apoya en el axioma de la reductibilidad. Vimos, en la sección anterior, que lo que un tipo hace es, por así decirlo, mantener encerrado en su orden una función y así no podemos hablar por ejemplo de " todas las funciones - *a"* significativamente. Ahora bien, puede presentarse el caso de que sea necesario hablar de todas las funciones - *a*. Es más, en la matemática, como lo señala Gödel refiriéndose a esta parte de la obra de Russell (1981), hay veces que es necesario hacer referencia a ciertas totalidades. Puede demostrarse que el formalismo de las matemáticas clásicas no satisface el principio del círculo vicioso, ya que los axiomas implican la existencia de números reales definibles solamente en términos de todos los números reales. El axioma de la reductibilidad está diseñado justamente para permitirnos hablar de esas totalidades pero restringiéndoles el tipo para evitar las totalidades 'peligrosas'.

El axioma de la reductibilidad, en pocas palabras, consiste en la asunción de que dada cualquier función de la forma φ *x, hay una función predicativa equivalente a esta primera función. Es decir, hay una función predicativa que es verdadera cuando φ x es verdadera y que es falsa cuando φ x es falsa (ya que esa es justamente la definición de equivalencia que Russell nos da). Una formulación en símbolos de este axioma sería la siguiente:

$$\vdash : (\quad \equiv \quad \psi) : \varphi\, x . \quad \psi\, !x$$

Lo que esta función dice, sencillamente, es que hay una función predicativa equivalente a cualquier función φ x que podamos postular. Obviamente, este axioma pretende, ante todo, bajarle el tipo a las funciones, o si se quiere, bajarles el grado de complejidad lógica. Pero, ¿cuánto baja el tipo el axioma de reductibilidad? Esto depende de lo que se entienda por función predicativa. La función predicativa, como lo hemos aclarado algunas páginas atrás, es una función del orden de $n+1$ si el argumento más alto que la satisface es de orden o nivel n. Es decir, la función predicativa es aquella que está en el primer orden inmediatamente superior al de su argumento más alto. Por lo tanto, para responder a nuestra pregunta, debemos decir que el axioma de reductibilidad baja nuestra función φ x hasta la función más baja de tipo que le pueda ser equivalente.

Pero el axioma de reductibilidad mismo se entiende mejor por medio de un ejemplo. Si llamamos el predicado de un objeto a la función predicativa que es cierta del objeto, entonces los predicados de un objeto serán sólo algunas de las propiedades del objeto. Russell nos da el ejemplo de la siguiente proposición: 'Napoleón tenía todas las cualidades que hacen a un gran general.' Russell la interpreta como queriendo decir: 'Napoleón tenía todos los predicados que hacen a un gran general'. Si asumimos que "f (φ !*z)" es "φ !*z es un predicado requerido en un gran general" tendremos la siguiente expresión:

(φ): f (φ !*z) implica φ !(Napoleón)

Dado que la función se refiere a una totalidad de predicados, ella no es un predicado de Napoleón ya que los predicados de un objeto, como lo señalábamos arriba, son sólo algunas de las propiedades del objeto. Esto no implica que no haya un predicado común a los grandes generales. Ese predicado lo podemos encontrar por medio de la disyunción de los predicados que son peculiares a cada uno de los generales. Esta disyunción constituirá un predicado que es común a todos los grandes generales. Hemos pues encontrado un predicado que es equivalente a la propiedad que queríamos atribuir a Napoleón (o, al menos esto piensa Russell), ya que pertenece sólo a los objetos que tienen esa propiedad y no a otros. Hay un predicado que sólo lo tienen los grandes generales y ningún otro objeto. Lo que nos dice el axioma de reductibilidad es que siempre existe tal predicado. Como yo lo entiendo, ese predicado es más bajo de tipo que la función que presupone una totalidad de propiedades, dado que en ese predicado ya no se contiene una totalidad. Pero, uno se podría preguntar si en ese predicado no hay algo así como una 'totalidad escondida'; obviamente la disyunción con lo que nos deja es, en cierta medida, (si he captado esto correctamente) con 'todas las cualidades que hacen a un gran general'. De no ser así, de eliminarse esa totalidad, se podría uno aún preguntar si la expresión resultante, que tiene un solo predicado común a varios objetos, es equivalente realmente a la expresión que tiene una totalidad de predicados.

Pero, para Russell, la importancia del axioma de reductibilidad no puede ser cuestionada aunque sí nos podemos hacer serias preguntas acerca de las razones que tenemos para aceptarlo. El axioma de la reductibilidad es una asunción menos problemática que, por ejemplo, clases en una teoría (*PM*: 58). Las clases podrían hacer el trabajo que hace el axioma de la reductibilidad, porque este axioma dice que, para una función como φ *z, siempre hay una función predicativa que afirma que x pertenece sólo a cierto tipo de objetos *a*. Por lo tanto, "φ x" es equivalente a "x pertenece a la clase de objetos *a*". Esta última expresión puede ser entendida como una función predicativa como las que logramos con el axioma de la reductibilidad, pero aquí se logra por medio de las clases. En la última sección veremos los problemas de la posición ontológica que acarrea la teoría de los tipos de Russell.

Por ahora, me interesa señalar las dificultades inherentes a la aceptación del axioma de reductibilidad, más que los problemas ontológicos. Si bien el axioma en cuestión no es tan difícil de entender, la primera pregunta que nos puede surgir es ¿por qué aceptarlo? Russell parece ser consciente de esta dificultad y quizá por eso le dedica una sección entera de su teoría de los tipos al problema (Ibid.: 59). Allí Russell nos dice que la principal razón para aceptar el axioma de la reductibilidad es, en gran parte, inductiva. Esto lo que quiere decir es que 'en la práctica' podemos encontrar muchas proposiciones que están deducidas del axioma y que son prácticamente 'indubitables'. Aparte de esto, es probable que nada falso se pueda deducir del axioma. Todo lo deducible de él es verdadero y eso nos da fuertes motivos para pensar que él mismo es verdadero.

Russell reconoce desde el principio que el axioma de la reductibilidad no es autoevidente, pero piensa que esto no es importante para aceptar un axioma. Algunos axiomas que han parecido autoevidentes han resultado ser falsos en realidad. Quizá en todos estos razonamientos russellianos se encuentra algún rasgo de esa visión de la lógica como una disciplina equiparable con las ciencias naturales.

2. Las paradojas y sus soluciones a la luz de la teoría planteada

La exposición de las paradojas russellianas es muy sencilla. La primera y quizá la más elemental es la del cretense mentiroso: Epiménides. Éste decía que todos los cretenses son mentirosos, es decir, que todos los cretenses no hacían más que afirmar falsedades. ¿Estaba mintiendo? De ser así, quizá estaba diciendo la verdad, ya que se podría pensar que esto apoya su propia afirmación al menos en un caso: tenemos ante nosotros a un cretense mintiendo. Si decía la verdad, mentía porque todos los cretenses son mentirosos. La forma más sencilla de esta paradoja es la del hombre que dice 'estoy mintiendo'. Llamaremos a ésta la primera paradoja, p1.

La segunda paradoja que me interesa analizar es la de Russell. Esta paradoja se puede explicar muy sencillamente de la siguiente manera. Hay unas clases que se contienen a sí mismas y otras que no se contienen a sí mismas. Un ejemplo de las segundas es la clase de todos los profesores de filosofía y no tenemos mayor problema con ella. Esta clase no contiene entre sus elementos a la clase misma. Un ejemplo de la segunda es el conjunto de todas las ideas presentadas en este trabajo. Este conjunto contiene entre sus objetos a la clase misma, porque la clase de todas las ideas presentadas en este trabajo es una idea que está en este trabajo. La cuestión es ésta: ¿es la clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas un miembro de sí misma? Si no es miembro de sí misma, debería serlo, porque el conjunto incluye todas las clases que no son miembros de sí mismas y, si por el contrario se contiene a sí misma, no debería contenerse a sí misma, ya que la clase es sólo de clases que no se contienen a sí mismas. Llamaremos a esta paradoja la paradoja de Russell[5].

---

[5] Para una explicación sencilla de esta paradoja, ver Kasner, E. (1986).

La última paradoja que me interesa mostrar es la siguiente. La paradoja de Berry nace del intento de clasificar los números enteros según la cantidad de sílabas necesarias para nombrarlos, aquellos que pueden ser nombrados en n o menos sílabas y los que no pueden. En este último grupo habrá uno que sea el menor. Podemos nombrarlo así: el número menor no nombrable en menos de n sílabas. Si n=19, el número del que estamos hablando es 111 777. Si deletreamos este número en inglés descubriremos que su nombre tiene 19 sílabas. Pero hay una manera más corta de nombrarlo que es justamente: el número menor no nombrable en menos de n sílabas, que si lo parafraseamos en inglés, tiene apenas 18 sílabas. Según Koyré, la supuesta paradoja que hay aquí se encuentra en torno a la confusión que hay alrededor de la palabra ‘nombrar’: es muy distinto nombrar parafraseando sílabas del nombre propio del número que nombrar por medio de una descripción definida. Si la traducimos a otro idioma quizá ni siquiera haya paradoja.

Es muy sugestiva esta explicación que da Koyré. Sin embargo, Xavier Caicedo (1993) ha mostrado que esta paradoja, una vez parafraseada en un lenguaje formal, para evitar la ambigüedad del español, presenta un profundo contenido lógico y que como tal no se trata de una mera colección de palabras caprichosas.

Ahora bien, en este momento nos corresponde mirar los problemas y soluciones a que dan lugar estas paradojas. Comencemos con p1. Es interesante notar la opinión de Koyré aquí: él insiste en que la supuesta paradoja del mentiroso tampoco es paradoja, y lo hace basándose en argumentos como el de decir que si no se tratara de un cretense sino de un ateniense el que dice que todos los cretenses son mentirosos, no habría habido paradoja. Pero, dejando de lado los sarcasmos de Koyré, miremos la solución de la paradoja en cuestión que propone Russell.

Para Russell, ‘falsedad’ es una palabra ambigua; para que deje de serlo, es necesario especificar el tipo de la proposición de la cual se dice la falsedad. La idea aquí es que podamos decir que ‘nivel de falsedad’ es el que estamos manejando. También Russell ha explicado que si p es una proposición de orden n, entonces una proposición en la cual aparezca p no puede ser de orden n sino superior. En el caso de la forma radical de la paradoja (el hombre que dice ‘estoy mintiendo’), podemos pensar correctamente que él estaba afirmando una proposición como ‘Estoy aseverando la proposición p y p es falsa'. Pero, esta proposición como tal debe ser de un tipo superior al de p y como tal no puede entrar en el conjunto de argumentos de la función proposicional que habíamos especificado anteriormente.

Lo mismo en el caso de Epiménides. Su proposición acerca de todos los cretenses es de un orden superior a las proposiciones de los cretenses mismos y como tal no está dentro del alcance de estas proposiciones.

Ahora veamos lo que sucede en el caso de la solución a la paradoja de Russell. Para explicar lo que pasa con esta paradoja, Russell nos remite a la información que nos dará en capítulos venideros; pero con lo que ya sabemos en el capítulo que actualmente estamos trabajando, podemos entender la solución russelliana de este caso. Russell nos dice que una clase es un objeto derivado de una función y que presupone la función de la cual es derivado, así como (φ) . φ x presupone la función φ *x. Por lo tanto, una clase no puede, al igual que en el caso que acabamos de exponer, significativamente ser el argumento de la función con la cual está relacionada. Podemos decir entonces que una clase no es admisible como argumento de la función con la cual está relacionada. Así, no tiene sentido hablar de la clase de todas las clases que son miembros de sí misma. Si no tiene sentido hablar de esta clase, es imposible que la paradoja surja, ya que la paradoja de la que estamos hablando depende de que podamos hablar de la clase que hemos mencionado.

El caso de la paradoja de Berry es quizá el más interesante de todos ya que no se ve muy claramente a primera vista en dónde se puede esconder la totalidad peligrosa que hace surgir la paradoja. Como ya lo mencionábamos más arriba cuando hablábamos de la crítica de Koyré a esta paradoja, el problema surge en torno a la palabra 'nombrar'. La palabra 'nombrar' se refiere a una totalidad de nombres y sin embargo esta totalidad puede estar dentro de una colección de nombres. Así es que el nombre que contiene 18 sílabas (el menor número no nombrable en menos de n sílabas) se refiere a una totalidad, ya que n no está especificado y sin embargo se encuentra dentro de la colección de lo que entendemos por 'nombrar', entre los cuales está el nombre del número 111 777 nombrado sílaba por sílaba (el cual contiene 19 sílabas). Por esto Russell construye toda una jerarquía de nombres similar a la que construye con las funciones.

Para Russell, todas las paradojas surgen de la ambigüedad de una palabra como falsedad, clase, nombrar etc... Apenas se saca a la luz la ambigüedad presente en estas palabras y se la aclara, la apariencia de autocontradicción presente en todas las paradojas desaparece.

Sin embargo, Russell también piensa que no se debe sacrificar esta ambigüedad, o mejor, estas palabras ambiguas. Ellas son necesarias en la matemática y en la lógica matemática, ya que en estos campos muchas veces necesitamos usar una multitud de ideas que deben poder recibir una infinidad de determinaciones distintas. La ambigüedad permite que en esos campos un mismo razonamiento sea aplicable a un número amplio de casos.

Lo que sí es claro para Russell es que esa ambigüedad se debe mantener fuertemente custodiada y vigilada para que no pueda ejercer su peligrosa influencia como la que se produce cuando se le deja libre, esto es, sin examen crítico.

3. Algunos problemas filosóficos en torno a la teoría de los tipos

En esta sección pretendo exponer brevemente algunos de los problemas filosóficos más importantes que se presentan en torno a la teoría de los tipos lógicos de Russell. Estos problemas son ante todo problemas ontológicos (aunque estos no son dolores de cabeza exclusivos del filósofo sino del matemático también).

Quizá el problema más interesante que podemos mencionar en torno a la teoría de los tipos lógicos es el siguiente: si asumimos que la proposición fundamental de la teoría es ‘toda proposición debe ser de un tipo superior a su objeto’ y si nos fijamos que esta proposición no puede tener ningún tipo (o tener tipo infinito ya que se refiere a un número infinito de proposiciones), veremos que ella realiza justamente la paradoja que la teoría de los tipos pretende evitar. Si ella se refiere a sí misma y es verdadera, entonces es falsa porque ella misma no tiene tipo. Si por el contrario ella es falsa y no se aplica a sí misma, ella podría ser verdadera ya que hace más plausible la idea de que toda proposición tenga un tipo superior a sus objetos. Si lo ponemos en otros términos: la teoría de los tipos no permite proposiciones referidas a todas las proposiciones y es justamente por eso (aunque sea para enunciar la prohibición) que debe contener estas proposiciones. Es por esto que no podemos saber si la teoría de los tipos es verdadera o falsa.[6]

---

[6] Este argumento es de Koyré.

Otra de las objeciones que se le hace a la teoría de los tipos se refiere al uso de la palabra ‘todo’ o ‘totalidad’. En efecto, como lo señala Gödel, las matemáticas clásicas no satisfacen en muchos casos el principio del círculo vicioso, puesto que los axiomas implican la existencia de números reales que sólo son definibles en términos de todos los números reales. Para Gödel, esto no quiere decir que las matemáticas clásicas sean falsas, sino que el principio del círculo vicioso puede ser puesto en entredicho. Este principio se monta sobre una definición de ‘todo’, ‘totalidad’ que implica referencia a cada uno de los elementos de una colección dada (si esta colección es una totalidad); como si ‘todo’ se refiriera a conjunción lógica infinita. Pero este concepto se puede echar abajo (y con él el principio de círculo vicioso). Podemos adoptar, por ejemplo, una noción de ‘todo’ como la que adopta Carnap. Se puede interpretar ‘todo’ como significando analiticidad, necesidad o demostrabilidad.[7] Para entender cómo podríamos poner ‘todo’ en términos de analiticidad o de necesidad, considérese el siguiente trío de expresiones:

(1) ‘Todo x es y’, (2) ‘x es y’ es analítico, (3) ‘x es y’

Si se asume una posición gradualista, según la cual es sólo una diferencia de grado de generalidad (y no de ‘naturaleza’ de las expresiones) la que media entre las expresiones (1) y (2), se verá claramente que (1) y (2) son equiparables. La expresión (1) queda confirmada por todos los casos de x’s que son y. Tiene un nivel de generalidad sumamente alto. Pero (2) tiene un nivel más alto de generalidad ya que ella queda confirmada en cualquier caso posible. Quizá por esto es que pretendemos ver una mayor ‘fuerza’ en la expresión (2). Así mismo, la analiticidad —como la que encontramos en el caso de la expresión (2)— puede ser expresada en términos de de necesidad. La idea de la modalidad % se basa en la idea de analiticidad del modo siguiente: un enunciado de la forma ‘Necesariamente...’ es verdadero sí y sólo si el enunciado componente regido por ‘ necesariamente’ es analítico.

Se ve entonces que (2) y (3) son equiparables sobre la base de esta poco controvertible definición de la modalidad %. Si la expresión (1) se puede poner en términos de la expresión (2) (dado un aumento de generalidad) y esta expresión (2) a su vez es equivalente a (3), entonces es muy factible que (1) sea expresable en términos de la modalidad .

[7] Esta idea es de Gödel, pero el desarrollo de los ejemplos es mío.

Pero, no quiero detenerme ahora en este punto. Me interesa pasar a los problemas ontológicos de la teoría que estamos considerando. Uno de los puntos quizá más problemáticos de la teoría de los tipos lógicos es la ontología a la que nos conduce. Efectivamente, la teoría implica como consecuencia la existencia de una infinidad de colecciones universales, ya que las colecciones que contienen los objetos de cierto tipo son distintas las unas de las otras y puesto que los elementos de una colección determinada deben ser de un mismo tipo o al menos de un tipo inferior a un tipo fijo (Koyré 1981: 96). Esto es una consecuencia directa de la idea de que una función presupone sus objetos.

Una cierta falta de economía ontológica también se evidencia en el rechazo Russelliano de las clases. Recordemos que Russell sacrifica las clases en nombre del axioma de reductibilidad. Russell piensa que es menos problemático asumir este último que asumir clases. Sin embargo, el axioma en cuestión, como acabamos de ver, implica una infinidad de colecciones y en general de objetos. Quizá Russell no era consciente de que a pesar de los problemas que hay en torno a objetos abstractos como clases, es menos problemático tenerlas que asumir como totalidades dadas extensionalmente que tener que asumir predicados, propiedades, proposiciones etc..., las cuales tiene que asumir con su axioma de la reductibilidad como lo vimos en el caso de Napoleón. Las clases pueden hacer todo lo que hacen estos objetos (e incluso otros que veremos a continuación) y a pesar de sus dificultades son menos problemáticas que ellos.

Como ya lo decíamos, la eficacia de las clases depende de que sirven el propósito de sustituir objetos abstractos como las relaciones, las funciones y los números mismos. Las clases pueden hacer el trabajo que hacen las relaciones porque ellas pueden reemplazar a los pares ordenados y también pueden hacer el trabajo de los números si asumimos la definición de número que dan Frege y von Neumann. La versión de Frege dice que un número natural n sirve primariamente para medir multiplicidad y puede ser visto como la clase de las clases de n miembros. La versión de von Neumann es quizá un poco más intuitiva: un número, nos dice, sirve sobre todo para contar. Cuando contamos los miembros de una clase de n-miembros relacionamos esos miembros con los primeros n números y n mismo, para von Neumann, es precisamente la clase de los primeros n números.[8] También

[8] No pretendo detenerme en este punto específico. Me interesa más el punto

las clases en matemáticas pueden hacer el trabajo que hacen números más complejos como números racionales, reales, complejos ya que estos pueden ser explicados sobre la base de números naturales como n por medio de construcciones de clases y relaciones. Funciones numéricas también pueden ser explicadas en términos de relaciones de números como n.

La adopción de clases en nuestra ontología también puede servir para evitar la modalidad en ciertos puntos. Consideremos las expresiones 'Todos los cuervos son negros' y 'Todos los cuervos negros son negros':

$$(x)(Cx \quad Bx), (x)\ (Bx.Cx. \quad Bx)$$

Podemos considerar la primera de estas afirmaciones como una simple cuestión de hecho pero la segunda tenderemos a verla como teniendo una necesidad lógica. Así, nos gustaría poder cambiar la implicación material aquí por una implicación estricta del tipo:

$$(x)(Bx.Cx. < Bx)$$

Ahora bien, hay problemas ontológicos que se presentan en torno a la modalidad (es decir, a la necesidad y la posibilidad) y tenemos fuertes razones para evitar, en la medida de lo posible, la modalidad y las conectivas modales.[9] Los contextos que se introducen por medio de 'necesariamente...' o 'posiblemente...' son referencialemte opacos y como tal no son contextos accesibles a un cuantificador que se coloca pr fuera de ellos. La solución acá consiste en decir que en ciertas ocasiones, la generalidad es un buen sustituto para la necesidad. El deseo de añadir necesidad a la segunda de las afirmaciones que considerábamos más arriba puede ser satisfecho por medio de la asunción de 'cuervo' y 'negro' como dos clases y y z añadiendo que *generalmente* cualquier cosa que pertenezca a y y z pertenece a z.

Claro está que las clases presentan ciertos problemas también. Una asunción a-crítica de las clases en nuestra ontología nos puede llevar a ciertos absurdos como el que encontramos en las paradojas que hemos venido venido analizando (pensemos sobre todo en el caso de la paradoja de Russell

[9] Es Quine (1984) quien ha señalado los problemas ontológicos a que nos lleva la aceptación de la modalidad.

que tiene que ver directamente con clases). Aún así, podemos decir que las clases tienen ciertos beneficios que no se pueden conseguir por medio de la adopción de otros objetos menos problemáticos

Unos de esos objetos son los atributos. La definición de Frege la podemos poner en términos de la clase que tiene el atributo de tener n miembros. Si los atributos pueden hacer (en algunos casos) lo que hacen las clases y si ambos son objetos abstractos ¿por qué hemos de quedarnos con las clases y desechar los atributos?

Podemos comenzar a contestar esta pregunta examinando la diferencia que existe entre atributos y clases. Las clases, diremos, son las mismas cuando sus miembros son los mismos mientras que los atributos pueden ser considerados diferentes aunque sean poseídos por los mismos objetos. Esto hace que las condiciones de identidad de los atributos sean mucho más oscuras que las condiciones de identidad de las clases; es más difícil identificar un atributo que una clase (Quine, 1973: 136). Pero, no deseo profundizar en este punto. Otro punto crucial es que la figuración de nombres dentro de nombres de atributos no es designativa. Las expresiones que especifican atributos no son accesibles a pronombres. Las expresiones que especifican atributos no son contextos accesibles a pronombres que se refieran a cuantificadores anteriores. Esto es un impedimento para los fines de la matemática (Ibid.: 137-138).

Pero, aquí debemos aclarar que Russell no podía ver los beneficios de la adopción de clases extensionales en lugar de las clases intensionales (con todos los oscuros objetos que ellas conllevan, como los atributos por ejemplo) ya que la definición Russelliana de clase es intensional. Para Russell una clase C se definde como *x φ x. Quizá por esto Russell intentó evitar las clases y construir una teoría sin ellas. Algunos como el positivista Hans Hahn pensaron que esto constituía la liberación de la matemática del platonismo y su reconciliación como una ontología concreta. Pero, en realidad, Russell, como ya lo hemos dicho, sacrifica las clases sólo para quedarse con otras entidades más oscuras y problemáticas que las clases. La teoría de Russell a veces usa la función proposicional como una variable ligada que toma como valores atributos. Un caso claro de esto lo encontramos en esa parte de la teoría de los tipos lógicos en la cual Russell nos dice que si una función proposicional presupone la totalidad de sus posibles argumentos, debe hacerlo de una manera intensional y no extensional ya que el conjunto de posibles argumentos en este segundo caso sería infinito.

Bibliografía

CAICEDO, X. 1993 La paradoja de Berry revisitada o la indefinibilidad de la definibilidad y las limitaciones de los formalismos, en *Revista Lecturas Matemáticas*, Vol XIV, Nos. 1-2-3, abr.-dic.

GÖDEL, K. 1981 La lógica matemática de Russell, en *Cuadernos de Filosofía y Letras*, Vol. 4 no. 1-2, enero-junio Universidad de los Andes, Bogotá.

KASNER, E. 1986 *Matemáticas e imaginación*. Barcelona: Orbis.

KOYRÉ, A. 1981 Epiménides, el mentiroso (conjunto y categoría), en *Cuadernos de Filosofía y Letras*,Vol.4 No.1-2, Universidad de los Andes, Bogotá.

QUINE, W.O.v. 1973 Notas sobre existencia y necesidad, en: Moro S., Tomás, *Semántica filosófica, problemas y discusione ,* Bs. Aires: Siglo XXI.

QUINE, W.O.v. 1984 *Referencia y Modalidad*. Barcelona: Orbis.

WHITEHEAD, A.N. & RUSSELL, B. 1910-1927 *Principia Mathematica,* Cambridge, Cambridge University Press