Dirección General de Cultura y Educación

De la Provincia de Buenos Aires.

Instituto Superior Fundación Suzuki.

DIPREGEP Nº 3882.

Construcciones geométricas con regla y compás.

"Pasos".

Tesina para optar al título de profesor de matemática.

Nahuel Ayala.

San Miguel.

Buenos Aires.

20 diciembre de 2008.

Por haberme permitido llegar hasta acá, por motivarme a ser lo que soy, les estaré siempre agradecido.

Gracias Mónica Ufor por mostrarme el valor de la matemática.

Gracias Silvana Samudio por darme libertad y la posibilidad de crear.

Gracias Carlos Grande por enseñarme a enseñar.

Gracias Claudio Oglietti por ser el ejemplo a seguir.

Gracias madre por haberme brindado la mejor preparación para el futuro.

“Con el correr de los días, Juan se sorprendió pensando una y otra vez en la tierra de la que había venido. Si hubiera sabido allí una décima, una centésima parte de lo que ahora sabía, ¡Cuánto mas significado habría tenido entonces la vida!... Porque, a pesar de su pasado solitario, Juan Gaviota había nacido para ser instructor, y su manera de demostrar el amor era compartir algo de la verdad que había visto con alguna gaviota que estuviese pidiendo solo una oportunidad de ver la verdad por si misma”.

Richard Bach; Juan Salvador Gaviota.

ACLARACIÓN DEL TÍTULO

La elección del título se basa en cuatro particularidades de este trabajo:

- Es sólo una introducción para el tema, una presentación de los aspectos generales y de algunos ejemplos puntuales. No busca abarcar todo el tema, es simplemente ***el primer paso*** para conocerlo.
- El contenido se desarrolla ***paso a paso***, de tal manera que sea sencillo se seguir y fundamentalmente, de entender. Así, tanto la explicación del tema, como la construcción de los ejemplos y su evolución a lo largo de la historia se presentan punto por punto siguiendo un orden predeterminado y preciso.
- Para trabajar con este tema hay que manejarse de la misma manera que en una competencia de marcha; es decir que **no se pueden saltear pasos** ni tomar atajos. ***Cada paso es indispensable*** para terminar la construcción y no pueden utilizarse otros instrumentos más allá de la regla y el compás.
- Y por último, no se busca presentar el tema como una simple herramienta para llegar de un lugar a otro, dejando la impresión de que es obligatorio utilizarlo por no tener otro camino. Por el contrario, el objetivo real es que el alumno disfrute mientras construye y que le ayude a ejercitar la mente. Se busca lograr ***la sensación de que se pasea*** sin ningún apuro para apreciar el paisaje y **estar saludable**.

RESUMEN

Este trabajo apunta a la revalorización y reposicionamiento de las construcciones realizadas con regla y compás dentro de la educación de nivel secundario.

Para esto, de definen y explican los conceptos y particularidades fundamentales de este tema. Y también, se analiza su papel en el desarrollo integral de los alumnos, las distintas posibilidades que presenta a la hora de ser enseñado y su evolución a lo largo de la historia.

A su vez, para dar una idea de todo lo que se puede construir con la regla y el compás, se incorporan varios ejemplos desarrollados paso a paso. Y a cada uno se lo acompaña con las imágenes parciales y finales de las construcciones.

Por último, y con el objetivo de confirmar que el tema no se termina con un par de construcciones básicas, se agrega una descripción de su utilidad en el último año de la educación secundaria. Allí se ve como, a partir de la regla y el compás, se pueden efectuar simetrías de manera muy sencilla.

ABSTRACT.

This report to hint at revalue and replacement of the constructions realice with a rule and a pair of commpasses in the secondary education.

For this, it is defined and explains the fundamental concept and singularitys of this theme. And to, it analyse its role in the integral development of the pupils, and the dustinct possibilitys that this present at the hour this teach, and its evolution lengthways of the history.

At the same time, and for to give an idea of every this that it is can to construct with the rule and the pair of commpasses, it is include several developed examples at very turn. And each one is accompany with the partial and final construction images.

Finally, and for to confirm that the theme not finish with onr or two basic constructions, it incorporate a description of its utility in rhe last year of the secundary education. There it sees like, starting from the rule and the pair of commpasses, it can to do symmetri the easy manner.

DESCRIPTORES

- Geometría.
- Dibujo.
- Construcciones.

INTRODUCCIÓN

Elegí este tema porque combina perfectamente mis principales intereses: la matemática y el arte.

Desde pequeño he tenido facilidades para la matemática. Mientras mis compañeros tardaban en resolver los ejercicios que nos daba el docente, yo me aburría por haberlos terminados rápidamente. Fue así que empecé a dibujar.

Para hacer algo con el tiempo que me sobraba, tomé una hoja cuadriculada, un lápiz, una regla, un compás (todo lo que yo utilizaba para matemática) y comencé a crear. Al principio fueron sólo líneas, pero como esto se volvió habitual, me fui perfeccionando. Aprendí a aprovechar todas las oportunidades que me brindaban esos instrumentos y los llevé más allá de lo práctico, lo necesario o lo útil (según el criterio de los demás). Gracias a esto, hoy tengo gran capacidad para visualizar imágenes y para crearlas. Sin saberlo, a partir de ese divertimento, mejoré mi potencial.

Así descubrí como la matemática puede utilizarse para crear arte, y como el arte puede guiar a la matemática. Fue ese placer por hacer algo distinto, por el desafío, por las limitaciones, por las posibilidades, por la simplicidad, que percibí el verdadero valor de cada uno en función del otro.

Hoy me es imposible considerar a uno exento del otro, no los puedo visualizar como áreas totalmente independientes entre sí. Los dos se integran aportando formalidad y coherencia matemática con libertad y fantasía artística. Y esto se logra en mí visión de la geometría.

Es por esto que quiero compartírsete tema con los demás. Yo se que mi caso implicó un desarrollo autodidacta, que no dependí de otro que me lo enseñara, pero también se que muchos no contaron con esa posibilidad. Se quedaron en el camino, ya perdieron.

Pero hoy estoy del otro lado; hoy yo puedo ayudar a los que recién están dando sus primeros pasos. Y creo que este trabajo puede servir para lograr ese objetivo.

FUNDAMENTACIÓN

Para empezar a comprender el sentido de este trabajo, primero debemos visualizar el rol que cumple la escuela en la vida de los alumnos. Nos referimos a que, más allá de recrear y transmitir las pautas propias de la cultura en la cual está inmersa con el objetivo de perpetuarla, la escuela debe apuntar a lograr el desarrollo integral de los alumnos. Se los debe preparar para desenvolverse adecuadamente en la sociedad y para aprovechar todas las oportunidades que se les presenten.

Será la mejor preparación la que les de ventaja; la mayor capacidad la que les permita progresar, crecer y desarrollarse como individuos, como personas. Y el primer paso para conseguirlo es brindarles la mayor cantidad y diversidad de experiencias de vida durante su etapa de formación; o sea, durante sus años escolares.

Sin embargo, esto es muchas veces ignorado. Es algo común que se descuiden o excluyan algunos aspectos o contenidos de la enseñanza por la simple razón de considerarlos secundarios o sin valor para el futuro de los alumnos. Y esto se traduce directamente en que ellos ven disminuidos o limitados sus conocimientos por una decisión autoritaria de alguien más. Por el desconocimiento de otros se les están quitando oportunidades. Esto es lo que queremos cambiar.

El desarrollo de una persona puede analizarse desde varios contextos o campos. Hay muchos puntos de vista acerca de lo que requiere un individuo para constituirse como tal. Pero por lo general se reconocen cinco aspectos básicos que deben ser logrados para estar en igualdad de condiciones frente a los demás. Tales aspectos son: lo cognitivo. Lo interactivo, lo práctico, lo ético y lo estético.

Ahora bien, a medida que uno se desarrolla va adquiriendo habilidades propias en cada uno de estos campos; y esto es lo que se denomina capacidad. De este modo se distinguen cinco capacidades fundamentales: la capacidad cognitiva que se refiere a los procesos analíticos y creativos necesarios para operar con símbolos, representaciones e ideas, la capacidad interactiva que implica poder participar como miembro activo en un grupo; la capacidad práctica que se manifiesta en el dominio de los recursos las acciones de manejo, organización y despliegue; la capacidad ética que es poseer un juicio critico de valores irrenunciables y el accionar de acuerdo a ellos; Y la capacidad estética o el gusto y placer por las manifestaciones artísticas en todas sus dimensiones mediante la apreciación de la belleza. Las personas que no logren alguna de estas capacidades o que no puedan integrarlas adecuadamente tendrán menos oportunidades que los demás, estarán en inferioridad de condiciones, se verán limitados. No estarán capacitados.

Conociendo esto, ahora ya podemos profundizar en el tema de este trabajo: construcciones con regla y compás. Y lo haremos a partir de tres preguntas.

¿Por qué geometría?

La geometría se destaca por relacionar los contenidos netamente conceptuales de la ciencia, con los aspectos más simples de la vida cotidiana. Desde nuestra infancia, para conocer el mundo que nos rodea, nos basamos en la forma de los objetos, en su ubicación, en sus movimientos y en como se relacionan entre sí. Percibimos en todo momento su presencia y la consideramos como algo común. Tan común que por lo general se la pasó por alto, se le sacó valor. Y esta desvalorización la condujo a su situación actual:"*la geometría es una de las ramas de la matemática que a lo largo de las últimas décadas ha ido perdiendo su lugar en la enseñanza. Con el transcurso de los años fue olvidada, rezagada al final de los programas de nivel primario y medio, unas veces, incluso reducida a la mínima expresión y otras, ignorada: en el mejor e los casos, sólo se trataban conceptos de geometría plana o se estudiaban las figuras y cuerpos geométricos como aplicaciones de cálculos aritméticos y ejercicios de reducción de unidades de magnitud como longitud, superficie o volumen"* (Crespo Crespo, 1998).

Sin embargo, esto puede modificarse.

El punto de partida es reconocer sus características y ventajas, y de este modo se facilitará la comprensión de cómo aprovecharla y de cómo debe ser enseñada a los alumnos. Debemos considerar que "*esta rama de la matemática ofrece la posibilidad de inferir y enunciar propiedades a partir de la observación y* *experimentación con objetos y dibujos, permitiendo luego a través de demostraciones sencillas, aplicar con los alumnos el método deductivo.*

En la geometría se pueden plantear y resolver gran variedad de ejercicios y problemas: algunos tradicionales, otros creados a partir de definiciones y conceptos básicos o mediante la recreación de problemas clásicos. Estas estrategias didácticas llevan e los estudiantes a trabajar tanto las nociones netamente geométricas como el abordaje de conceptos algebraicos o analíticos sin perder, en estos últimos casos, la fuerza conceptual de las ideas geométricas. Se trata entonces de no permitir que el álgebra, la aritmética o el análisis ahoguen a la geometría y la conviertan en una mera aplicación, con el consiguiente desperdicio de su riqueza conceptual, procedimental y actitudinal" (Crespo Crespo, 1998).

Con esto, buscamos demostrar la necesidad de incorporar o revalorizar otros enfoques de la geometría, pues la consideramos una importante herramienta para desarrollar la capacidad cognitiva en los alumnos. Y este trabajo precisamente presenta uno de esos enfoques, pretendiendo revivir el interés en la materia.

¿Por qué dibujos?

En este caso es necesario señalar que "*el dibujo es la base de muchas actividades artísticas (arquitectura, pintura, escultura), industriales y científicas; es imprescindible en los llamados oficios artísticos (joyería, repujado, publicidad, carpintería, etc.). es también un excelente auxiliar pedagógico para desarrollar en los escolares la capacidad de observación y la agilidad anímica y manual"* (diccionario enciclopédico Neofons, 1995). Aquí se ve como los dibujos permiten desarrollar la capacidad práctica, cuya ausencia o falta de desarrollo se aprecia nítidamente en la mayoría de los alumnos a la hora de ser precisos. Pero el verdadero error está en no buscar la mejoría o no creer necesitarla. Y el motivo de esto es que muchas veces se lo deja pasar, no se le da importancia. No se comprende que, si no se trabaja desde temprano, después ya no se podrá lograr. Su desenvolvimiento Manuel, su agilidad motora, se verá perjudicada porque nunca se la puso en práctica, nunca le mostraron lo valioso que es, nunca se la exigieron.

Y esto puede modificarse sencillamente. Solo basta incorporar actividades en donde sean fundamentales las palabras “precisión” y “prolijidad”, y que contribuyan a su apreciación de manera clara; lo cual ocurre con este tema. Aunque es preciso destacar que las palabras solas, sin estar acompañadas de su materialización, no tienen sentido alguno. Así, es indispensable que el mismo docente aplique estas cualidades un sus propias actividades; que demuestre la manera de hacerlo, que de el ejemplo. Esto último forma parte del rol docente y únicamente así se alcanzará el verdadero aprendizaje.

Pero también hay otro motivo para los dibujos, un motivo que se aleja del enfoque matemático con el que venimos trabajando y se acerca a otra área del conocimiento: la artística. Así, podemos visualizar que “*en la génesis de toda imagen se encuentra el afán comunicativo que prevalece en el arte en general. Realizar una imágenes hacer visible un conjunto de ideas, emociones y sensaciones con la finalidad de comunicarla (a otros, a uno mismo) mediante elementos visuales… seleccionados, combinados y organizados con determinado sentido estético*” (Sprovskin, 1998).

Esta vinculación directa entre una imagen y la estética está presente en la esencia de nuestro trabajo, dado que para los antiguos griegos (las autoridades del tema) la geometría alcanzaba la categoría de un arte; era el arte de la mente. Su correcta utilización implica un despliegue de sencillez, claridad, orden, simetría y armonía; los cuales componen el concepto de belleza. Y de esto se vale el contenido de este trabajo

Es así que el tema también incentiva a desarrollar la capacidad estética en el alumno, la cual tiene el mismo valor que todas las otras (aunque por lo general se la desprecie).

¿Por qué construcciones con regla y compás?

Y llegamos al eje de este trabajo, cuyo valor debe ser analizado a su vez desde tres perspectivas.

En la primera, debemos visualizar la idea principal del tema: a partir de varios trazos precisos se pretende combinar la mayor cantidad de conceptos geométricos y únicamente se permite utilizar dos sencillos instrumentos. Ahora solo basta recordar los conceptos que ya hemos presentado anteriormente y nos encontraremos con que los trazaos son dibujos que promueven el desarrollo de las capacidades práctica y estética; los conceptos geométricos implican tratamientos mentales necesarios para el crecimiento cognitivo; y los dos instrumentos mencionados posibilitan la integración. Nos referimos a que el manejo de la regla y el compás, más allá de ser algo práctico (lo cual podría considerarse evidente), también ayuda a mejorar las capacidades cognitiva y estética. Su correcto manejo requiere conocer y comprender parte de la geometría, y con ellos se crean manifestaciones dotadas de belleza. Pero lo fundamental es que las tres capacidades se trabajan al mismo tiempo, juntas. Así, el alumno se encuentra frente a la tarea de visualizar los distintos pasos a realizar, comprender el motivo de cada línea, poner en práctica su precisión y el concepto que tiene de ella, aprovechar al máximo los recursos con los que cuenta, tener en claro el objetiva a alcanzar, etc. Son sólo algunos de los muchos desafíos que surgen de un solo ejercicio, de una sola construcción.

La segunda perspectiva se refiere puntualmente al papel que cumplen los trabajos con regla y compás en la historia de la matemática. Fue su utilización con el fin de resolver ciertos problemas la que motivo toda una serie de adelantos y nuevas formas de pensar para el mundo científico. Sirvieron, de cimiento para el pensamiento griego y para buena parte de la matemática que apareció después. Sus características y limitaciones particulares posibilitaron el acceso a las secciones cónicas, el cálculo aproximado del número de oro y la sección áurea, las curvas trascendentes, el método de exhaución que precedió al cálculo de límites, etc.; por mencionar sólo algunos de sus aportes.

Y por último, hay que remarcar que tanto la regla como el compás son muy sencillos de sustituir, favoreciendo en gran medida su versatilidad. Es así que, de no disponer de estos instrumentos (como sucede en muchas instituciones educativas y hogares), se pueden emplear el borde de algún objeto, un trozo de madera o incluso un cordón tenso para trazar rectas; y con atar un extremo de un cordón a un lápiz o a una tiza y mantener apoyado el otro extremo en un punto (el centro) se consiguen trazar circunferencias. Esto también se ve potenciado porque las construcciones con regla y compás en las que se centra este trabajo no requieren transportar distancias (no hay que repetir medidas), lo cual es muy sencillo con una regla o un compás, pero muy difícil si no se cuenta con ellos.

Además, esto también permite que las construcciones se realicen por medio de programas informáticos muy básicos, permitiendo contar con otro tipo de presentación. Así, las escuelas con más recursos (el otro extremo) también pueden aprovechar este tema y acercarlo a los jóvenes que pasan mucho tiempo frente a las computadoras. Y esto puede ser complementado posteriormente con la comprobación en una hoja de papel y con los verdaderos instrumentos.

De este modo, finalmente, que arribamos a las razones que nos llevaron a realizar este trabajo. Tanto por su importancia en el desarrollo del individuo, como en el desarrollo de la matemática, y así también por estar al alcance de todos, consideramos que las construcciones con regla y compás deben ganar protagonismo dentro de la enseñanza.

SUPUESTOS

- La existencia de varias construcciones cuyo aprendizaje signifique un aporte de calidad a la formación de los alumnos.

- Lo beneficioso del manejo de la regla y el compás para lograr precisión y prolijidad.

- La existencia de más de un camino para realizar la misma construcción.

LIMITACIONES

- La extensión y complejidad de las demostraciones.

- La desvalorización pedagógica del tema.

- La gran cantidad de construcciones falsas o realizadas erróneamente.

MARCO HISTÓRICO DE LAS CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO GRIEGO.

Para los antiguos griegos, la matemática era un arte y estaba más vinculada con la filosofía que con los problemas prácticos de la vida ordinaria.

El tratamiento que le dieron la dividió en cuatros campos diferenciales y bien reconocibles: la teoría de los números, la geometría métrica (referida al desarrollo de las fórmulas para calcular el área y el volumen de las figuras y cuerpos geométricos conocidos), la teoría del razonamiento, y la geometría no métrica centrada en las construcciones geométricas con regla y compás.

De todo esto, fue el último campo el que ocupo el lugar privilegiado y en el cual hicieron más aportes.

Este tipo de geometría era, según la consideración de Platón (Grecia, 427-347 a.C.), el arte de la mente. Su concepción de un mundo de las ideas y de un mundo de los sentidos se ve reflejada directamente en las construcciones. En el mundo que percibimos todos los días, el mundo real, el potencial de la regla y el compás se vía reducido a una simple aproximación que podía alcanzar mayor o menor grado de precisión. Pero en el mundo ideal, el que se manifiesta en nuestras mentes, las construcciones son perfectas y manifiestan de manera pura a la belleza.

La razón de esto se encuentra en que las rectas y las circunferencias eras vistas como las curvas perfectas y básicas a partir de las cuales todas las demás construcciones eran posibles. Y su presencia en el mundo físico se lograba a través de la regla y el compás, los denominados instrumentos divinos.

Con ellos se aseguraba una geometría simple, ordenada, armónica y estéticamente bella. Y fue justamente esto, con el objetivo de mantenerla así, inalterable y cercana a lo ideal, lo que motivó la implementación de restricciones arbitrarías a lo que se podía utilizar para crear las construcciones. Además, Platón consideraba que cualquier otro instrumento haría intervenir y depender demasiado del mundo físico, dejando relegado al mundo de lo ideal y lo perfecto. En tanto que Pappus (Grecia, siglo V) indicaba que si una construcción puede realizarse con regla y compás, cualquier otra solución utilizando medios distintos no era satisfactoria.

LOS PROBLEMAS GRIEGOS.

Los problemas más famosos que se propusieron para su resolución por medio de la regla y el compás son la cuadratura del círculo o rectificación de la circunferencia, la duplicación del cubo, y la trisección del ángulo; a los que a veces se agrega la construcción del heptágono regular (el primero de los infinitos polígonos regulares imposibles de construir con regla y compás).

En realidad, estos problemas son generalizaciones de otros problemas ya resueltos por los griegos. Puesto que cualquier ángulo puede ser bisecado de una manera sencilla, era natural plantearse la trisección. Si la diagonal de un cuadrado es igual al lado de un cuadrado cuya área es el doble que la del primero, por que no intentar algo similar con dos cubos. Y el caso de la cuadratura encaja dentro de un conjunto de problemas muy habituales para los griegos en los que se debía construir una figura de una forma dada y de área igual a la otra figura dada. Por último, el trazado de el polígono de siete lados se desprende directamente de la posibilidad real de construir triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos regulares.

La otra característica particular de estos problemas es la sencillez del enunciado, el cual podría pertenecer de manera perfecta a cualquier libro de enseñanza de nivel primario o secundario, pero sin embargo han intrigado a la humanidad durante más de 2000 años. Así, el problema puede ser comprendido por una persona ajena a las matemáticas, pero su demostración está al alcance de unos pocos. Y en algunos casos, inclusive, exigieron el desarrollo de ramas enteras de la matemática.

Se han encontrado numerosas soluciones aproximadas con regla y compás, y soluciones exactas utilizando otros instrumentos. Y aunque se demostró consistentemente que estos problemas no pueden resolverse como pedían los griegos, todavía en nuestros días siguen apareciendo trabajos erróneos que aseguran haber encontrado la verdadera solución.

CUADRATURA DEL CÍRCULO O RECTIFICACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.

Es el problema cuya existencia comprobable se remonta más en el tiempo. En los escritos de Plutarco (Grecia, 50-100), se indica que Anaxágoras de Chazomene (Grecia, ¿-430 a.C.) intento encontrarle una solución mientras estaba en prisión (por afirmar que el Sol no era una deidad sino una gigantesca piedra al rojo vivo y que la Luna no era más que una tierra desabitada que recibía y reflejaba la luz del Sol). El problema consistía en construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo conocido.

Esto ha sido resuelto de muchas maneras, pero siempre utilizando otros medios, como por ejemplo:

- Cuadratriz de Hipias (¿-425 a.C.).
- Espiral de Arquímedes (287-212 a.C.).
- Cuadratriz de Tschirnhausen (1651-1708).
- Construcción geométrica de D. Spetch (1836) en la que construyó $\sqrt{\pi}$ = 0.8862268 metros, una excelente aproximación con seis decimales enteros.

Y también hubo varias aproximaciones que terminarían sirviendo de base para el método de exhaución de Eudoxo de Cnido (Grecia, 408-355 a.C.), considerado el predecesor del cálculo de límites actual:

- Inscripción de polígono de números de lados cada vez mayor por parte de Antifón (Grecia, siglo V a.C.).
- Circunscripción de polígonos de Brisson (Grecia, 450 a.C.)

Recién en 1882, Ferdinan Lindeman (Alemania, 1852-1939) demostraría que era imposible construir el valor exacto de $\sqrt{\pi}$ con regla y compás.

DUPLICACIÓN DEL CUBO.

Hay dos versiones del surgimiento de este problema, el cual consiste en construir un cubo cuyo volumen sea equivalente al doble del volumen de un cubo inicial. La primera se refiere a que Minos, rey de Creta, había quedado muy disconforme con el tamaño de la tumba (de forma cúbica) levantada en honrar a su hijo Graucus, y ordenó que se duplicara el volumen de la misma.

La otra versión surge de una obra de Eratóstenes (Grecia, 284-192 a.C.) y hace mención a una peste que azotaba a todo Atenas. Le había ocasionado la muerte a un cuarto de la población ateniense, incluyendo al gran Pericles (Grecia, 495-429 a.C.). Por esto, se envió a una delegación al oráculo dedicado a Apolo en la ciudad de Délos (de allí que también se lo conozca como el "problema de Délos"). Este les contestó que para detener la peste debían detener el altar cúbico ubicado en ese templo. Al parecer, los atenienses duplicaron las medidas de los lados del altar original, lo cual produjo que el volumen del mismo se incrementara ochos veces y no dos; y así la peste continuó. Entonces fueron a consultarle a Platón lo que ocurría, y su respuesta fue que el oráculo con su pedido en realidad no quería un altar más grande, sino que buscaba castigar a los griegos por su indiferencia con respecto a la matemática y su falta de respecto hacia la geometría.

Este problema fue tratado por importantes personajes de la historia, como por ejemplo: Arquitas de Tarento, Hipócrates de Quío, Eratóstenes de Cirene (Grecia, 275-194 a.C.), Menecmo (Grecia, siglo IV a.C.) y Johannes Werner (Alemania, 1462-1522); pero ninguno logró los resultados esperados. A lo sumo, modificaron las reglas para aproximarse.

Esto último fue lo hicieron Menecmo y Werner, quienes lograron duplicar el cubo al construir el segmento buscado por medio de la intersección de una parábola con una hipérbola. Werner, en su obra "Elementos de las cónicas" de 1522, incluso presentó las ecuaciones y la construcción estas curvas a partir de un cono, y demostró como obtener una parábola con regla y compás, de manera muy similar a las realizadas por los griegos en la antigüedad.

En 1837, el Francés Pierre Wantzel probaría definitivamente que es imposible duplicar el cubo con regla y compás.

TRISECCIÓN DEL ÁNGULO.

Por la misma época en la que aparecieron los otros dos problemas, circuló por Atenas un tercer problema clásico: dado un ángulo arbitrario, construir con regla y compás un ángulo igual a un tercio del ángulo original. Aquí también nos encontramos con varias demostraciones que se valen de la utilización de otros instrumentos, tal como lo hizo Arquímedes primero con la espiral que lleva su nombre y luego con una regla marcada.

El mismo Pierre Wantzel daría la primera demostración rigurosa se su imposibilidad en 1837.

INFLUENCIA DE EUCLIDES.

El matemático Euclides (Grecia, siglo IV-III a.C.) organizó el trabajo de todos los matemáticos que lo habían precedido en una unidad bien estructurada, usando la lógica de Aristóteles y creando un modelo deductivo que por mas de 2000 años se consideró perfecto y que influenció la manera de pensar de la humanidad y también la enseñanza de la geometría en todas las escuelas del mundo. Nos referimos a los "Elementos", un compendio que reunió y sistematizó todo el conocimiento matemático presente en su época. Este contó de treces volúmenes dedicados a distintos aspectos de la matemática, pero se centró en una serie de demostraciones realizadas exclusivamente con regla y compás. Así, incluyó más de cien soluciones a diversos problemas geométricos utilizando únicamente esos instrumentos. Empezando por el primer volumen que incluye los teoremas sobre las construcciones básicas actuales, Euclides aplicó un compás que se cierra al separarse de la superficie en la cual se está trabajando: el compás ideal o, desde entonces, el compás euclídeo.

Además, y más allá del aspecto teórico, Euclides apuntó a lo práctico: construyó sistemáticamente cada figura que imaginaba y determinó que a partir de un determinado polígono, mediante un simple proceso de bisección, era posible construir otro polígono con el doble de lados.

CLASIFICACIÓN DE CONSTRUCCIONES.

La primera clasificación se debió a Pappus y el criterio elegido fue el tipo de curvas necesarias para encontrar la solución de cada problema. Así, en el libro III de su "Colección matemática" distinguió:

- Problemas planos: Pueden resolverse utilizando lugares o curvas planas, las cuales se construyen a partir de rectas y circunferencias. Son las únicas que se pueden solucionar con regla y compás.
- Problemas sólidos: requieren una o más curvas sólidas, denominación que adquieren las secciones cónicas que pueden obtenerse a partir de un cono.
- Problemas lineales: implican utilizar curvas lineales como las cuadratrices, las concoides, las cisoides y las espirales. Estas también eran llamadas curvas mecánicas porque se necesitaba cierto mecanismo especial para construirlas.

La segunda clasificación apareció en 1637 cuando Rene Descartes (Francia, 1596-1650) publicó su obra llamada "La geometría". Allí buscó clasificar los problemas para entender lo que había en cada uno de ellos y así saber como proceder para resolverlos. El criterio usado se refiere al grado de la ecuación algebraica a la que se llega una vez formulado el problema de la construcción. Además, Descartes analizó la clasificación de Pappus y determino que incluso la recta y la circunferencia requieren de algún instrumento para su construcción, por lo cual deben ser consideradas mecánicas. Pero esto implicaría que su construcción dejaba de ser absolutamente segura, por más que dependieran de los instrumentos ideales. Ante esto, concluyó que los instrumentos físicos no tienes ningún valor frente a la precisión matemática del razonamiento y que todas las curvas tienen la misma importancia a la hora de ser utilizadas.

Por último, estableció que las curvas geométricas son todas aquellas que pueden expresarse por medio de una ecuación algebraica (de grado finito) en X e

Y, con lo que aceptó que la concoide y la cisoide, mientras que llamó mecánicas a todas las demás curvas, como la espiral y las cuadratriz.

Su clasificación de los problemas geométricos es:

- Si el grado de la ecuación que permite la solución es uno o dos, la construcción puede efectuarse con rectas y circunferencias.
- Si el grado es tres o cuatro, deben emplearse cónicas.
- Y si el grado es superior a cuatro, se requieren curvas mas complicadas que las cónicas para hallar la solución.

Con esto, Descartes llegó a que la duplicación del cubo y la trisección del ángulo involucran ecuaciones cúbicas, por lo cual no pueden resolverse únicamente con reglas y compás. La cuadratura del círculo quedo sin clasificar. Sin embargo, es necesario mencionar que sus demostraciones de la imposibilidad de construir los otros dos problemas eran en realidad incorrectas

INFLUENCIA DE DURERO.

En 1525, el gran artista renacentista y aficionado a la matemática, Alberto Durero (Alemania, 1471-1528) publicó su obra “Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidos”. Con el pretendió enseñar a los artistas, pintores y matemáticos de la época diversos métodos para trazar figuras geométricas.

Su importancia se encontraba en el estudio que presentó sobre nuevas curvas que eran desconocidas para los antiguos. Por ejemplo, Durero tomó un punto fijo sobre un círculo y luego lo hizo girar sobre otro círculo para obtener una epicicloide. Pero el estudio no pudo ser analítico por no disponer de las necesarias herramientas algebraicas.

También incorporó el trazado de varias espirales con regla y compás, entre las que se destacó una que pasaría a la historia con su nombre: la espiral de Durero.

Se trata de una espiral gnómica (la misma figura básica se repite reiteradas veces) basada en los rectángulos áureos y la sucesión de Fibonachi (Italia, 1175-1240). Y su gráfica se asemeja en gran medida a la espiral logarítmica.

Además, Durero incorporó otras construcciones exactas, como la del pentágono regular de Ptolomeo (Grecia, siglo II), junto con otras originales y sólo aproximadas. Esto se debió a que no estaba familiarizado con la matemática rigurosa y por lo tanto no distinguía entre los resultados exactos y los aproximados. Así, aparecieron ingeniosas construcciones para los polígonos regulares de siete y once lados, aunque inexactas desde luego. Pero es para destacar el método de construcción del polígono regular de nueve lados, pues el ángulo que conforman los radios que pasan por dos vértices contiguos (que debería valer 40° para ser exacto) difiere en menos de 1° 18'.

CONSTRUCCIONES SÓLO CON REGLA O SÓLO CON COMPÁS.

A lo largo de la historia existieron muchos intentos para demostrar que todas las construcciones euclídeas podían resolverse de manera precisa con uno sólo de los instrumentos ideales; o al menos probaron otras limitaciones.

El primer intento conocido perteneció a Abul Wafá al Buzdyaní (Irán, 940-988), quien intento efectuar las construcciones a partir de una regla y un compás rígido.

Varios años después, esta idea fue retomada por Leonardo da Vinci (Italia, 1452-1519) para intentar inscribir polígonos regulares en una circunferencia.

Y a partir de esto, su utilización se volvió algo común. Se lo empleó para resolver de manera sencilla los problemas que surgían al levantar edificaciones; dentro de los cuales se destacó la construcción del pentágono regular que aparecía con frecuencia en las fortificaciones.

Así, surgieron los trabajos de Nicola Fontana Tartaglia (Italia, 1506-1557), Gevolamo Cardano (Italia, 1501-1576), Gaudenzio Ferrari (Italia, 1475-1546) y Giambattista Bennedetti (Italia, 1530-1590). Aunque es necesario decir que todos le dieron un enfoque práctico y no se interesaron en explicar las razones por las cuales el compás rígido podía sustituir al euclídeo.

Esta explicación llego en 1673, cuando George Morh publicó su "Compendius Euclidis Curiosi". En este aparece un tratamiento serio del tema y sienta las bases de que toda construcción puede realizarse de manera exclusiva con un compás.

Lo cual sería demostrado sin dejar lugar a dudas en 1794 en la obra "Geometría del compás" de Lorenzo Mascherani (Italia, 1750-1800).

Motivado por este trabajo, en 1822 Jean Víctor Porcelet (Francia, 1788-1867) propone que todas las construcciones euclídeas planas podían realizarse con la regla únicamente, si se contaba además con una circunferencia concreta y su centro. Esto fue demostrado en 1833 por Jacob Steiner (Suiza, 1796-1863), considerado el más grande geómetra de la época moderna. Así, el teorema conocido desde entonces como "de Porcelet-Steiner" demostró que no se puede prescindir totalmente del compás en la geometría euclídea, pero que una vez utilizado para trazar una circunferencia cualquiera, es posible dejarlo de lado y emplear únicamente la regla.

Finalmente, en el siglo XX se comprobó que sólo hace falta la regla, el centro de la circunferencia y un arco de tamaño arbitrario de la misma para efectuar cualquier construcción.

MARCO TEÓRICO DE LAS CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN.

Un problema de construcción implica partir de elementos ya conocidos (aquellos que son proporcionados de antemano o que ya han sido construidos en pasos previos) para obtener otros elementos respetando una serie de reglas. Estas constituyen una convención (varias personas se pusieron de acuerdo en su implementación) y no una necesidad lógica, lo cual permite sustituir o modificar cualquiera de esas reglas sin afectar el aspecto lógico del problema.

Lo fundamental del tema no es todo aquello que se puede construir (cuya simple construcción serviría de demostración), sino poder demostrar lo que excede a los límites de lo que se puede conseguir.

Las reglas a seguir por lo general son:

- ❖ Únicamente deben utilizarse ciertos elementos claramente definidos.
- ❖ Cada uno de los instrumentos puede utilizarse en una forma previamente determinada.
- ❖ Las construcciones deben terminarse un número finito de pasos.

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

Es el trazado de rectas y circunferencias (las formas mas apreciadas por los griegos) a partir del uso exclusivo de una regla y un compás ideales. Este adjetivo se refiere a que estos son idealizaciones de las reglas y compases del mundo real. Son conceptos matemáticos abstractos (como la raíz cuadrada de un número), no son instrumentos físicos. Representan la perfección de la mente y deben utilizarse para crear construcciones ideales, las cuales son tan concluyentes como el algebra. En el mundo real, en la hoja de papel, los puntos son manchas bidimensionales y los segmentos son franjas de cierto ancho; pero en la mente son manifestaciones plenas de precisión y belleza. Este es el eje sobre el que giran las construcciones: la sutil distinción entre el mayor o menor grado de precisión de un proceso aproximado y la exactitud del pensamiento

LA REGLA IDEAL.

Posee longitud infinita hacia ambas direcciones; se extiende tanto como sea necesario. Carecen de marcas que posibiliten la función secundaria de medir o trazar distancias. Y tiene un único borde (si tuviera dos bordes, permitiría trazar dos rectas paralelas).

Su función es trazar segmentos de rectas a partir de dos puntos conocidos y prolongar los segmentos ya existentes.

EL COMPÁS IDEAL O EUCLIDEO.

Su característica principal recae en que se cierra al instante de separarse del papel, olvidando el último radio utilizado. Y esto impide repetir o reutilizar una abertura predeterminada entre sus puntas y trasladar distancias de manera directa (lo cual es muy sencillo con un compás moderno). Su función es trazar circunferencias y arcos de circunferencias con cualquier punto como centro y de cualquier radio.

CONSTRUCCIONES BÁSICAS.

Todas las construcciones con regla y compás se logran a partir de sucesivas aplicaciones de cinco construcciones básicas. Y estas, a su vez, utilizan los puntos, segmentos y circunferencias que se han trazado en los pasos anteriores. Estas cinco construcciones son:

- Trazar la recta que pasa por dos puntos.
- Trazar la circunferencia con centro en un punto y radio determinado por otro punto.
- Marcar el punto de intersección de dos rectas.
- Marcar el punto de intersección de una circunferencia con una recta.
- Marcar el punto de intersección de dos circunferencias.

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS.

Un polígono regular pude construirse con regla y compás únicamente si su número de lados es igual a una potencia del número dos (2^n , con **n** ≤ **0**), a un número primo de Fermat (aquellos con la forma $2^{2^m}+1$, con m ≤ **0**) o el producto de una potencia del número dos y varios primos de Fermat distintos entre sí.

A esto hay que agregarle que los primeros cinco, y los únicos conocidos, números primos de Fermat son el tres (**3** $= 2^{2^0}+1$), el cinco (**5** $= 2^{2^1}+1$), el diecisiete (**17** $= 2^{2^2}+1$), el doscientos cincuenta y siete (**257** $= 2^{2^3}+1$) y el sesenta y cinco mil quinientos treinta y siete (**65537** $= 2^{2^4}+1$).

Volviendo a los polígonos, se sabe que:

- Si un polígono regular de **n** lados puede construirse con regla y compás, también pueden construirse los de **2n**, **4n**, **8n**, etc. Sólo hay que trazar la circunferencia circunscripta al polígono (la circunferencia que pase por todos sus vértices) y hacer las mediatrices de los lados. Así, a partir de un triángulo (3 lados), se puede obtener un hexágono (6 lados), un dodecágono (12 lados), etc.
- Y si un polígono regular de **n** lados puede construirse con regla y compás, también pueden construirse los polígonos cuyo número de lados sea un divisor de **n**. sólo basta trazar segmentos entre sus vértice de **m** en **m**. De este modo, a partir de un dodecágono (12 lados), si se unen sus vértices de 4 en 4 se obtiene un triángulo (3

lados), de 3 en 3 se llega a un cuadrado (4 lados) y de 2 en 2 se logra un hexágono (6 lados).

Con esto, ya es posible analizar qué polígonos pueden construirse con regla y compás, y cuales no:

Triángulo $\longrightarrow$ tres lados $\longrightarrow$ $3 = 2^{2^0} + 1$

Cuadrado $\longrightarrow$ cuatro lados $\longrightarrow$ $4 = 2^2$

Pentágono $\longrightarrow$ cinco lados $\longrightarrow$ $5 = 2^{2^1} + 1$

Hexágono $\longrightarrow$ seis lados $\longrightarrow$ $6 = 2^1 \times (2^{2^1} + 1)$

Heptágono $\longrightarrow$ siete lados $\longrightarrow$ $7 \neq 2^n \times (2^{2^m} + 1)$

El heptágono es el primero de los infinitos polígonos cuya construcción es imposible utilizando únicamente regla y compás, pues el número siete no cumple la forma correspondiente.

<u>CONSTRUCCIONES DE NÚMEROS.</u>

La construcción de un número implica en realidad construir un segmento cuya medida sea igual a ese número en unidades de longitud. Utilizando únicamente la regla y el compás es posible determinar todo el conjunto de números que resultan de la suma, la resta, la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas de números enteros. Y estas operaciones pueden repetirse todas las veces necesarias hasta alcanzar el número buscado.

Sin embargo, existen infinitos números que no entran en ese conjunto y cuya construcción se vuelve imposible utilizando únicamente esos instrumentos. Tal es el caso de π y de las raíces con índice mayor a dos que tengan resultados irracionales, los cuales tienen una importancia fundamental a la hora de analizar los tres famosos problemas griegos.

CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS.

Para que un ángulo pueda construirse con regla y compás, es indispensable que alguna de funciones seno, coseno o tangente (o todas) tenga como resultado un número que se puede trazar con esos instrumentos. Están directamente relacionados con los polígonos que se pueden construir con los mencionados instrumentos de la siguiente manera: $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, en donde α es el ángulo en cuestión y $\mathbf{n}$ es el número de lados del polígono. Es así que el número de ángulos que se pueden trazar es muy limitado, lo cual imposibilita de partida el poder encontrar una solución al problema de la trisección de cualquier ángulo.

PROBLEMAS GRIEGOS.

CUADRATURA DEL CÍRCULO O RECTIFICACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA: Encontrar la medida del lado de un cuadrado cuya área sea exactamente igual a la de un círculo dado.

Puesto que el área del círculo se calcula a través de la fórmula $A=\pi r^2$ (siendo r la longitud del radio) y la del cuadrado con $A=l^2$ (siendo l la longitud del lado), esto implicaría que $l^2= \pi r^2$ y que $l= r\sqrt{\pi}$. Pero he aquí que π no es un número que se pueda construir con regle y compás, haciendo imposible trazar un segmento de longitud $r\sqrt{\pi}$, el cual constituiría el lado del cuadrado.

DUPLICACIÓN DEL CUBO. Construir el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble que el de un cubo inicial.

Aquí nos encontramos con que, si el volumen del cubo inicial es a^3, el volumen del nuevo cubo debe valer $2a^3$. Pero como la formula para calcular el volumen de un cubo es $V= l^3$, esto nos lleva a que $l^3= 2a^3$ y a que el lado debe medir $\sqrt[3]{2a^3}$, o $a\sqrt[3]{2}$. Y ya se ha indicado la imposibilidad de calcular raíces con índice mayor a dos únicamente con regla y compás.

TRISECCIÓN DEL ÁNGULO: dividir un ángulo dado en tres partes iguales.

En este caso debemos tener en cuenta que nos referimos a una generalización, y no a casos particulares que si han podido trisecarse.

La demostración utiliza la identidad trigonométrica $\cos(3\alpha)=4\cos^3(\alpha)-3\cos(\alpha)$, en la cual debe reemplazarse el ángulo elegido y luego trabajarse hasta obtener una ecuación cúbica con raíces que pueden construirse. Para que quede más claro, primero comprobaremos que un ángulo de 60° si puede trisecarse, para luego ver que no es posible hacerlo con uno de 20°.

$$\alpha = 60°$$

$$\cos(3.60°)=4\cos^3(60°)-3\cos(60°)$$

$$\cos(180°)=4\cos^3(60°)-3\cos(60°)$$

Calculamos $\cos(180°)$ y reemplazamos $\cos(60°)$ por X

$$-1=4x^3-3x$$

$$4x^3-3x+1=0$$

Llegamos a una ecuación cúbica que debe ser factorizada para hallar sus tres raíces, las cuales deben poder construirse con la regla y el compás.

$$4(X-½)^2.(X+1)=0$$

Y tanto el 1 como el ½ pueden construirse.

En cambio, si hacemos lo mismo con $\alpha=20°$:

$$\cos(3.20°)=4\cos^3(20°)-3\cos(20°)$$

$$\cos(60°)=4\cos^3(60°)-3\cos(60°)$$

$$\cos(20°)=X$$

$$½=4X^3-3X$$

$$4X^3-3X-½=0$$

Y esta ecuación no tiene raíces dentro del conjunto de números que se pueden construir. Por lo tanto: no puede trisecarse un ángulo de 20° con regla y compás.

CONSTRUCCIONES SÓLO CON REGLA, O SÓLO CON COMPÁS.

Se refieren a los intentos de realizar, utilizando únicamente uno de los dos instrumentos, todas las construcciones que Euclides había logrado con regla y compás.

Esto condujo a resultados que demostraron la posibilidad real de obtener cualquier construcción contando sólo con el compás, exceptuando claro está el trazado de rectas. Se llego a que todos los puntos que conforman una construcción están al alcance del compás y que se pueden despreciar las rectas sin perder el sentido de dicha construcción.

Pero en el caso de la regla, se arribo a la conclusión de que era este instrumento de manera individual no permite realizar todas las construcciones; por ejemplo, no se pueden trazar segmentos equivalentes al valor de la raíz cuadrada de un número. De allí se dedujo que era indispensable contar, por lo menos, con una circunferencia y su centro prefijados en la hoja. O de lo contrario, se debía tener un compás de apertura fija (también denominado tenedor o compás oxidado) que posibilite trazar circunferencias de un único radio.

CONSTRUCCIONES EXTENDIDAS.

Implican la utilización de otros instrumentos más allá de la regla y el compás, o la modificación de estos con el fin de permitir el traslado de medidas.

Por lo general se refiere a la implementación de una regla graduada o marcada previamente a la construcción, o que ha sido marcada durante el proceso para conservar y posteriormente repetir una determinada distancia.

Esta "ayuda" permite incrementar el número de construcciones posibles, aunque se aparta de las pautas prefijadas.

Así, se logran resolver ecuaciones cúbicas, y los problemas de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo de manera sencilla; y se consiguen varios polígonos más. Sin embargo, aun con la regla marcada no se pueden obtener todos los polígonos, ni tampoco se logra la cuadratura del circulo (el otro famoso problema griego).

ORIGAMI.

El origami, doblado del papel o papiroflexia, presenta muchas similitudes con las construcciones con regla y compás. Para ser mas preciso, esta técnica cumple todas las reglas de un problema de construcción; y aunque son sólo hojas de papel, alcanza más resultados que la regla y el compás. En realidad, y tal como se ha demostrado, los puntos construidos por papiroflexia son los mismos que se lograrían con el compás y una regla marcada. Y esto también implica que la cuadratura del círculo tampoco puede conseguirse doblando una hoja de papel.

SECCIÓN ÁUREA.

Es la denominación que se le da a una proporción tradicional que es considerada clave para un diseño grato a la vista.

Se trata de dividir un segmento en dos partes desiguales pero de la forma más armoniosa posible, la cual se logra cuando la relación entre la longitud total y el segmento mayor es igual a la relación entre el segmento mayor y el menor.

Esta proporción también se conoce como phi (φ) o el número de oro, y equivale a $(1+\sqrt{5})/2=1,6180339887498948482045868343656 3...$

Si la sección áurea se encuentra en un rectángulo, el mismo se denomina rectángulo áureo (dos de sus lados miden **1** unidad y los otros miden $\mathbf{(1+\sqrt{5})\ /\ 2)}$ y su construcción resulta muy sencilla utilizando la regla y el compás.

ESPIRAL DE DURERO.

Es una espiral gnómica (la misma figura básica se repite reiteradas veces para formar una figura semejante) basada en los rectángulos áureos. La misma se aproxima bastante a la espiral logarítmica, salvo que esta se construye con regla y compás.

Siguiendo la sujeción de Fibonachi (0, **1**, **1**, **2**, **3**, **5**, **8**, **13**, **21**, **34**, **55**,...) en la cual cada termino es igual ala suma de los dos anteriores, se comienza con un cuadrado unitario (sus lados miden una unidad) y luego se van agregando otros cuadrados cada vez mayores que terminan formando rectángulos. Las medidas de estos rectángulos, a medida que se incrementa su tamaño, se van acercando a las de un rectángulo áureo y la relación entre ellos se termina estabilizando en un número muy próximo a phi.

Para visualizar esto, sólo es necesario dividir la longitud del lado más largo por la longitud del lado más corto, obteniendo los cocientes:

1/1=1	**13/8=1,625**
2/1=2	**21/13=1,615384615...**
3/2=1,5	**34/21=1,619047619...**
5/3=1,$\widehat{6}$	**55/34=1,617647059...**
8/5=1,6	**...**

ANÁLISIS DE LOS DATOS: CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

Las siguientes construcciones se desarrollan paso a paso con dibujos acompañados por una explicación escrita, brindando la posibilidad en las más sencillas de guiarse únicamente por los dibujos; mientras que en las más complejas se recomienda apoyarse tanto en los dibujos como en la explicación.

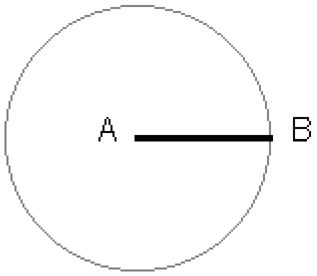
Otro dato a tener en cuenta es que varias construcciones requieren de otras que figuran con anterioridad en el trabajo para poder terminarse. Ante lo cual se optó por no repetir esos pasos y sólo indicar que se hizo para que el lector pueda buscar y seguir la primera explicación.

Además, en algunas construcciones se emplean circunferencias cuando en realidad sólo se necesitan secciones de las mismas: un arco. Esto se hace con el objetivo de que resulte más claro cual es el centro y el radio en cada caso.

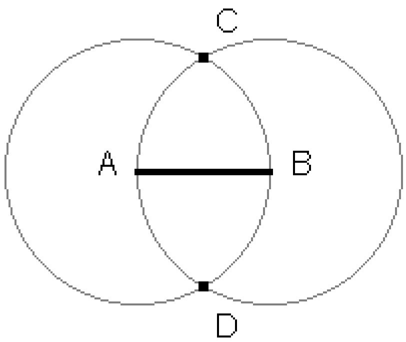
Por último, se recomienda que, una vez terminada la construcción que se utiliza de base para otra, se borren los trazos auxiliares para evitar errores en la siguiente construcción. Y que, de ser posible, se utilice papel cuadriculado para comprobar los resultados finales de manera simple al visualizar las cuadrículas.

1- MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO.

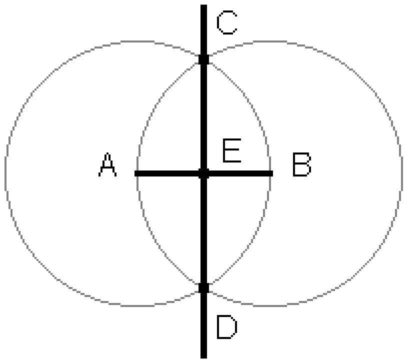
Partiendo del segmento $\overline{AB}$.



Con centro en A, trazar una circunferencia de radio $\overline{AB}$.

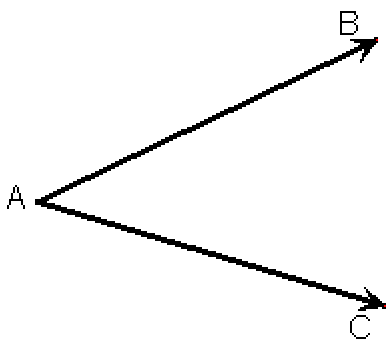


Con centro en B, trazar una circunferencia de radio $\overline{BA}$ ($\overline{BA} = \overline{AB}$) que intersecte a la primera circunferencia en los puntos C y D.

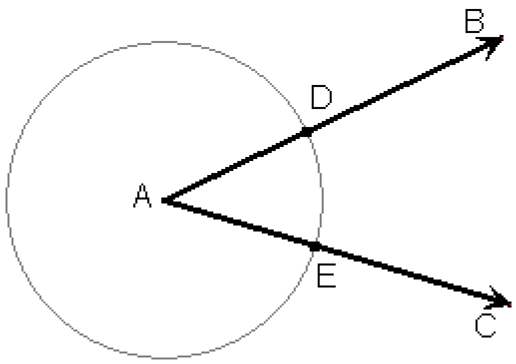


Trazar la recta que pasa por los puntos C y D; queda determinada la mediatriz, cuya intersección con $\overline{AB}$ es el punto medio del segmento (punto E).

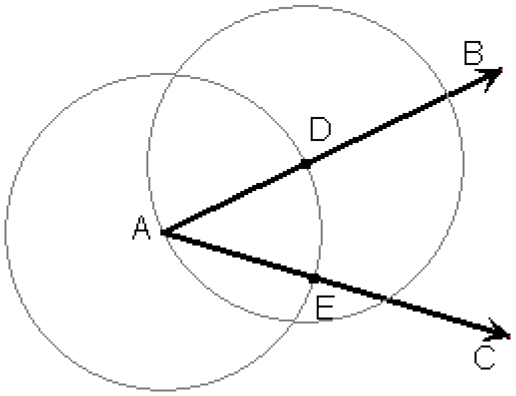
<u>2- BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.</u>



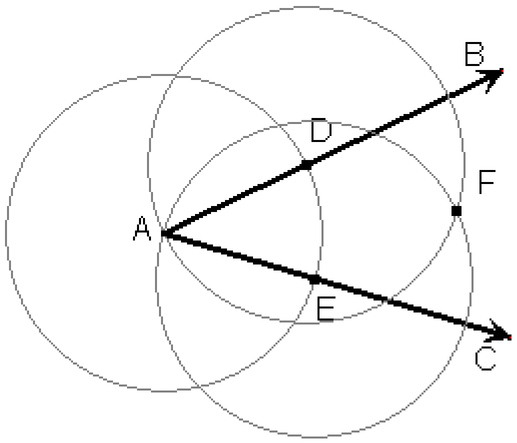
Dado el ángulo ABC.



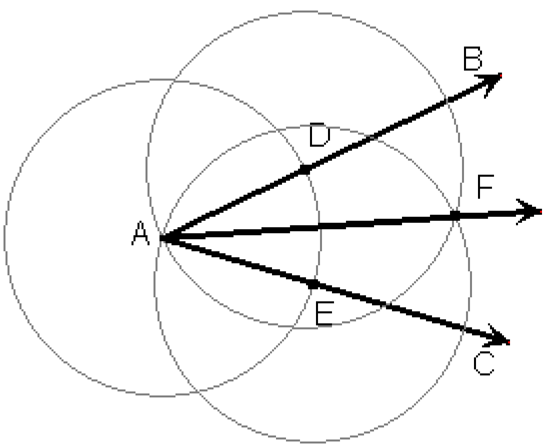
Con centro en B, trazar una circunferencia que intersecte a las semirrectas BA y BC en los puntos D y E respectivamente.



Con centro en D, trazar una circunferencia de radio $\overline{BD}$.



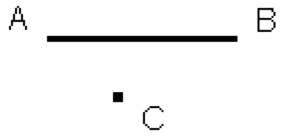
Con centro en E, trazar una circunferencia de radio $\overline{BE}$ ($\overline{BD}=\overline{BE}$) y que intersecte a la circunferencia con centro en D en un punto F.



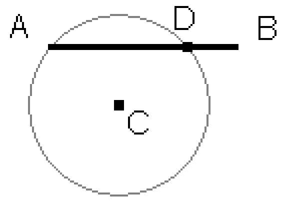
Trazar la semirrecta de origen B y que contiene al punto F; esta es la bisectriz del ángulo ABC.

3- ÁNGULO RECTO.

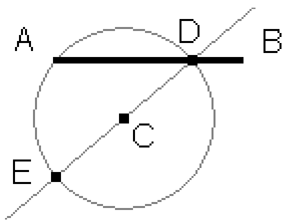
Partiendo del segmento $\overline{AB}$.



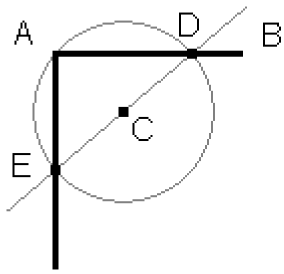
Marcar un punto exterior al segmento y cercano a su punto medio; llamarlo C.



Con centro en C, trazar la circunferencia de radio $\overline{CA}$ que intersecta al segmento en los puntos A y D.

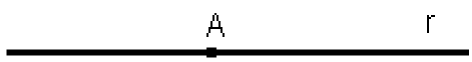


Trazar la recta que pasa por los puntos C y D, y que intersecta a la circunferencia en los puntos D y E.

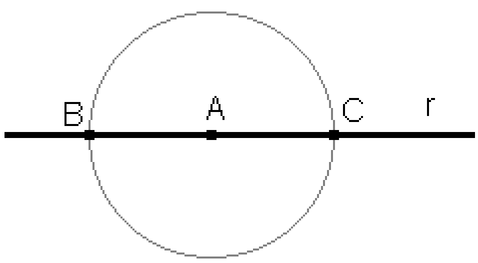


Con origen en A, trazar la semirrecta que contiene al punto E; queda determinado el ángulo recto entre el segmento $\overline{AB}$ y la semirrecta con origen en A.

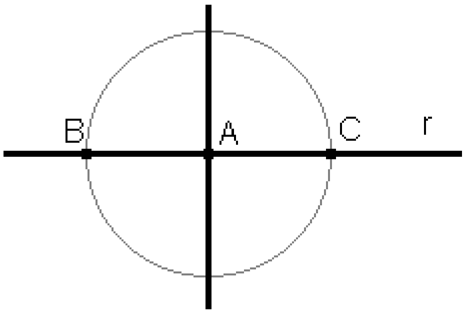
4- RECTA PERPENDICULAR POR UN PUNTO INTERIOR.



Partiendo de la recta ***r*** y de un punto **A** perteneciente a ella.

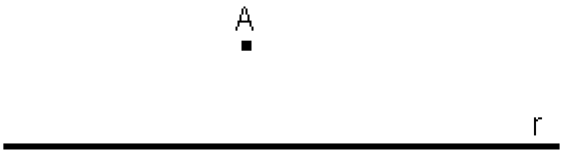


Con centro en A, trazar una circunferencia que intersecte a la recta en dos puntos; llamarlos B y C.

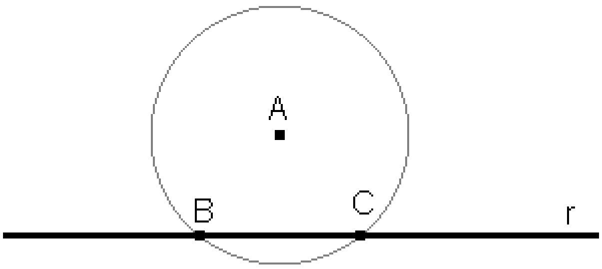


Trazar la mediatriz del segmento $\overline{BC}$ (Pág., XXXVI); queda determinada la recta perpendicular a $\boldsymbol{r}$ por el punto A.

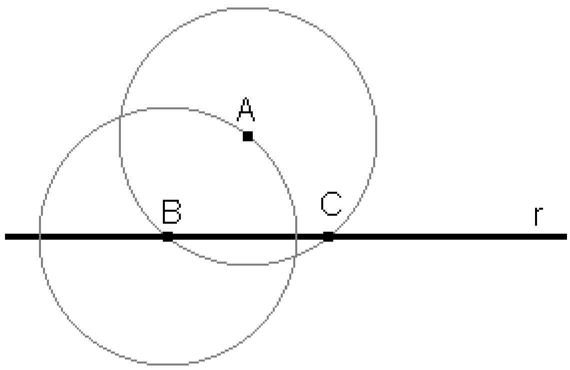
5- RECTA PERPENDICULAR POR UN PUNTO EXTERNO.



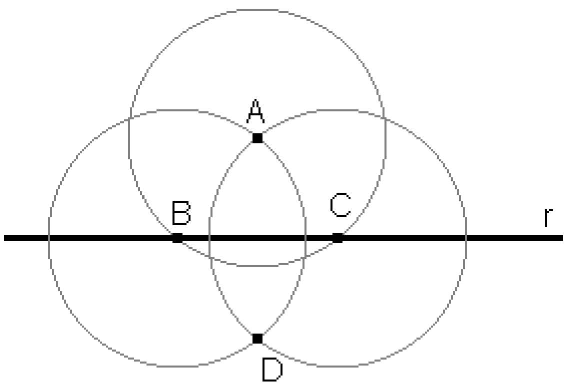
Partiendo de la recta $\boldsymbol{r}$ y de un punto A exterior a ella.



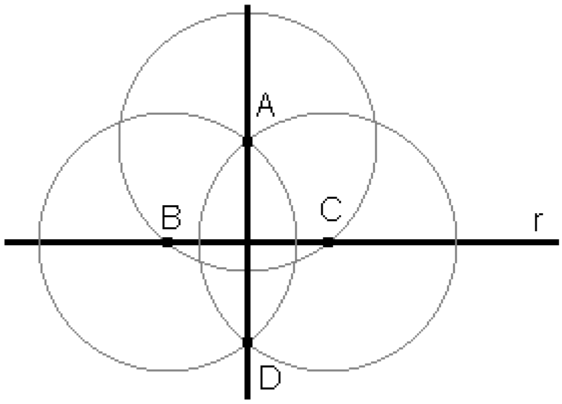
Con centro en A, trazar una circunferencia que intersecte a la recta $\boldsymbol{r}$ en dos puntos; llamarlos B y C.



Con centro en B, trazar una circunferencia de radio $\overline{BA}$.



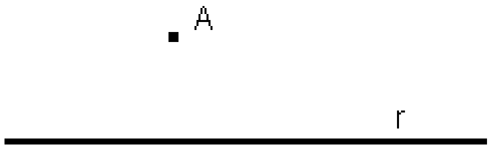
Con centro en C, trazar una circunferencia de radio $\overline{CA}$ ($\overline{CA} = \overline{BA}$) que intersecte a la circunferencia con centro en B en los puntos A y D.



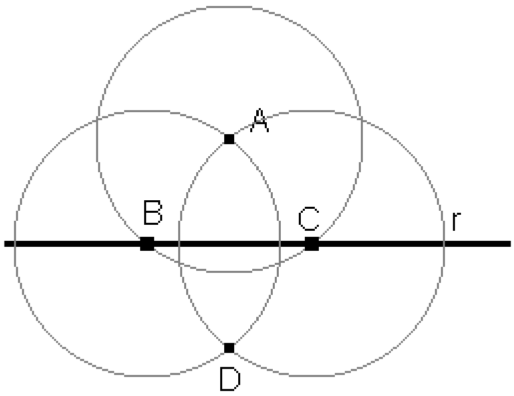
Trazar la recta que pasa por los puntos A y D; queda determinada la recta perpendicular a ***r*** por el punto A.

6- RECTA PARALELA.

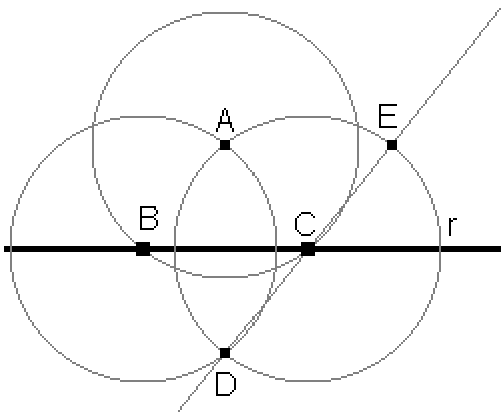
(construcción propuesta por Nahuel Ayala)



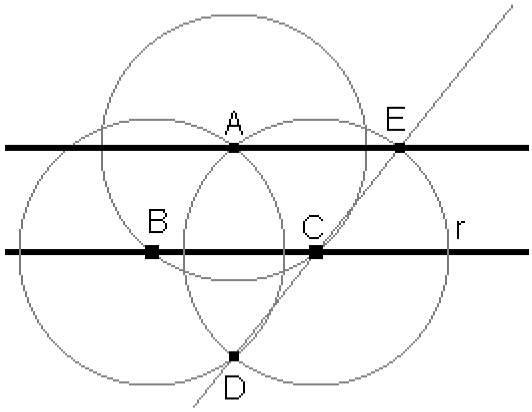
Partiendo de la recta ***r*** y de un punto A exterior a ella.



Repetir los pasos para trazar la recta perpendicular a ***r*** que pasa por A (no olvidar colocar el mismo nombre a los puntos).



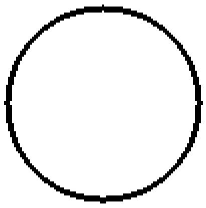
Trazar la recta que pasa por los puntos C y D, y que intersecta a la circunferencia con centro en A en el punto E.



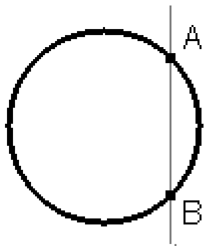
Trazar la recta que pasa por los puntos A y E, queda determinada la recta paralela a ***r*** por el punto A.

7- CENTRO DE UNA CIRCUNFERENCIA.

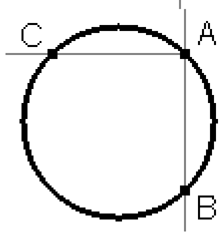
(construcción propuesta por Nahuel Ayala)



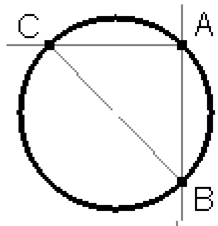
Partiendo de una circunferencia.



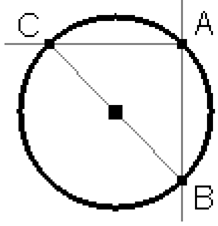
Trazar una recta secante a la circunferencia que la intersecte en los puntos A y B.



Con origen en A, trazar una semirrecta perpendicular a la recta anterior que intersecte a la circunferencia en un punto C.



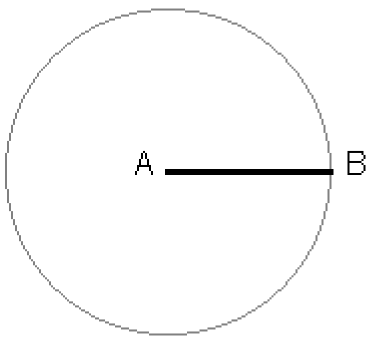
Trazar el segmento $\overline{BC}$.



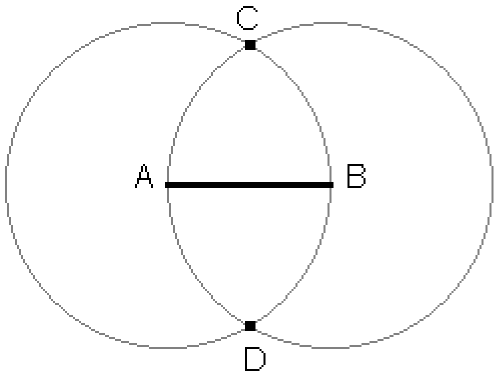
Marcar el punto medio del segmento $\overline{BC}$ (pág. XXXVI); queda determinado el centro de la circunferencia.

8- TRIÁNGULO EQUILÁTERO CONOCIENDO UN LADO.

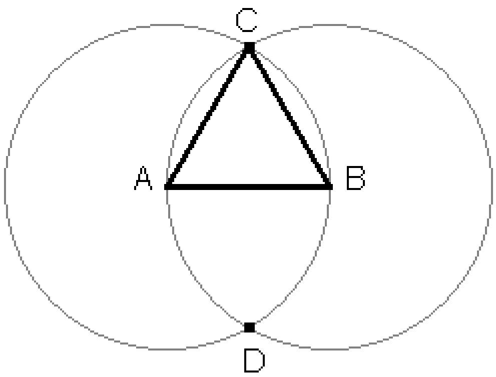
Partiendo del segmento $\overline{AB}$.



Con centro en A, trazar una circunferencia de radio $\overline{AB}$.



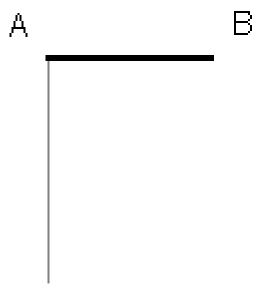
Con centro en B, trazar una circunferencia de radio $\overline{BA}$ ($\overline{BA} = \overline{AB}$) que intersecte a la circunferencia anterior en los puntos C y D.



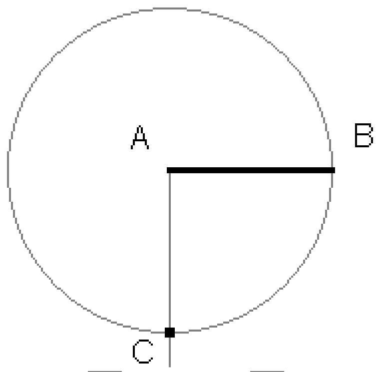
Trazar los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$; queda determinado el triángulo ABC. Si se trazan los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$, y se borra el segmento $\overline{AB}$, se obtiene el rombo ABCD.

9- CUADRADO CONOCIENDO UN LADO.

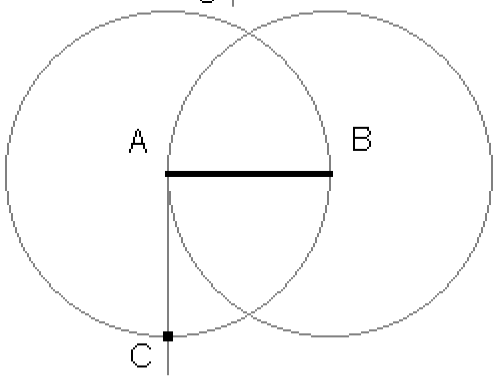
Partiendo del segmento $\overline{AB}$.



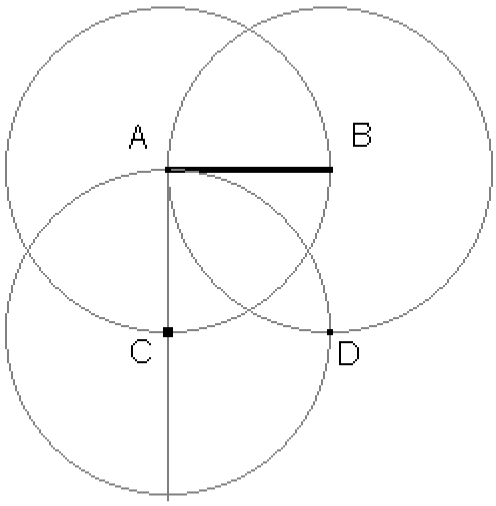
Con origen en A, trazar una semirrecta perpendicular a $\overline{AB}$ (utilizar la construcción del ángulo recto de la pág. XXXVIII).



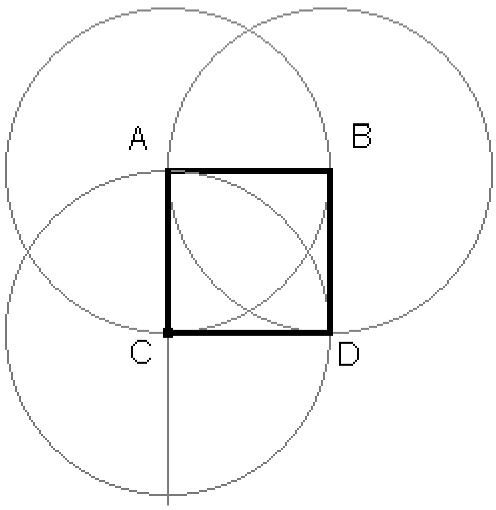
Con centro en A, trazar una circunferencia de radio $\overline{AB}$ que intersecte a la semirrecta en el punto C.



Con centro en B, trazar una circunferencia de radio $\overline{BA}$.

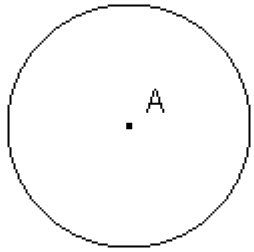


Con centro en C, trazar una circunferencia de radio $\overline{CA}$ que intersecte a la circunferencia con centro en B en el punto D.

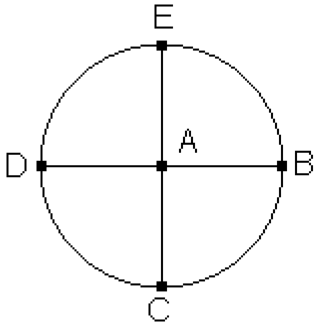


Trazar los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$; queda determinado el cuadrado ABCD.

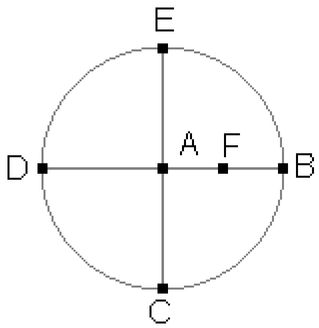
10- PENTÁGONO REGULAR.



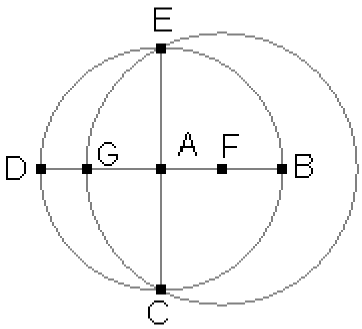
Partiendo de una circunferencia de centro en el punto A.



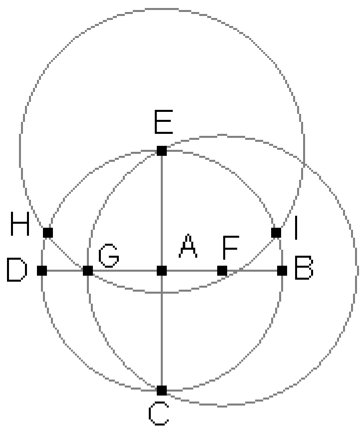
Trazar dos diámetros perpendiculares (utilizar la construcción de la recta perpendicular por un punto interno de la pág. XXXVIII) que intersecten a la circunferencia en los puntos B, C, D y E (respetar el orden).



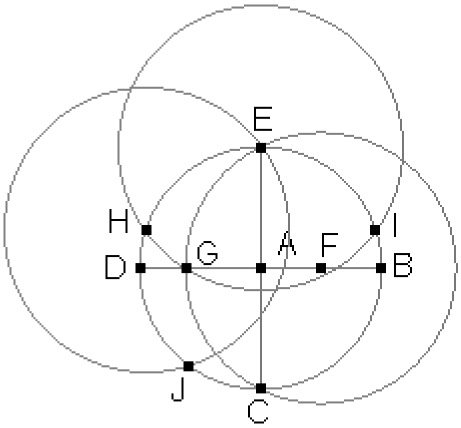
Marcar el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (pág. XXXVI) y llamarlo F.



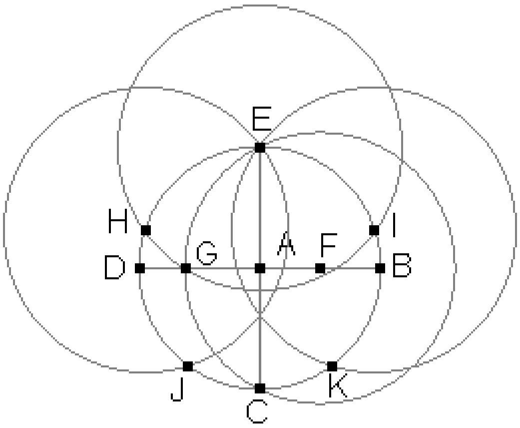
Con centro en F, trazar una circunferencia de radio $\overline{FE}$ que intersecte al segmento $\overline{AD}$ en el punto G.



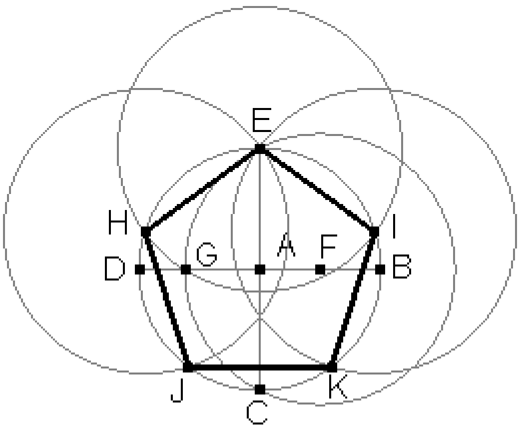
Con centro en E, trazar una circunferencia de radio $\overline{EG}$ que intersecte a la circunferencia original en los puntos H e I.



Con centro en H, trazar una circunferencia de radio $\overline{HE}$ que intersecte a la circunferencia original en los puntos E y J.

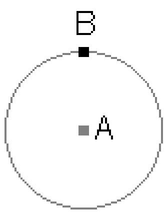


Con centro en I, trazar una circunferencia de radio $\overline{IE}$ que intersecte a la circunferencia original en los puntos E y K.

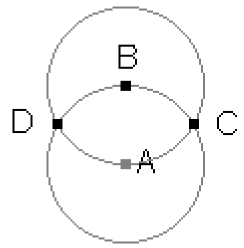


Trazar los segmentos $\overline{EI}$, $\overline{IK}$, $\overline{KJ}$, $\overline{JH}$ y $\overline{HE}$; queda determinado el pentágono EIKJH.

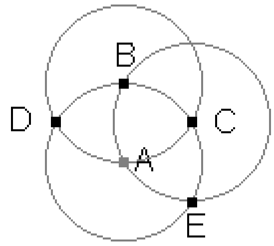
11- HEXÁGONO REGULAR.



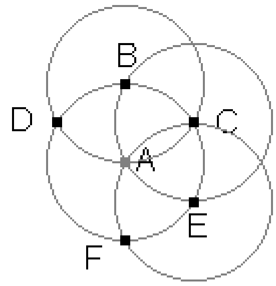
Partiendo de una circunferencia con centro en el punto A, y de un punto B perteneciente a ella.



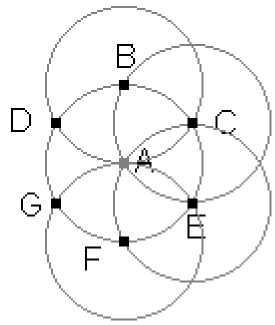
Con centro en B, trazar una circunferencia de radio $\overline{BA}$ que intersecte a la circunferencia original en los puntos C y D.



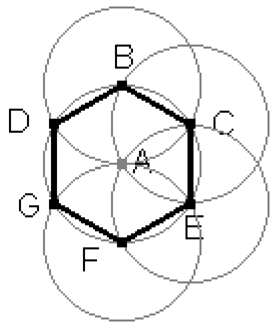
Con centro en C, trazar una circunferencia de radio $\overline{CB}$ que intersecte a la circunferencia original en los puntos B y E.



Con centro en E, trazar una circunferencia de radio $\overline{EC}$ que intersecte a la circunferencia original en los puntos C y F.

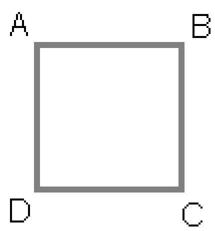


Con centro en F, trazar una circunferencia de radio $\overline{FE}$ que intersecte a la circunferencia original en los puntos E y G.

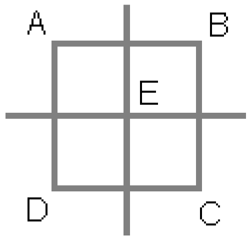


Trazar los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GD}$ Y $\overline{DB}$; queda determinado el hexágono BCEFGD.

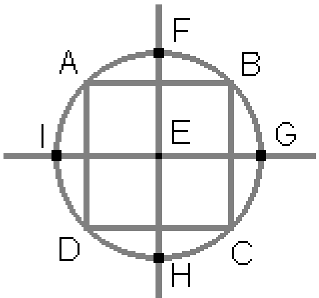
12- OCTÁGONO.



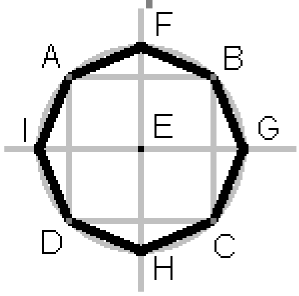
Partiendo de un cuadrado ABCD.



Trazar las mediatrices de sus lados (las mediatrices de los lados opuestos son coincidentes). Llamar E al punto de intersección de las mediatrices.

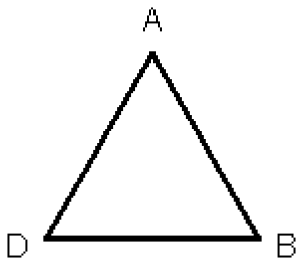


Con centro en E, trazar una circunferencia de radio $\overline{EA}$ que intersecte a las mediatrices en los puntos F, G, H e I respectivamente.

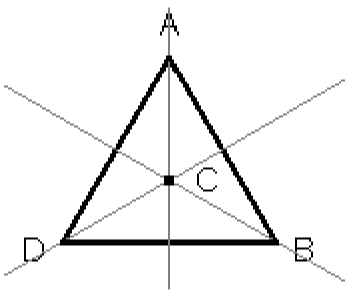


Trazar los segmentos $\overline{AF}$, $\overline{FB}$, $\overline{BG}$, $\overline{GC}$, $\overline{CH}$, $\overline{HD}$, $\overline{DI}$ e $\overline{IA}$; queda determinado el octógono AFBGCHDI.

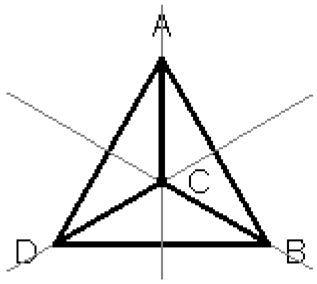
<u>13- TETRAEDRO.</u>



Partiendo de un triángulo equilátero ABD.

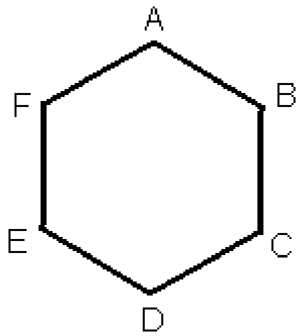


Trazamos las mediatrices (pág. XXXVI) de sus lados; la intersección de las mediatrices determina el circuncentro C y es aplicable a cualquier tipo de triángulo.

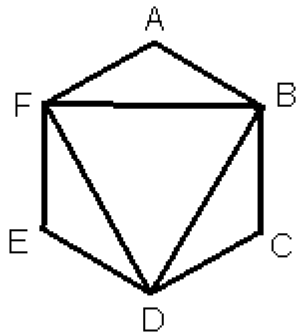


El tetraedro queda determinado por el triángulo ABD y los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ Y $\overline{DC}$.

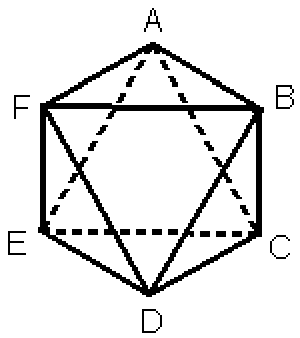
14- OCTAEDRO.



Partiendo de un hexágono regular con vértices A, B, C, D, E y F (respetar el orden).

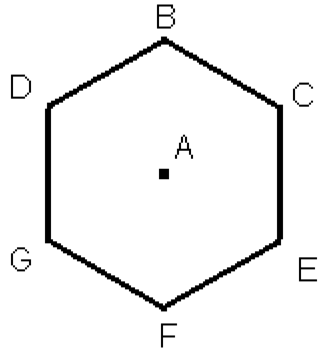


Trazar los segmentos $\overline{FB}$, $\overline{BD}$ y $\overline{DF}$; quedan determinadas las caras visibles del octaedro.

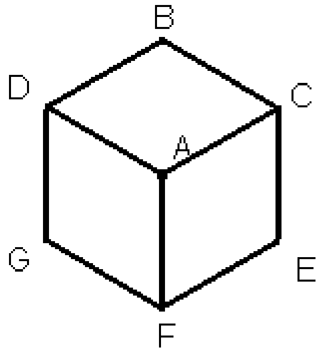


Con línea punteada, trazar los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$; queda determinado el octaedro.

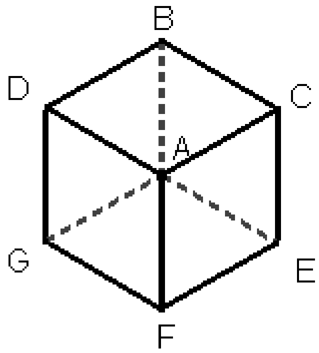
15- CUBO.



Partiendo de la construcción el hexágono regular con vértices B, C, E, F, G y D, y el punto central A (pág. LXVI; el hexágono forma parte de la construcción final).

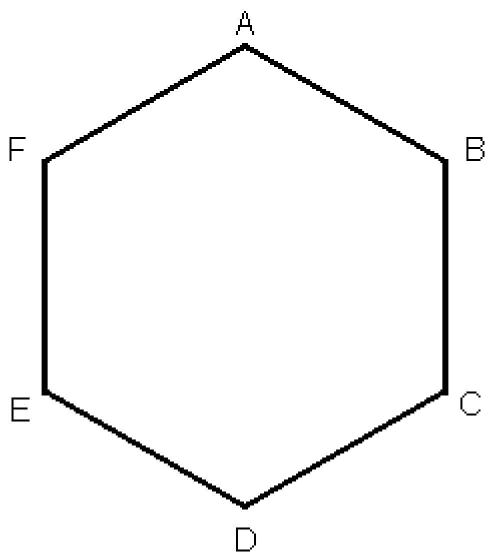


Trazar los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$; quedan determinadas las caras visibles del cubo.

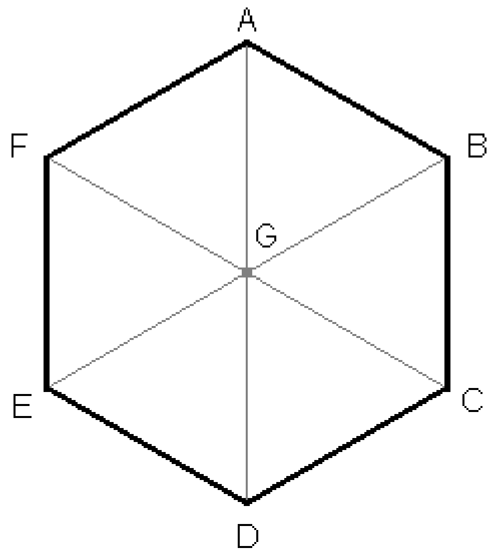


Con líneas punteada, trazar los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ y $\overline{AG}$; queda determinado el cubo.

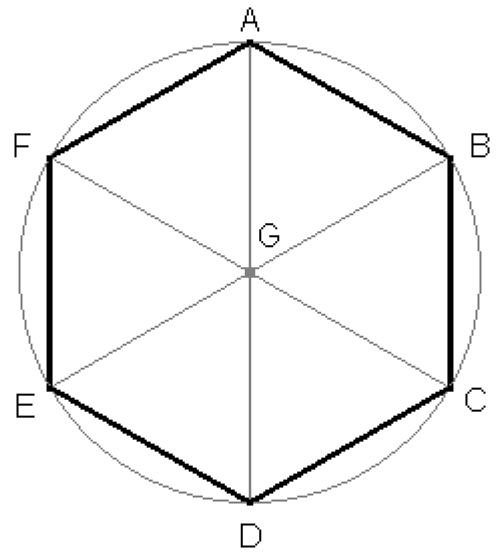
16- ICOSAEDRO.



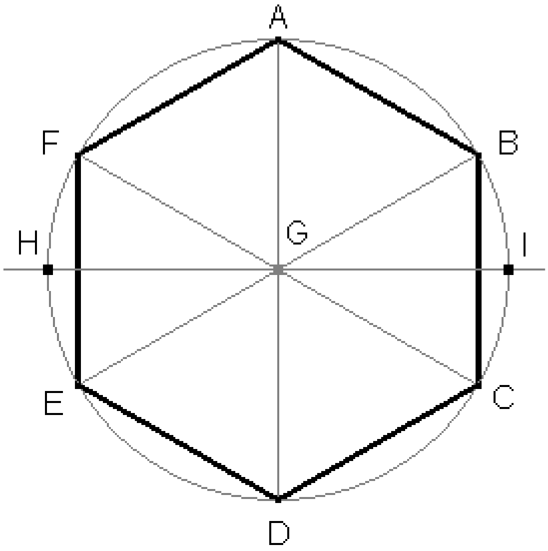
Partiendo de un hexágono regular con vértices A, B, C, D, E y F.



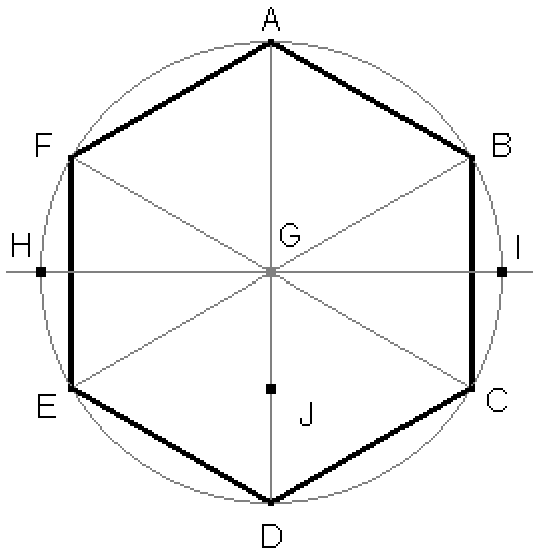
Trazamos las diagonales del hexágono; la intersección de las diagonales determina un punto G



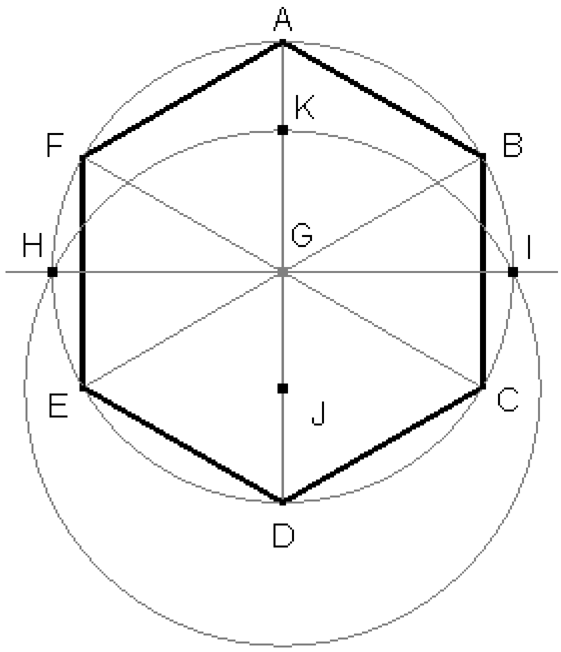
Con centro en G, trazar una circunferencia de radio $\overline{GA}$.



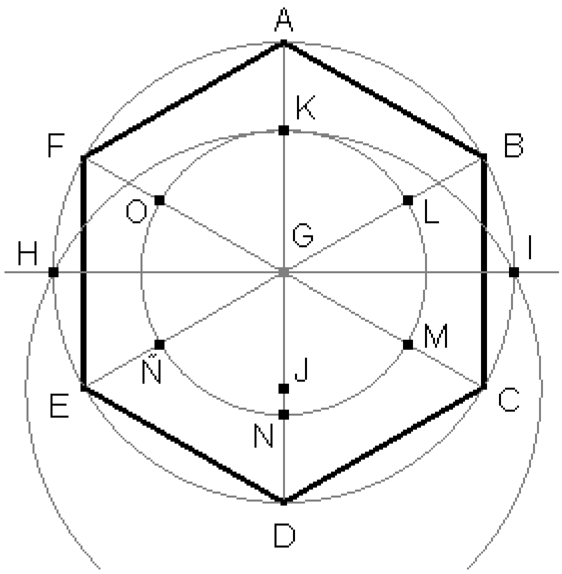
Trazamos la mediatriz del lado $\overline{BC}$ que intersecta a la circunferencia original en los puntos H e I (pág. XXXVI).



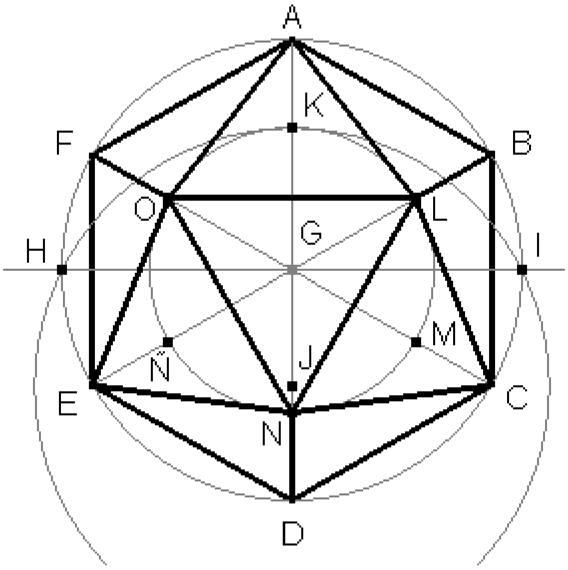
Marcar el punto medio del segmento $\overline{DG}$ y lo llamamos J (pág. XXXVI).



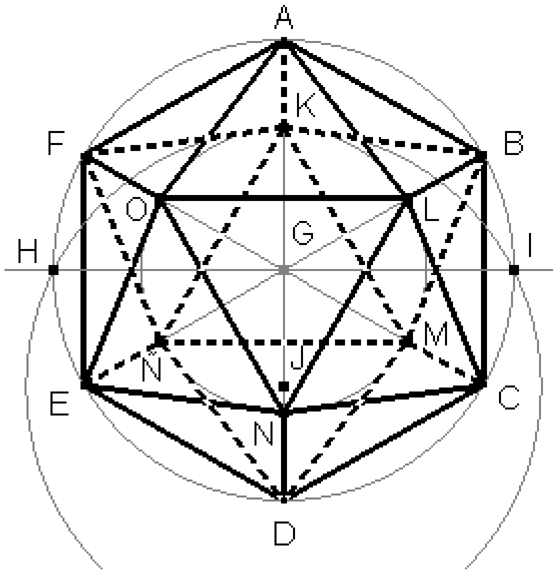
Con centro en J, trazar una circunferencia de radio $\overline{JH}$ que intersecte al segmento $\overline{AG}$ en un punto K.



Con centro en G, trazar una circunferencia de radio $\overline{GK}$ que intersecte a las diagonales del hexágono en los puntos K, L, M, N, Ñ y O.



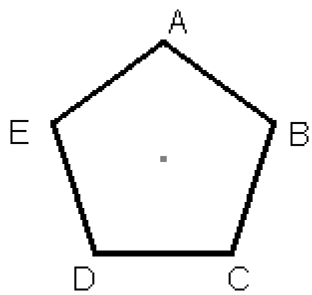
Trazar los segmentos $\overline{AL}$, $\overline{AO}$, $\overline{BL}$, $\overline{CL}$, $\overline{CN}$, $\overline{DN}$, $\overline{EN}$, $\overline{EO}$, $\overline{FO}$, $\overline{LN}$, $\overline{NO}$ y $\overline{OL}$; quedan determinadas las caras visibles del icosaedro.



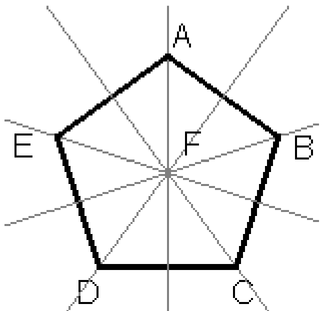
Con línea punteada, trazar los segmentos $\overline{AK}$, $\overline{BK}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{DM}$, $\overline{DÑ}$, $\overline{EÑ}$, $\overline{FÑ}$, $\overline{FK}$, $\overline{KM}$, $\overline{MÑ}$ y $\overline{KÑ}$; queda determinado el icosaedro.

17- DODECAEDRO.

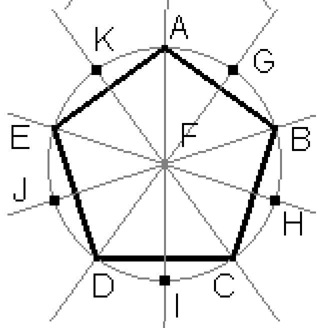
(construcción propuesta por Nahuel Ayala)



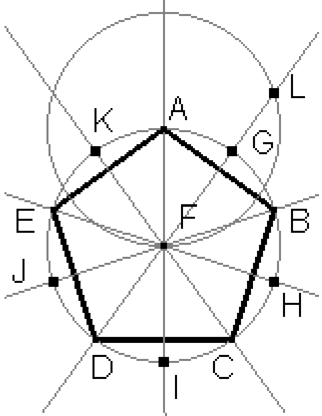
Partiendo de un pentágono regular ABCDE.



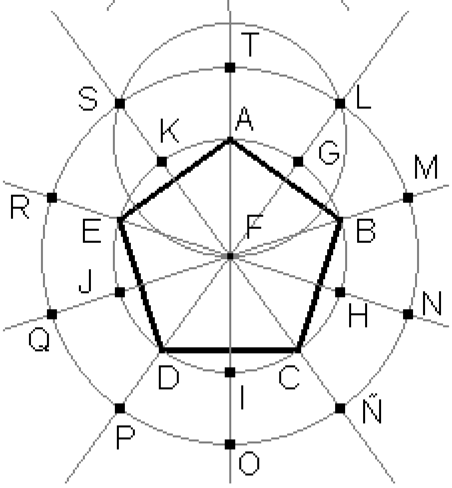
Trazar las mediatrices de los cinco lados; la intersección de las mediatrices determina el punto F.



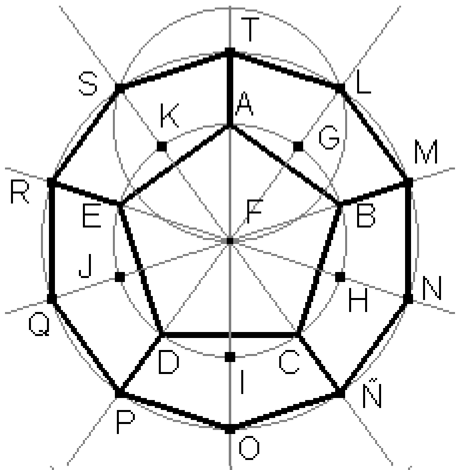
Con centro en F, trazar la circunferencia de radio $\overline{FA}$ que intersecta a las mediatrices en los puntos A, G, B, H, C, I, D, J, E y K (respetar el orden).



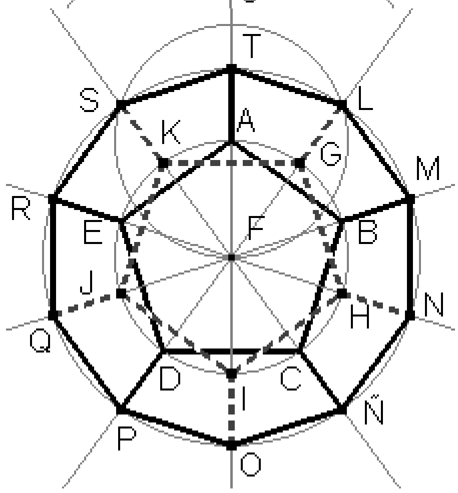
Con centro en A, trazar la circunferencia de radio $\overline{AB}$ que intersecta a la mediatriz del lado $\overline{AB}$ en un punto L.



Con centro en F, trazar la circunferencia de radio $\overline{FL}$ que intersecta a las mediatrices en los puntos L, M, N, Ñ, O, P, Q, R, S y T (respetar el orden).

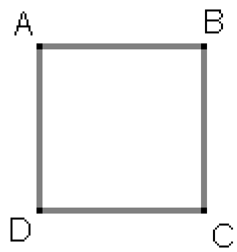


Trazar los segmentos $\overline{TL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NÑ}$, $\overline{ÑO}$, $\overline{OP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$ (queda determinado un decágono), $\overline{AT}$, $\overline{BM}$, $\overline{CÑ}$, $\overline{DP}$ y $\overline{ER}$; quedan determinadas las caras visibles del dodecágono.

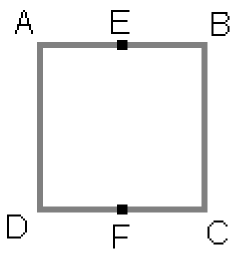


Con línea punteada, trazar los segmentos $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{KG}$, $\overline{GL}$, $\overline{HN}$, $\overline{IO}$, $\overline{JQ}$ y $\overline{KS}$; queda determinado el dodecágono.

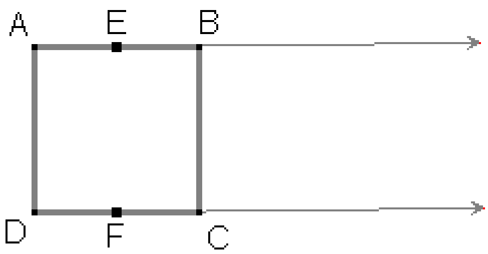
18- RECTÁNGULO ÁUREO.



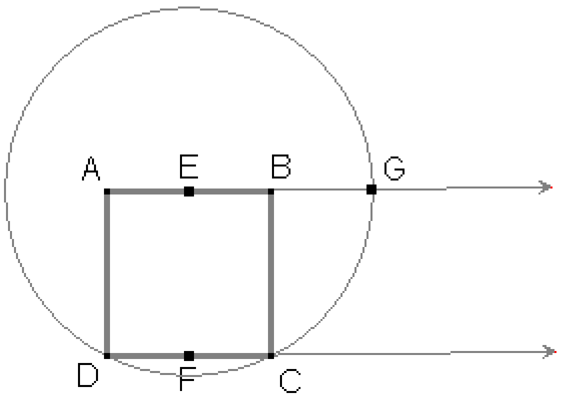
Partiendo de un cuadrado unitario ABCD (sus lados miden una unidad de longitud).



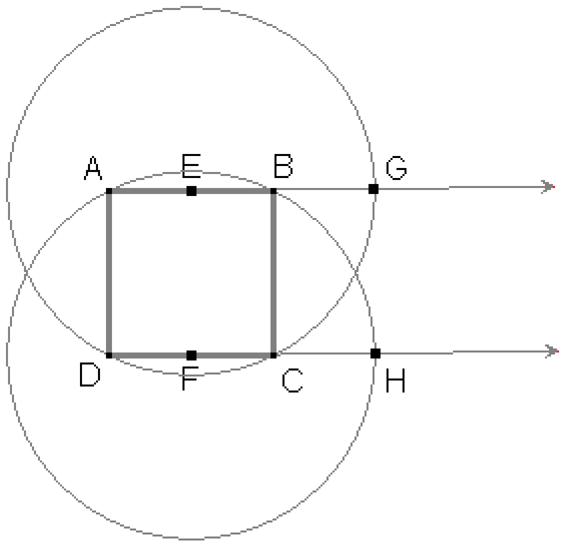
Marcar el punto medio de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, y llamarlos E y F respectivamente (pág. XXXVI).



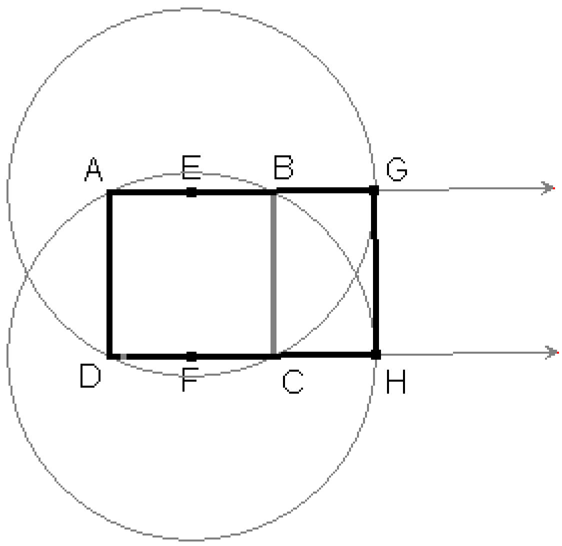
Con origen en A, trazar la semirrecta que contiene a B; y con origen en D, trazar la semirrecta que contiene a C.



Con centro en E, trazar la circunferencia de radio $\overline{EC}$ y que intersecta a la semirrecta con origen en A en un punto G.

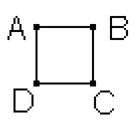


Con centro en F, trazar la circunferencia de radio $\overline{FB}$ y que intersecta a la semirrecta con origen en D en un punto H.

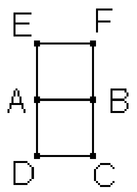


Trazar los segmentos $\overline{AG}$, $\overline{GH}$ y $\overline{HD}$ (se utiliza el lado $\overline{AD}$); queda determinado el rectángulo áureo AGHD.

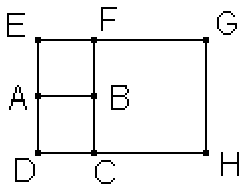
19- ESPIRAL DE DURERO.



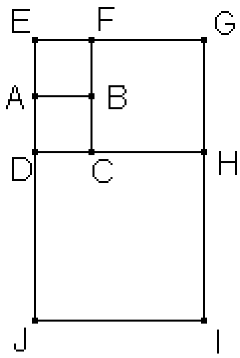
Partiendo del cuadrado unitario ABCD (sus lados miden una unidad de longitud).



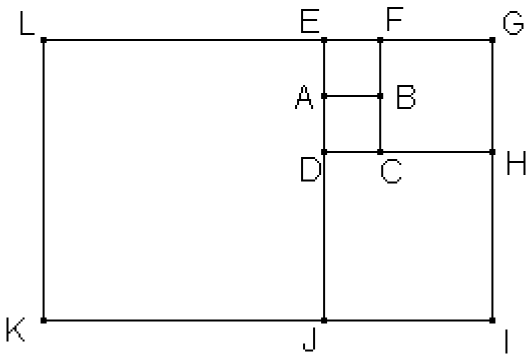
Utilizar el lado $\overline{AB}$ como base y construir el cuadrado unitario EFBA (ver la construcción en la página XLII).



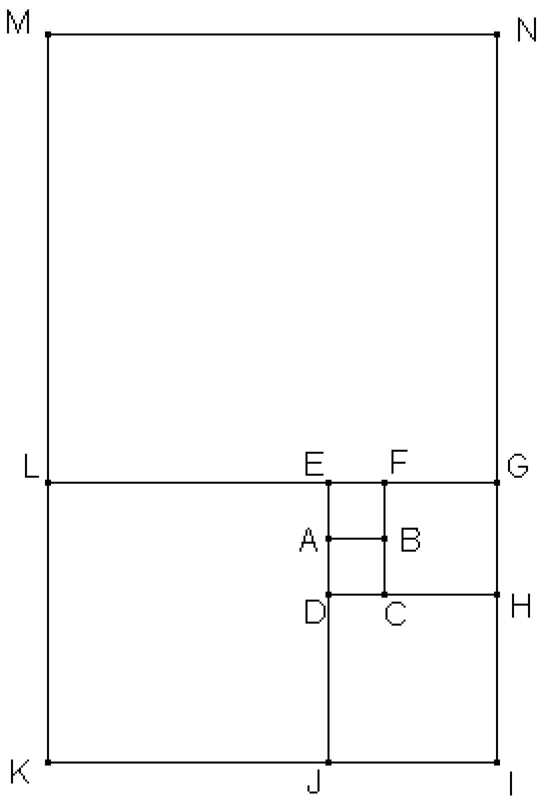
Utilizar el segmento $\overline{FC}$ como lado y construir el cuadrado FGHC (sus lados miden dos unidades).



Utilizar el segmento $\overline{DH}$ como base superior y construir el cuadrado DHIJ (sus lados miden tres unidades).

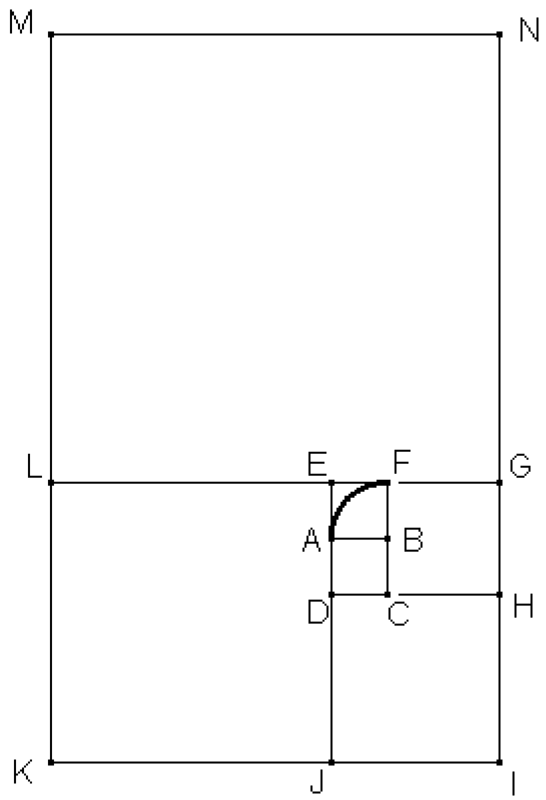


Utilizar el segmento $\overline{EJ}$ como lado y construir el cuadrado LEJK (sus lados miden cinco unidades).

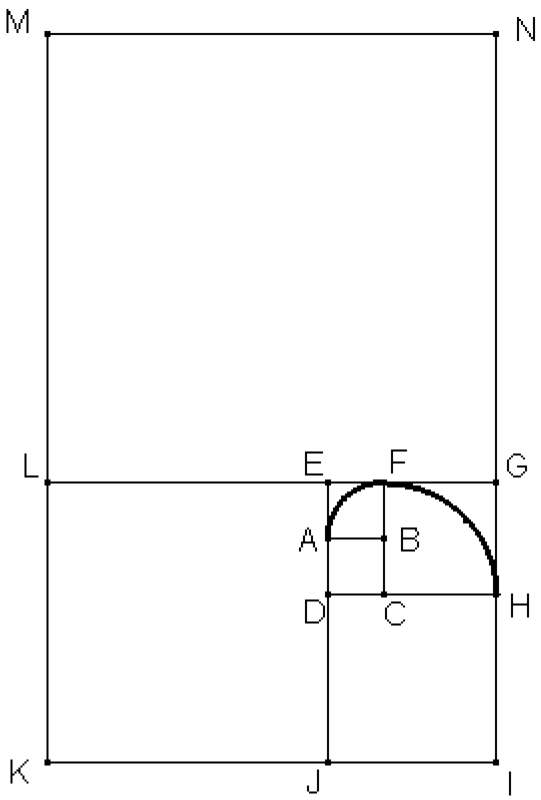


Utilizar el segmento $\overline{LG}$ como base y construir el cuadrado MNGL (sus lados miden ocho unidades).

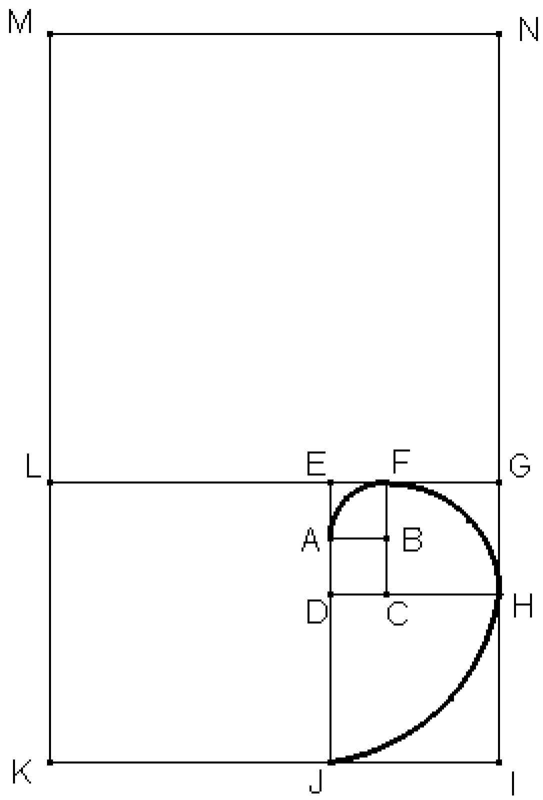
Continuar de este modo hasta alcanzar el tamaño deseado para la espiral.



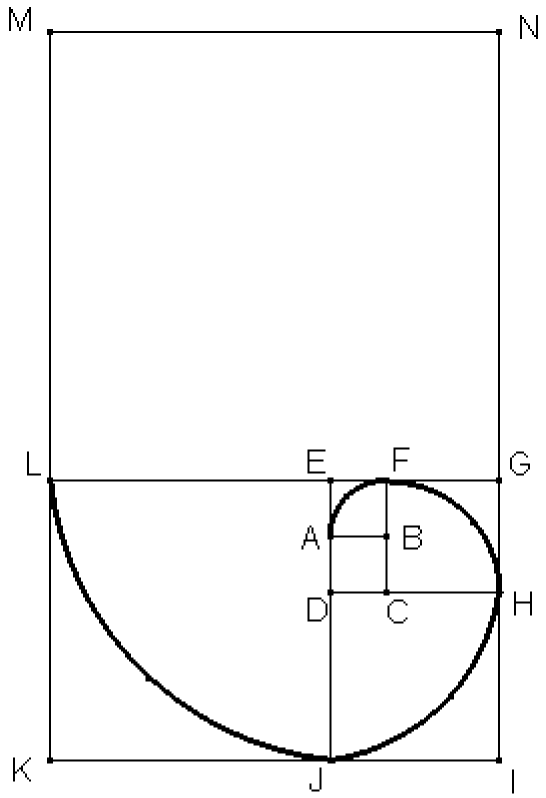
Con centro en B, trazar el arco de circunferencia de radio $\overline{BA}$ entre los puntos A y F.



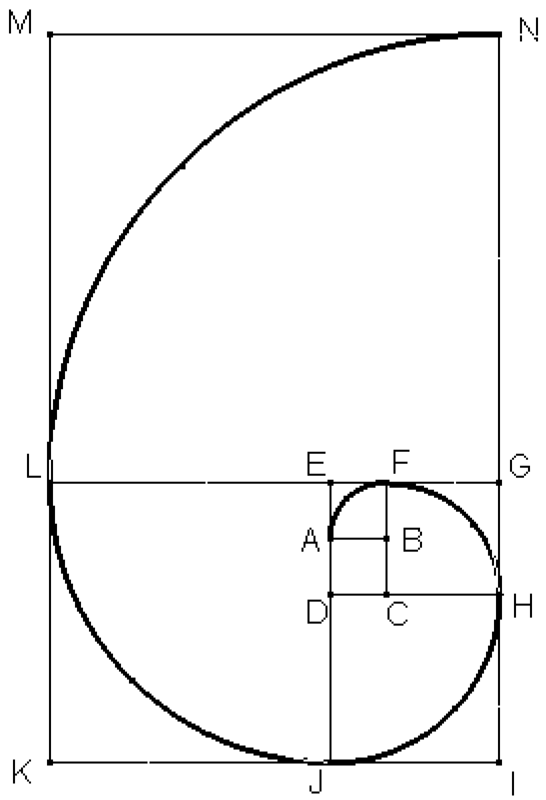
Con centro en C, trazar el arco de circunferencia de radio $\overline{CH}$ entre los puntos F y H.



Con centro en D, trazar el arco de circunferencia de radio $\overline{DH}$ entre los puntos H y J.



Con centro en E, trazar el arco de circunferencia de radio $\overline{EL}$ entre los puntos J y L.



Con centro en G, trazar el arco de circunferencia de radio $\overline{GL}$ entre los puntos L y N; queda determinado el comienzo de la espiral de Durero.

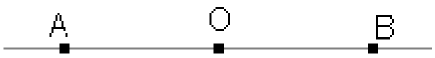
APLICACIONES DIDÁCTICAS SUGERIDAS PARA LAS CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

SIMETRÍA.

La simetría es una propiedad que tienen algunas figuras, que se reconoce por lo general a simple vista y que las hace lucir equilibradas y armoniosas, pues los puntos de la figura se aparecen distribuidos con respecto a un punto o a una recta, de modo que se equilibran los unos con los otros.

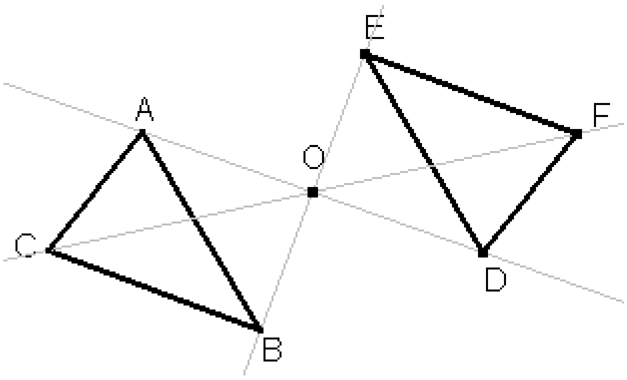
SIMETRÍA CENTRAL.

- Dos puntos son simétricos con respecto a otro llamado centro cuando estando los tres alineados equidistan de él.



A y **B** son simétricos con respecto a **O**, pues **A**, **O** y **B** están alineados y $\overline{AO} = \overline{OB}$.

- Dos figuras son simétricas con respecto a un punto llamado centro cuando todo punto de cada una de ellas tiene su simétrico respecto de ese centro en la otra figura.



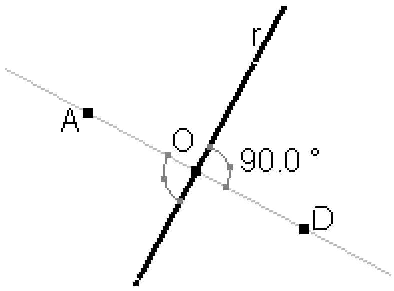
D es simétrico de **A** con respecto a **O**.

E es simétrico de **B** con respecto a **O**.

F es simétrico de **C** con respecto a **O**.

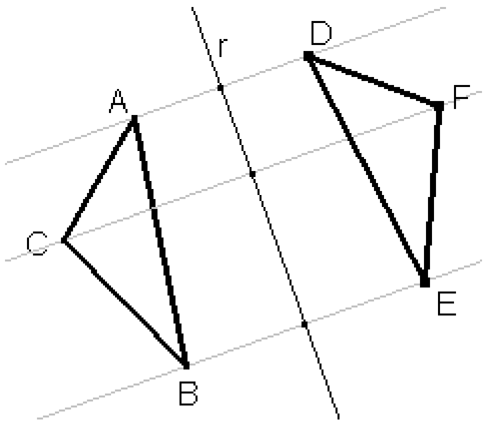
SIMETRÍA AXIAL.

- Dos puntos son simétricos con respecto a una recta llamada eje cuando se encuentran sobre la misma perpendicular a dicha recta y equidistan de ella.



A y **B** son simétricos con respecto a $\boldsymbol{r}$**,** pues $\overline{AB}$ es perpendicular a $\boldsymbol{r}$ y $\overline{AO} = \overline{OB}$ (O es el punto de intersección del segmento $\overline{AB}$ y la recta $\boldsymbol{r}$).

- Dos figuras son simétricas respecto de una recta llamada eje cuando todo punto de cada una de ellas tiene su simétrico respecto de esa recta en la otra figura.



D es simétrico de **A** con respecto a $\boldsymbol{r}$**.**

E es simétrico de **B** con respecto a $\boldsymbol{r}$**.**

F es simétrico de **C** con respecto a $\boldsymbol{r}$**.**

DOCUMENTO DE TRABAJO Nº

ALUMNO:

FECHA:

VECTORES: MOVIMIENTOS EN EL PLANO.

SIMETRÍA.

Definición: es la armonía de posición entre las partes o puntos similares respecto unos de otros, y con referencia a un punto o línea determinada.

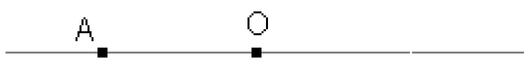
SIMETRÍA CENTRAL.

Definición: es la simetría respecto de un punto al que se denomina "centro" de la simetría.

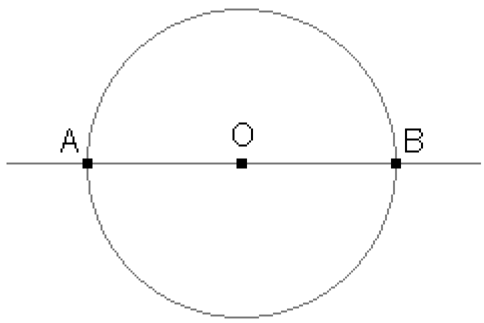
CONSTRUCCIÓN
DEL SIMÉTRICO DE UN PUNTO CON RESPECTO A UN CENTRO UTILIZANDO LA REGLA Y EL COMPÁS:

I- partimos de un punto A y un centro de simetría O.

II- trazamos la recta que pasa por los puntos A y O.

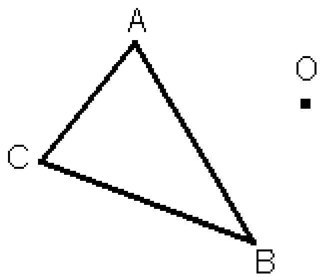


III- con centro en O, trazamos la circunferencia de radio $\overline{OA}$ que intersecta a la recta en un punto B el cual es simétrico de A respecto del punto O.

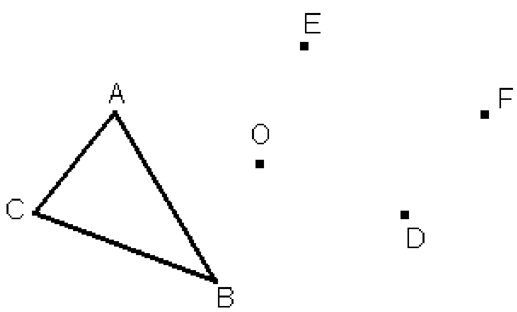


CONSTRUCCIÓN DEL SIMÉTRICO DE UNA FIGURA CON RESPECTO A UN CENTRO UTILIZANDO LA REGLA Y EL COMPÁS:

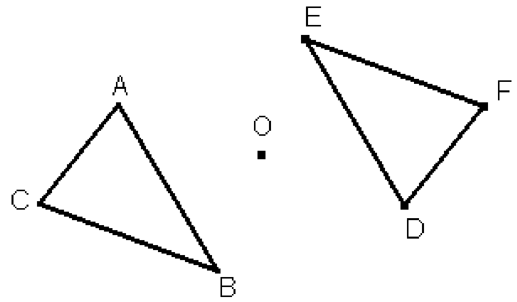
I- partimos de un triángulo ABC y un centro de simetría O.



II- trazamos los puntos simétricos de A, B y C respecto del centro O y los llamamos D, E y F respectivamente.



III- trazamos los segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$; queda determinado el triángulo DEF simétrico de ABC respecto del centro O.

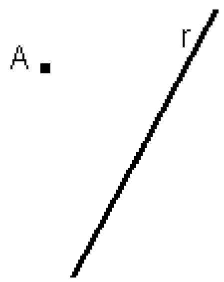


<u>SIMETRÍA AXIAL</u>

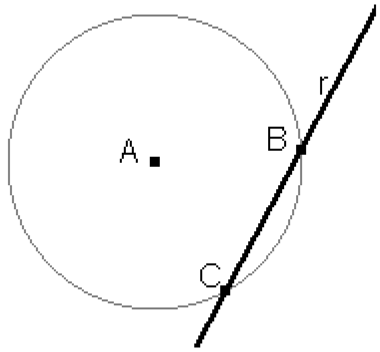
Definición: es la simetría respecto de una línea recta a la que se denomina "eje" de la simetría.

CONSTRUCCIÓN DEL SIMÉTRICO DE UN PUNTO CON RESPECTO A UN EJE UTILIZANDO LA REGLA Y EL COMPÁS.

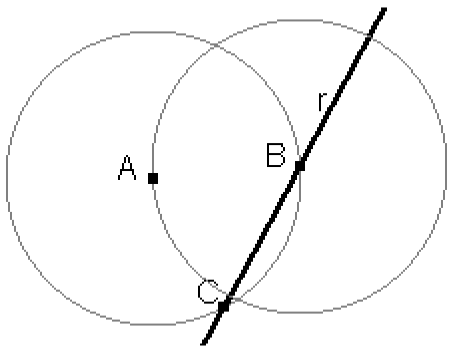
I- partimos de un punto A y un eje de simetría ***r.***



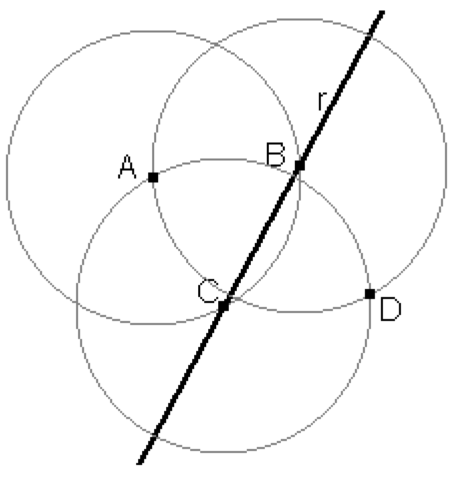
II- con centro en A, trazamos una circunferencia que intersecte al eje $\boldsymbol{r}$ en dos puntos y los llamamos B y C.



III- con centro en B, trazamos la circunferencia de radio $\overline{BA}$.

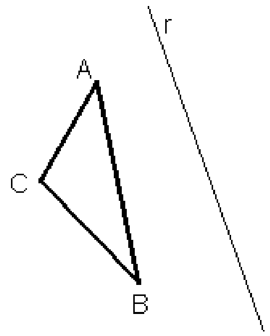


IV- con centro en C, trazamos la circunferencia de radio $\overline{CA}$ que intersecta a la circunferencia de centro B en los puntos A y D; queda determinado el punto D simétrico de A respecto del eje $\boldsymbol{r}$.

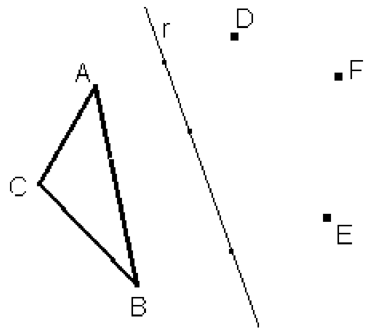


CONSTRUCCIÓN DEL SIMÉTRICO DE UNA FIGURA CON RESPECTO A UN EJE UTILIZANDO LA REGLA Y EL COMPÁS:

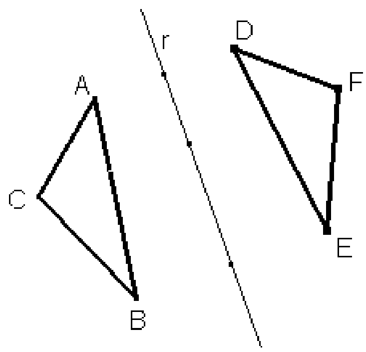
I- partimos de un triángulo ABC y un eje de simetría ***r***.



II- trazamos los puntos simétricos de A, B y C respecto del eje ***r*** y los llamamos D, E y F respectivamente.



III- trazamos los segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$; queda determinado el triángulo DEF simétrico de ABC respecto del eje ***r***



CONCLUSIONES DE LAS CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

A lo largo de este trabajo hemos tratado de exponer, de la forma más simple y clara posible, parte de lo que encierra y esconde para la mayoría de las personas, el mundo de las construcciones geométricas realizadas con regla y compás. Es verdad que nos centramos en algunos ejemplos puntuales y no en el tema en general, pero es que no creemos que sea posible abarcar todo de manera sintética. O al menos, no de forma adecuada y convincente, lo cual sería una falta de respeto hacia el tema y lo que representa.

Te todas formas, algo logramos:

Nos dimos cuenta de lo valiosas que son para el crecimiento de los jóvenes. De cómo unos simples instrumentos ponen tanto en juego. Dimos un vistazo a la evolución e influencia del tema a lo largo da más de 2000 años de historia. Comprendimos que todos pueden disfrutar de ellas, que no esta limitadas a unos pocos privilegiados. Realizamos veinte tres creaciones únicamente con líneas. Y nos preguntamos por su utilidad en la enseñanza secundaria.

En resumen, podemos afirmar que:

- Las construcciones con regla y compás favorecen al desarrollo de las capacidades cognitiva, práctica y estética.
- La regla y el compás son fáciles de sustituir por otros instrumentos, lo cual permite que estén al alcance de todos.
- Las construcciones resultan muy útiles para enseñar simetrías en el último año de la educación secundaria.
- El tema crea un vínculo entre la matemática y el arte.
- A la hora de enseñar el tema, es indispensable indicar y de ser posible demostrar que no todo se puede lograr con regla y compás, que el tema tiene limitaciones insalvables y rigurosamente analizadas.

Es así que hemos dado nuestros los primeros pasos del largo camino que representan las construcciones con regla y compás. Como habrán visto también, aun queda mucho por aprender del tema, mucho por recorrer por delante. Pero eso ahora depende de ustedes.

BIBLIOGRAFÍA SOBRE CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

CITADA:

- Bach, Richard; Juan Salvador Gaviota; Ediciones B Argentina S.A.; Argentina, 1999
- Diccionario enciclopédico Neofons; Sopena; España, 1990.
- Ministerio de Cultura y Educación de la Nación; Zona Educativa. En el aula 10: el espacio en la escuela; noviembre de 1998. Pág.2, Crespo Crespo, Cecilia; Acerca de la enseñanza de la Geometría, hoy. Pág. 10, Spravskin, Mariana; La forma y el espacio, cuestiones de la representación plástica.

DE CONSULTA:

- Adler, Irving; Matemática: la historia de los números, de los símbolos y del espacio, Organización editorial Novaro; México, 1979.
- Boyer, Carl; Historia de la matemática; Alianza editorial textos; España, 1996.
- Clemens, S.; O Dafeer, P; Conney, T.; Geometría con aplicaciones y solución de problemas; Addison Wesley Iberoamericana; México, 1998.
- Diccionario enciclopédico Océano uno; Editorial Océano; España, 1995.
- García Padillo, Julio; Geometría y su metodología y trigonometría; Gráficas Romero; España, 1963.
- Gran enciclopedia universal Espasa Calpe; Grupo Editorial Planeta; Argentina, 2005.
- Kline, Morris; El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días 1; Alianza editorial; España, 1999.
- Lawlor, Robert; Geometría sagrada; Editorial Debate; España, 1993.
- Mentor: enciclopedia temática estudiantil; Editorial Océano; España, 1997.
- Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, Secretaría de Programación y Evaluación Educativa; La transformación del sistema educativo: los contenidos de la educación; 1996.
- Pisano, Juan Pablo; Libros de matemática a medida; ediciones Lógikamente; Argentina, 2006.
- Repetto, Celina; Geometría para segundo año del ciclo básico y escuelas de comercio; Editorial Kapelusz; Argentina, 1960.

PÁGINAS DE INTERNET CONSULTADAS:

- http://www.hyparion.com/web/diccionari/dics/cartografia/compas.htm
- http://www.emblematica.com/blog/studiolum.html
- http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/No%20euclidianas/Capitulo_07/Cap_07_03.htm
- http://www.arrakis.es/~sysifus/escher.html
- http://www.upaya.es/?p=14
- http://personales.jet.es/acat/ryc.htm
- http://wims.unice.fr/wims/es_tool~geometry~rulecomp.es.html
- http://car-regla-y-compas.uptodown.com/
- http://valle.fciencias.unam.mx/~juan/reglaycompas/intrecom.html
- http://www2.uca.es/dept/matematicas/RDM/Volumen-2005-1/Regla_y_compas.pdf
- http://www.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/Triseccion/node4.html.
- http://aproaunabrujula.wordpress.com/2007/12/18/el-7-un-numero-primo/
- http://plataforma.cepmarbellacoin.org/moodle/file.php/71/programas/manual_regla_y_comp_s.pdf.
- http://www.iberocabri.org/C8_CarlosCardenas.pdf.
- http://nacho.myweb.io/espiral.htm
- http://boards5.melodysoft.com/app?ID=canalingenio&msg=267
- http://www.marcadeagua.net/instituto/IMG/pdf/refuerzo_trazados_geometricos.pdf.
- http://ast.wikipedia.org/wiki/Oct%C3%B3gonu
- http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/reglaycompas/node2.html
- http://www.arq.upv.es/wp-content/JuntaCentro/FICHAS-PROGRAMA%20MATEM%C3%81TICA%20APLICADA/fitxa-GRC.pdf
- http://www.keymath.com/documents/dg4/GP_Spanish/DG4GP_SPN_03.pdf
- http://isrb.em.mhlgt.com/spanish/pages/M5_GLO_P408.html
- http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/M&D_2007_2.pdf
- http://wims.unice.fr/wims/es_tool~geometry~rulecomp.es.html
- http://www.scribd.com/doc/2582541/Construcciones-geometricas
- http://www.ciencia.cl/CienciaAlDia/volumen2/numero1/preguntas/preguntas.html
- http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_y_comp%C3%A1s#cite_note-5
- http://matematicas.uis.edu.co/%7Emarsan/geometria/RyC/home.htm
- http://gaussianos.com/construcciones-con-regla-y-compas-i-introduccion-y-primeras-construcciones/
- http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/Triseccion/node1.html
- http://valle.fciencias.unam.mx/%7Ejuan/reglaycompas/intrecom.html
- http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/oinicio/cobasicas.htm

ÍNDICE

Ayala_nahuel@yahoo.com