Dirección General de Cultura Y Educación
de la provincia de Buenos Aires.
Instituto Superior "Fundación Suzuki"
San Miguel, Buenos Aires, Argentina.

MATEMÁTICA Y JUEGOS

¿Se puede aprender matemática jugando……..?

Tesina para optar al titulo de Profesor de Matemáticas

Andrea Lorena Ederle
San Miguel, Buenos Aires

Dedicatoria…….

A mi marido y mis hijas que me ayudaron y entendieron en estos cuatro años.

A mi madre que sin su ayuda no hubiera podido llegar hasta el final.

A mi hermana que me impulso a hacer esta carrera.

A toda mi familia por el aliento y apoyo que me dieron siempre.

A mi amiga Graciela por su ayuda y amistad en estos cuatro años.

A todos mis compañeros, que hicieron que estos cuatro años sean tan especiales e inolvidables.

A cada uno de mis docentes, que aportaron a mi formación con tanto esmero.

"La imaginación es más importante que el conocimiento,

porque el conocimiento es limitado,

mientras que la imaginación abarca el mundo entero".

Albert Einstein

Índice: Pág.

Aclaración del titulo:

Los juegos tienen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión, utilizarlos en la enseñanza de la matemática nos permite desarrollar en los alumnos las potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas de modo armonioso.

Y para ello nuestro instrumento principal debe consistir en el estímulo de su propia acción, colocándole en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las actitudes básicas más características que se pretende transmitir con el cultivo de cada materia.

Resumen

Esta tesina propone el análisis y relación de la matemática y los juegos. Para llevar a cabo este trabajo se realizo una investigación sobre la teoría de los juegos.

Posteriormente se realizo un análisis y clasificación de determinados juegos.

Por ultimo se concluye en resaltar la importancia del juego como procedimiento de enseñanza en el área lógico matemático, debido a que el juego lógico es una tendencia a la resolución de ejercicios matemáticos donde el alumno pone toda su creatividad para obtener un resultado favorable en su aprendizaje.

ABSTRACT

This essay suggests the analysis and relationship of mathematics and juegos.Para carry out this work was performed research on game theory.

It was subsequently conducted an analysis and classification of certain games.

Finally it is concluded on the importance of the game as a process of education in the mathematical sense, because the game is a logical trend towards solving mathematical exercises where the student puts all his creativity to produce a favorable outcome in their learning .

Descriptores

- Matemática recreativa
- Enseñanza_aprendizaje
- Actividades lúdicas
- Motivación

INTRODUCCIÓN

Cursando tercer año del profesorado de matemáticas tuve que realizar un trabajo de investigación en la materia historia de la matemática sobre la relación de los juegos y la matemática, es ahí donde nació en mi el interés por este tema.

El principal objetivo de mi trabajo es: analizar la relación entre las actividades lúdicas y el pensar matemático; aportando las herramientas necesarias e incentivando el desarrollo del pensamiento lógico formal.

FUNDAMENTACIÓN

Elegimos este tema porque notamos que para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta es aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para nosotros, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello puedan ser otras muchas; que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático.

Para nosotros la matemática es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en los juegos intelectuales.

La matemática es un grande y sofisticado juego que, además, resulta ser al mismo tiempo una obra de arte intelectual, que proporciona una intensa luz en la exploración del universo y tiene grandes repercusiones prácticas.

En su aprendizaje se puede utilizar con gran provecho sus aplicaciones, su historia, las biografías de los matemáticos más reconocidos, sus relaciones con la filosofía o con otros aspectos de la mente humana, pero posiblemente ningún otro camino puede transmitir cuál es el espíritu correcto para hacer matemáticas como un juego bien escogido.

SUPUESTOS:

_Los que aborden esta tesina llegaran a asimilar la matemática desde otra perspectiva.

_ Demasiada información acerca del tema, lo cual implica un análisis profundo que seria imposible abarcar en su totalidad en mi tesina.

LIMITACIONES:

_Al ser un tema tan amplio, solamente se analizara una parte de su totalidad.

MARCO HISTORICO

La historia antigua no ha sido inclinada a preservar sino los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras.

El llamado problema bovino de Arquímedes, álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales.

Euclides fue, al parecer, no sólo el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada Pseudaria (Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía.

En la Edad Media Leonardo de Pisa (a.C.1170-a.C.1250), mejor conocido hoy y entonces como Fibonacci, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus contemporáneos

En la Edad Moderna Geronimo Cardano (1501-1576), el mejor matemático de su tiempo, escribió el Líber de ludo aleae, un libro sobre juegos de azar, con el que se anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad. En su tiempo, como tomando parte en este espíritu lúdico, los duelos medievales a base de lanza y escudo dieron paso a los duelos intelectuales consistentes en resolver ecuaciones algebraicas cada vez más difíciles, con la participación masiva, y más o menos deportiva, de la población estudiantil, de Cardano mismo y otros contendientes famosos como Tartaglia y Ferrari.

El famoso problema del Caballero de Meré, consistía en saber cómo deben ser las apuestas de dos jugadores que, habiendo de alcanzar n puntos con sus dados, uno ha obtenido p y el otro q puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gobaud, Caballero de Meré (1610-1685) a Pascal (1623-1662).

De la correspondencia entre éste y Fermat (1601-1665) a propósito del problema surgió la moderna teoría de la probabilidad.

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente", escribía en una carta en 1715. Y en particular comenta en otra carta en 1716 lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta el jugarlo al revés.

En 1735, Euler (1707-1783), oyó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano). Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y con ella de la topología general.

También el espíritu matemático de la época de Euler participaba fuertemente del ánimo competitivo de la época de Cardano. Johann Bernoulli (1667-1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Jakod Bernoulli (creador, precisamente con su solución al problema, del cálculo de variaciones) Leibniz, Newton y Huygens.

Se cuenta que Hamilton (1805-1865) sólo recibió dinero directamente por una de sus publicaciones y ésta consistió precisamente en un juego matemático que comercializó con el nombre de Viaje por el Mundo. Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular, las ciudades de ese mundo, un viaje que no repitiese visitas a ciudades circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Esto ha dado lugar a un problema interesante en teoría de grafos que admiten un camino hamiltoniano.

Los biógrafos de Gauss (1777-1855) cuentan que el Princeps Mathematicorum era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.

Hilbert (1862-1943) uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

John Von Neumann (1903-1957), otro de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, escribió con Oskar Morgenstern en 1944 un libro titulado Teoría de Juegos y Conducta Económica. En él analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de mínimas, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico.

Albert Einstein (1879-1955), tenía toda una estantería de su biblioteca particular dedicada a libros sobre juegos matemáticos.

MARCO TEORICO

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (los llamados juegos) y llevar a cabo procesos de decisión.

Sus investigadores estudian las estrategias óptimas así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos. Tipos de interacción aparentemente distintos pueden, en realidad, presentar estructuras de incentivos similares y, por lo tanto, representar conjuntamente un mismo juego.

Desarrollada en sus comienzos como una herramienta para entender el comportamiento de la economía, la teoría de juegos se usa actualmente en muchos campos, desde la biología a la filosofía.

La teoría de los juegos experimentó un crecimiento sustancial y se formalizó por primera vez a partir de los trabajos de John Von Neumann y Oskar Morgenstern, antes y durante la Guerra Fría, debido sobre todo a su aplicación a la estrategia militar —en particular a causa del concepto de destrucción mutua garantizada.

Desde los setenta, la teoría de juegos se ha aplicado a la conducta animal, incluyendo el desarrollo de las especies por la selección natural.

A raíz de juegos como el dilema del prisionero, en los que el egoísmo generalizado perjudica a los jugadores, la teoría de juegos se ha usado en ciencia política, ética y filosofía.

Finalmente, ha atraído también la atención de los investigadores en informática, usándose en inteligencia artificial y cibernética.

Aunque tiene algunos puntos en común con la teoría de la decisión, la teoría de juegos estudia decisiones realizadas en entornos donde interaccionan. En otras palabras, estudia la elección de la conducta óptima cuando los costes y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros individuos.

Un ejemplo muy conocido de la aplicación de la teoría de juegos a la vida real es el dilema del prisionero, popularizado por el matemático Albert W. Tucker, el cual tiene muchas implicaciones para comprender la naturaleza de la cooperación humana.

La teoría psicológica de juegos, que se arraiga en la escuela psicoanalítica del análisis transaccional, es enteramente distinta.

Los analistas de juegos utilizan asiduamente otras áreas de la matemática, en particular las probabilidades, las estadísticas y la programación lineal, en conjunto con la teoría de juegos. Además de su interés académico, la teoría de juegos ha recibido la atención de la cultura popular.

La vida del matemático teórico laureado con un premio Nobel John Forbes Nash, desarrollador del Equilibrio de Nash, fue el tema de la biografía de Sylvia Nasar Una mente brillante (1998), y de la película del mismo nombre (2001).

Representación de juegos

Los juegos estudiados por la teoría de juegos están bien definidos por objetos matemáticos.

Un juego consiste en un conjunto de jugadores, un conjunto de movimientos (o estrategias) disponible para esos jugadores y una especificación de recompensas para cada combinación de estrategias.

Hay dos formas comunes de representar a los juegos:

Forma normal de un juego

La forma normal o estratégica de un juego es una matriz que muestra los jugadores, las estrategias, y las recompensas.

Hay dos tipos de jugadores; uno elige la fila y otro la columna. Cada jugador tiene dos estrategias, que están especificadas por el número de filas y el número de columnas. Las recompensas se especifican en el interior.

El primer número es la recompensa recibida por el jugador de las filas (el Jugador 1 en nuestro ejemplo); el segundo es la recompensa del jugador de las columnas (el Jugador 2 en nuestro ejemplo). Si el jugador 1 elige arriba y el jugador 2 elige izquierda entonces sus recompensas son 4 y 3, respectivamente.

Cuando un juego se presenta en forma normal, se presupone que todos los jugadores actúan simultáneamente o, al menos, sin saber la elección que toma el otro.

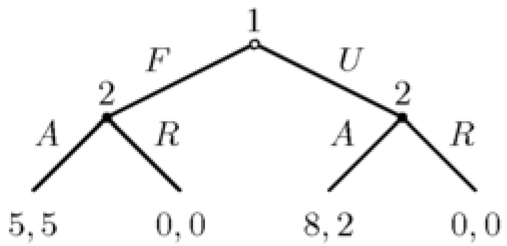
Si los jugadores tienen alguna información acerca de las elecciones de otros jugadores el juego se presenta habitualmente en la forma extensiva.

También existe una forma normal reducida. Ésta combina estrategias asociadas con el mismo pago.

	El jugador 2 elige izquierda	*El jugador 2 elige derecha*
El jugador 1 elige arriba	4, 3	-1, -1
El jugador 1 elige abajo	0, 0	3, 4

Un juego en forma normal

Forma extensiva de un juego



Un juego en forma extensiva

La representación de juegos en forma extensiva modela juegos con algún orden que se debe considerar.

Los juegos se presentan como árboles.Cada vértice o nodo representa un punto donde el jugador toma decisiones. El jugador se especifica por un número situado junto al vértice. Las líneas que parten del vértice representan acciones posibles para el jugador. Las recompensas se especifican en las terminaciones de las ramas del árbol.

En el juego que se muestra en el ejemplo hay dos jugadores. El jugador 1 mueve primero y elige F o U. El jugador 2 ve el movimiento del jugador 1 y elige A o R. Si el jugador 1 elige U y entonces el jugador 2 elige A, entonces el jugador 1 obtiene 8 y el jugador 2 obtiene 2.

Los juegos en forma extensiva pueden modelar también juegos de movimientos simultáneos. En esos casos se dibuja una línea punteada o un círculo alrededor de dos vértices diferentes para representarlos como parte del mismo conjunto de información (por ejemplo, cuando los jugadores no saben en qué punto se encuentran).

La forma normal da al matemático una notación sencilla para el estudio de los problemas de equilibrio, porque desestima la cuestión de cómo las estrategias son calculadas o, en otras palabras, de cómo el juego es jugado en realidad.

La notación conveniente para tratar estas cuestiones, más relevantes para la teoría combinatoria de juegos, es la forma extensiva del juego.

Clasificación de los juegos:

La teoría clasifica los juegos en muchas categorías que determinan qué métodos particulares se pueden aplicar para resolverlos (y, de hecho, también cómo se define "resolución" en una categoría particular). Las categorías comunes incluyen:

Juegos simétricos y asimétricos

Un juego simétrico es un juego en el que las recompensas por jugar una estrategia en particular dependen sólo de las estrategias que empleen los otros jugadores y no de quién las juegue.

Si las identidades de los jugadores pueden cambiarse sin que cambien las recompensas de las estrategias, entonces el juego es simétrico. Muchos de los juegos 2 × 2 más estudiado son simétricos.

Las representaciones estándar del juego de la gallina, el dilema del prisionero y la caza del ciervo son juegos simétricos.Los juegos asimétricos más estudiados son los juegos donde no hay conjuntos de estrategias idénticas para ambos jugadores.

Por ejemplo, el juego del ultimátum y el juego del dictador tienen diferentes estrategias para cada jugador; no obstante, puede haber juegos asimétricos con estrategias idénticas para cada jugador.

	E	F
E	1, 2	0, 0
F	0, 0	1, 2

Un juego asimétrico

Juegos de suma cero y de suma no cero

En los juegos de suma cero el beneficio total para todos los jugadores del juego, en cada combinación de estrategias, siempre suma cero (en otras palabras, un jugador se beneficia solamente a expensas de otros). El go, el ajedrez, el póker y el juego del oso son ejemplos de juegos de suma cero, porque se gana exactamente la cantidad que pierde el oponente.

Como curiosidad, el fútbol dejó hace unos años de ser de suma cero, pues las victorias reportaban 2 puntos y el empate 1 (considérese que ambos equipos parten inicialmente con 1 punto), mientras que en la actualidad las victorias reportan 3 puntos y el empate 1.

La mayoría de los ejemplos reales en negocios y política, al igual que el dilema del prisionero, son juegos de suma no cero, porque algunos desenlaces tienen resultados netos mayores o menores que cero. Es decir, la ganancia de un jugador no necesariamente se corresponde con la pérdida de otro.

Se puede analizar más fácilmente un juego de suma cero, y cualquier juego se puede transformar en un juego de suma cero añadiendo un jugador "ficticio" adicional ("el tablero" o "la banca"), cuyas pérdidas compensen las ganancias netas de los jugadores.

La matriz de pagos de un juego es una forma conveniente de representación. Por ejemplo, un juego de suma cero de dos jugadores con la matriz que se muestra;

	A	B	C
1	30, -30	-10, 10	20, -20
2	10, -10	20, -20	-20, 20

Un juego de suma cero

Juegos cooperativos

Un juego cooperativo se caracteriza por un contrato que puede hacerse cumplir. La teoría de los juegos cooperativos da justificaciones de contratos plausibles. La plausibilidad de un contrato está muy relacionada con la estabilidad.

Dos jugadores negocian qué tanto quieren invertir en un contrato. La teoría de la negociación axiomática nos muestra cuánta inversión es conveniente para nosotros. Por ejemplo, la solución de Nash para la negociación demanda que la inversión sea justa y eficiente.

De cualquier forma, podríamos no estar interesados en la justicia y exigir más. De hecho, existe un juego no-cooperativo creado por Ariel Rubinstein consistente en alternar ofertas, que apoya la solución de Nash considerándola la mejor, mediante el llamado equilibrio de Nash.

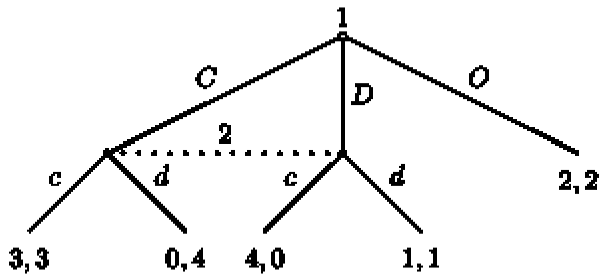
Juegos simultáneos y secuenciales

Los juegos simultáneos son juegos en los que los jugadores mueven simultáneamente o en los que éstos desconocen los movimientos anteriores de otros jugadores. Los juegos secuenciales (o dinámicos) son juegos en los que los jugadores posteriores tienen algún conocimiento de las acciones previas.

Este conocimiento no necesariamente tiene que ser perfecto; sólo debe consistir en algo de información. Por ejemplo, un jugador puede conocer que un jugador no realizó una acción determinada, pero no saber cuál de las otras acciones disponibles eligió.

La diferencia entre juegos simultáneos y secuenciales se recoge en las representaciones discutidas previamente. La forma normal se usa para representar juegos simultáneos, y la extensiva para representar juegos secuenciales.

Juegos de información perfecta



Un subconjunto importante de los juegos secuenciales es el conjunto de los juegos de información perfecta. Un juego es de información perfecta si todos los jugadores conocen los movimientos que han efectuado previamente todos los otros jugadores; así que sólo los juegos secuenciales pueden ser juegos de información perfecta, pues en los juegos simultáneos no todos los jugadores (a menudo ninguno) conocen las acciones del resto.

La mayoría de los juegos estudiados en la teoría de juegos son juegos de información imperfecta, aunque algunos juegos interesantes son de información perfecta, incluyendo el juego del ultimátum y el juego del ciempiés.

También muchos juegos populares son de información perfecta, incluyendo el ajedrez y el go.

La información perfecta se confunde a menudo con la información completa, que es un concepto similar.

La información completa requiere que cada jugador conozca las estrategias y recompensas del resto pero no necesariamente las acciones.

En los juegos de información completa cada jugador tiene la misma "información relevante al juego" que los demás jugadores. El ajedrez y el dilema del prisionero ejemplifican juegos de información completa.

Los juegos de información completa ocurren raramente en el mundo real, y los teóricos de los juegos, usualmente los ven sólo como aproximaciones al juego realmente jugado.

John Conway desarrolló una notación para algunos juegos de información completa y definió varias operaciones en esos juegos, originalmente para estudiar los finales de go, aunque buena parte de este análisis se enfocó en Nim. Esto devino en la teoría de juegos combinatoria. Descubrió que existe una subclase de esos juegos que pueden ser usados como números, como describió en su libro On Numbers and Games, llegando a la clase muy general de los números surreales.

Juegos de longitud infinita

Por razones obvias, los juegos estudiados por los economistas y los juegos del mundo real finalizan generalmente tras un número finito de movimientos. Los juegos matemáticos puros no tienen estas restricciones y la teoría de conjuntos estudia juegos de infinitos movimientos, donde el ganador no se conoce hasta que todos los movimientos se conozcan.

El interés en dicha situación no suele ser decidir cuál es la mejor manera de jugar a un juego, sino simplemente qué jugador tiene una estrategia ganadora (Se puede probar, usando el axioma de elección, que hay juegos —incluso de información perfecta, y donde las únicas recompensas son "perder" y "ganar"— para los que ningún jugador tiene una estrategia ganadora.) La existencia de tales estrategias tiene consecuencias importantes en la teoría descriptiva de conjuntos.

Aplicaciones

La teoría de juegos tiene la característica de ser un área en que la sustancia subyacente es principalmente una categoría de matemáticas aplicadas, pero la mayoría de la investigación fundamental es desempeñada por especialistas en otras áreas.

Esta teoría tiene aplicaciones en numerosas áreas, entre las cuales caben destacar las ciencias económicas, la biología evolutiva, la psicología, las ciencias políticas y la estrategia militar.

Economía y negocios

Los economistas han usado la teoría de juegos para analizar un amplio abanico de problemas económicos, incluyendo subastas, duopolios, oligopolios, la formación de redes sociales, y sistemas de votaciones.

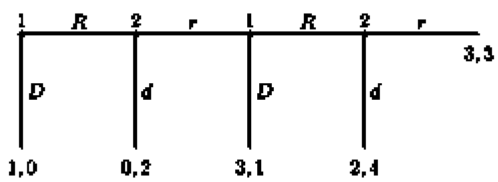
Estas investigaciones normalmente están enfocadas a conjuntos particulares de estrategias conocidos como conceptos de solución. Estos conceptos de solución están basados normalmente en lo requerido por las normas de racionalidad perfecta.

El más famoso es el equilibrio de Nash. Un conjunto de estrategias es un equilibrio de Nash si cada una representa la mejor respuesta a otras estrategias. De esta forma, si todos los jugadores están aplicando las estrategias en un equilibrio de Nash, no tienen ningún incentivo para cambiar de conducta, pues su estrategia es la mejor que pueden aplicar dadas las estrategias de los demás.

Las recompensas de los juegos normalmente representan la utilidad de los jugadores individuales. A menudo las recompensas representan dinero, que se presume corresponden a la utilidad de un individuo. Esta presunción, sin embargo, puede no ser correcta.

Un documento de teoría de juegos en economía empieza presentando un juego que es una abstracción de una situación económica particular. Se eligen una o más soluciones, y el autor demuestra qué conjunto de estrategias corresponden al equilibrio en el juego presentado. Los economistas y profesores de escuelas de negocios sugieren dos usos principales.

Descriptiva



Un juego del ciempiés de tres fases

El uso principal es informar acerca del comportamiento de las poblaciones humanas actuales.

Algunos investigadores creen que encontrar el equilibrio de los juegos puede predecir cómo se comportarían las poblaciones humanas si se enfrentasen a situaciones análogas al juego estudiado.

Esta visión particular de la teoría de juegos se ha criticado en la actualidad.

Los teóricos de juegos pueden suponer jugadores que se comportan siempre racionalmente y actúan para maximizar sus beneficios (el modelo homo o economicus), pero los humanos reales a menudo actúan irracionalmente o racionalmente pero buscando el beneficio de un grupo mayor (altruismo).

Los teóricos de juegos responden comparando sus supuestos con los que se emplean en física. Así, aunque sus supuestos no se mantienen siempre, pueden tratar la teoría de juegos como una idealización razonable, de la misma forma que los modelos usados por los físicos.

Sin embargo, este uso de la teoría de juegos se ha seguido criticando porque algunos experimentos han demostrado que los individuos no se comportan según estrategias de equilibrio.

Por ejemplo, en el juego del ciempiés, el juego de adivinar 2/3 de la media y el juego del dictador, las personas a menudo no se comportan según el equilibrio de Nash. Esta controversia se está resolviendo actualmente.

Por otra parte, algunos autores aducen que los equilibrios de Nash no proporcionan predicciones para las poblaciones humanas, sino que proporcionan una explicación de por qué las poblaciones que se comportan según el equilibrio de Nash permanecen en esa conducta. Sin embargo, la cuestión acerca de cuánta gente se comporta así permanece abierta.

Algunos teóricos de juegos han puesto esperanzas en la teoría evolutiva de juegos para resolver esas preocupaciones. Tales modelos presuponen o no racionalidad o una racionalidad acotada en los jugadores. A pesar del nombre, la teoría evolutiva de juegos no presupone necesariamente selección natural en sentido biológico. La teoría evolutiva de juegos incluye las evoluciones biológica y cultural y también modela el aprendizaje individual.

Normativa

Por otra parte, algunos matemáticos no ven la teoría de juegos como una herramienta que predice la conducta de los seres humanos, sino como una sugerencia sobre cómo deberían comportarse.Dado que el equilibrio de Nash constituye la mejor respuesta a las acciones de otros jugadores, seguir una estrategia que es parte del equilibrio de Nash parece lo más apropiado. Sin embargo, este uso de la teoría de juegos también ha recibido críticas. En primer lugar, en algunos casos es apropiado jugar según una estrategia ajena al equilibrio si uno espera que los demás también jugarán de acuerdo al equilibrio. Por ejemplo, en el juego adivina 2/3 de la media.

El dilema del prisionero presenta otro contraejemplo potencial. En este juego, si cada jugador persigue su propio beneficio ambos jugadores obtienen un resultado peor que de no haberlo hecho. Algunos matemáticos creen que esto demuestra el fallo de la teoría de juegos como una recomendación de la conducta a seguir.

	Cooperar	Traicionar
Cooperar	2, 2	0, 3
Traicionar	3, 0	1, 1

El dilema del prisionero

Biología

A diferencia del uso de la teoría de juegos en la economía, las recompensas de los juegos en biología se interpretan frecuentemente como adaptación. Además, su estudio se ha enfocado menos en el equilibrio que corresponde a la noción de racionalidad, centrándose en el equilibrio mantenido por las fuerzas evolutivas. El equilibrio mejor conocido en biología se conoce como estrategia evolutivamente estable, y fue introducido por primera vez por John Maynard Smith. Aunque su motivación inicial no comportaba los requisitos mentales del equilibrio de Nash, toda estrategia evolutivamente estable es un equilibrio de Nash.

En biología, la teoría de juegos se emplea para entender muchos problemas diferentes. Se usó por primera vez para explicar la evolución (y estabilidad) de las proporciones de sexos 1:1 (mismo número de machos que de hembras). Ronald Fisher sugirió en 1930 que la proporción 1:1 es el resultado de la acción de los individuos tratando de maximizar el número de sus nietos sujetos a la restricción de las fuerzas evolutivas.

Además, los biólogos han usado la teoría de juegos evolutiva y el concepto de estrategia evolutivamente estable para explicar el surgimiento de la comunicación animal (John Maynard Smith y Harper en el año 2003). El análisis de juegos con señales y otros juegos de comunicación ha proporcionado nuevas interpretaciones acerca de la evolución de la comunicación en los animales.

Finalmente, los biólogos han usado el problema halcón-paloma (también conocido como problema de la gallina) para analizar la conducta combativa y la territorialidad.

	Halcón	Paloma
Halcón	(V-C)/2, (V-C)/2	V, 0
Paloma	0, V	V/2, V/2

Halcón-Paloma

Informática y lógica

La teoría de juegos ha empezado a desempeñar un papel importante en la lógica y la informática. Muchas teorías lógicas se asientan en la semántica de juegos. Además, los investigadores de informática han usado juegos para modelar programas que interactúan entre sí.

Ciencias políticas

La investigación en ciencias políticas también ha usado resultados de la teoría de juegos. Una explicación de la teoría de la paz democrática es que el debate público y abierto en la democracia envía información clara y fiable acerca de las intenciones de los gobiernos hacia otros estados.

Por otra parte, es difícil conocer los intereses de los líderes no democráticos, qué privilegios otorgarán y qué promesas mantendrán. Según este razonamiento, habrá desconfianza y poca cooperación si al menos uno de los participantes de una disputa no es una democracia.

Filosofía

La teoría de juegos ha demostrado tener muchos usos en filosofía. A partir de dos trabajos de W.V.O. Quine publicados en 1960 y 1967, David Lewis (1969) usó la teoría de juegos para desarrollar el concepto filosófico de convención.

De esta forma, proporcionó el primer análisis del conocimiento común y lo empleó en analizar juegos de coordinación. Además, fue el primero en sugerir que se podía entender el significado en términos de juegos de señales. Esta sugerencia se ha seguido por muchos filósofos desde el trabajo de Lewis (Skyrms 1996, Grim et al. 2004).

Leon Henkin, Paul Lorenzen y Jaakko Hintikka iniciaron una aproximación a la semántica de los lenguajes formales que explica con conceptos de teoría de juegos los conceptos de verdad lógica, validez y similares. En esta aproximación los "jugadores" compiten proponiendo cuantificaciones e instancias de oraciones abiertas; las reglas del juego son las reglas de interpretación de las sentencias en un modelo, y las estrategias de cada jugador tienen propiedades de las que trata la teoría semántica –ser dominante si y sólo si las oraciones con que se juega cumplen determinadas condiciones, etc.-.

En ética, algunos autores han intentado continuar la idea de Thomas Hobbes de derivar la moral del interés personal. Dado que juegos como el dilema del prisionero presentan un conflicto aparente entre la moralidad y el interés personal, explicar por qué la cooperación es necesaria para el interés personal es una componente importante de este proyecto. Esta estrategia general es un componente de la idea de contrato social en filosofía política (ejemplos en Gauthier 1987 y Kavka 1986).

Finalmente, otros autores han intentado usar la teoría evolutiva de juegos para explicar el nacimiento de las actitudes humanas ante la moralidad y las conductas animales correspondientes. Estos autores han buscado ejemplos en muchos juegos, incluyendo el dilema del prisionero, la caza del ciervo, y el juego del trato de Nash para explicar la razón del surgimiento de las actitudes acerca de la moral.

	Ciervo	Liebre
Ciervo	3, 3	0, 2

Liebre	2, 0	2, 2

La caza del ciervo

Historia de la teoría de juegos

La primera discusión conocida de la teoría de juegos aparece en una carta escrita por James Waldegrave en 1713. En esta carta, Waldegrave proporciona una solución minimax de estrategia mixta a una versión para dos personas del juego de cartas le Her. Sin embargo no se publicó un análisis teórico de teoría de juegos en general hasta la publicación de Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, de Antoine Augustin Cournot en 1838.

En este trabajo, Cournot considera un duopolio y presenta una solución que es una versión restringida del equilibrio de Nash.

Aunque el análisis de Cournot es más general que el de Waldegrave, la teoría de juegos realmente no existió como campo de estudio aparte hasta que John Von Neumann publicó una serie de artículos en 1928. Estos resultados fueron ampliados más tarde en su libro de 1944, The Theory of Games and Economic Behavior, escrito junto con Oskar Morgenstern. Este trabajo contiene un método para encontrar soluciones óptimas para juegos de suma cero de dos personas.

Durante este período, el trabajo sobre teoría de juegos se centró, sobre todo, en teoría de juegos cooperativos. Este tipo de teoría de juegos analiza las estrategias óptimas para grupos de individuos, asumiendo que pueden establecer acuerdos entre sí acerca de las estrategias más apropiadas.

En 1950, aparecieron las primeras discusiones del dilema del prisionero, y se emprendió un experimento acerca de este juego en la corporación RAND. Alrededor de esta misma época, John Nash desarrolló una definición de una estrategia óptima para juegos de múltiples jugadores donde el óptimo no se había definido previamente, conocido como equilibrio de Nash. Este equilibrio es suficientemente general, permitiendo el análisis de juegos no cooperativos además de los juegos cooperativos.

La teoría de juegos experimentó una notable actividad en la década de 1950, momento en el cual los conceptos base, el juego de forma extensiva, el juego ficticio, los juegos repetitivos, y el valor de Shapley fueron desarrollados. Además, en ese tiempo, aparecieron las primeras aplicaciones de la teoría de juegos en la filosofía y las ciencias políticas.

En 1965, Reinhard Selten introdujo su concepto de solución de los equilibrios perfectos del subjuego, que más adelante refinó el equilibrio de Nash. En 1967 John Harsanyi desarrolló los conceptos de la información completa y de los juegos bayesianos. Él, junto con John Nash y Reinhard Selten, ganaron el Premio Nobel de Economía en 1994.

En la década de 1970 la teoría de juegos se aplicó extensamente a la biología, en gran parte como resultado del trabajo de John Maynard Smith y su concepto estrategia estable evolutiva. Además, los conceptos del equilibrio correlacionado, la perfección del temblor de la mano, y del conocimiento común fueron introducidos y analizados.

En 2005, los teóricos de juegos Thomas Schelling y Robert Aumann ganaron el premio Nobel de Economía. Schelling trabajó en modelos dinámicos, los primeros ejemplos de la teoría de juegos evolutiva. Por su parte, Aumann contribuyó más a la escuela del equilibrio.

En el 2007, Roger Myerson, junto con Leonid Hurwicz y Eric Maskin, recibieron el premio Nobel de Economía por "sentar las bases de la teoría de diseño de mecanismos."

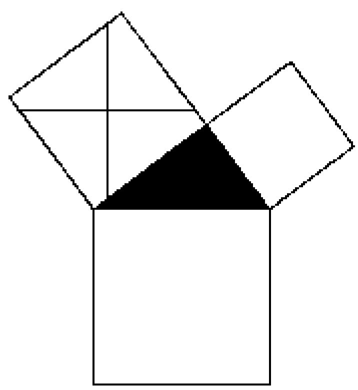
JUEGOS

ROMPECABEZAS DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

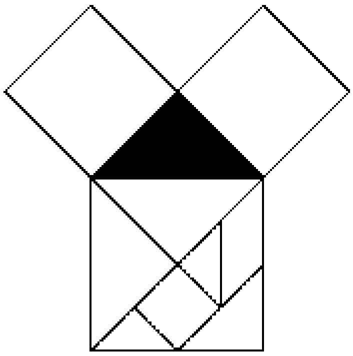
Los siguientes juegos se basan en este conocido teorema. La forma de presentarlos es como un puzzle en el que partiendo de un triángulo rectángulo y al ensamblar las piezas se puede formar por un lado el cuadrado sobre la hipotenusa, y con las mismas piezas se construyen por otro los cuadrados sobre los catetos.

Estos rompecabezas se pueden usar en primaria como simples juegos para trabajar equivalencias de superficies, y en secundaria como complemento a las comprobaciones numéricas y demostraciones algebraicas.

En el grafico se divide en cuatro partes el cuadrado construido sobre el cateto mayor a partir de su centro (que se puede hallar por intersección de las diagonales), trazando posteriormente por él una paralela y una perpendicular a la hipotenusa del triángulo.

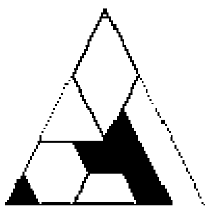


Otra demostración fácil de realizar utiliza las siete piezas del Tangram Chino. En este caso el triángulo sobre el que se trabaja no es un triángulo rectángulo cualquiera sino rectángulo e isósceles, y coincide con uno de los triángulos mayores del tangram.

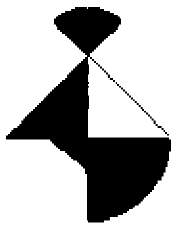


Colocando las piezas de diferentes maneras y formando distintas figuras los alumnos podrán:

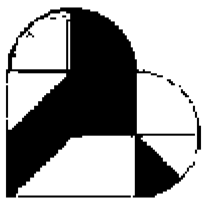
_ Clasificación de triángulos, cuadriláteros
_ Relación entre los lados de un triángulo
_ Cálculo de longitudes y áreas
_ Construcción de figuras geométricas.



Tangram de Ocho piezas



Tangram del huevo



Cardiotangram

¿QUIÉN TIENE...? YO TENGO...

El presente juego consta de 40 tarjetas, que en una cara tienen una pregunta y en la otra una respuesta que no corresponde a la pregunta que acompaña.

- Reglas del juego:

Se entrega una tarjeta a cada alumno de la clase y se sigue la siguiente dinámica:

a) Un alumno, elegido al azar, lee la pregunta que figura en su tarjeta, comenzando por la frase "¿Quién tiene...?"

b) El alumno que posea en su tarjeta la respuesta a esa pregunta la lee en voz alta, comenzando con las palabras "Yo tengo..."

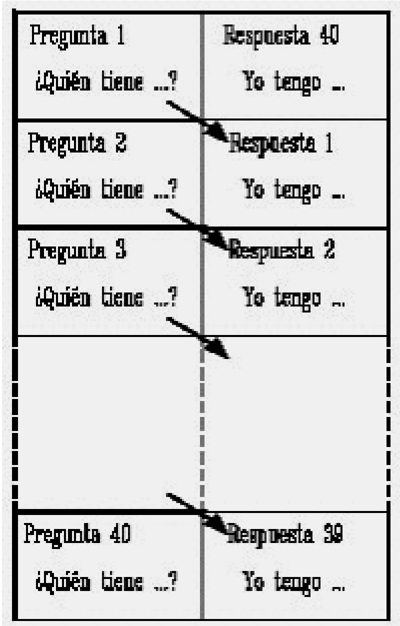
c) A continuación el alumno que ha respondido da la vuelta a su tarjeta y formula la pregunta que figura en ella.

d) El proceso se sigue hasta que se cierra el circuito, lo que sucede cuando responde a la última pregunta el alumno que lanzó la primera pregunta.

Puntaje: Si al terminar de cerrarse el circuito, quedasen tarjetas sin utilizar (algo más corriente de lo que parece) es debido a que en algún momento no se ha dado la respuesta correcta a la pregunta. Es aconsejable localizar donde ha ocurrido el fallo.

Tarjetas: Cada tarjeta tiene un anverso (donde figura una pregunta) y un reverso (con una respuesta). Para formar las tarjetas, cada hoja se dobla por la línea central, de esa manera las dos caras quedan opuestas, si se pegan y se recortan quedan formadas las tarjetas. Si estas dos partes se hacen por separado conviene pegarlas. En cualquier caso conviene plastificar las tarjetas una vez recortadas, lo que permite utilizarlas muchas veces.

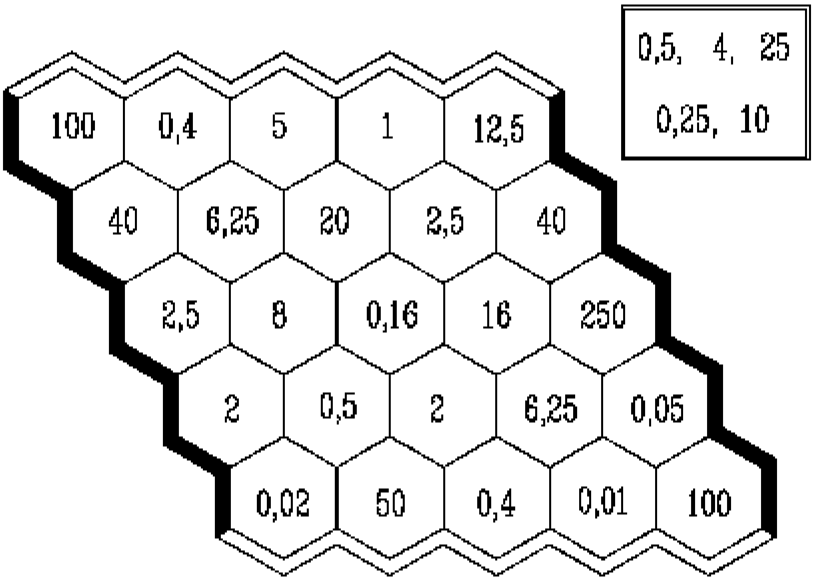
Aclaraciones: Hemos presentado un juego de contenidos geométricos, pero es posible construir juegos equivalentes en cualquier otro bloque. La forma más fácil de construir las tarjetas es escribir una pregunta y en la tarjeta siguiente escribir la respuesta correspondiente, así hasta el final, en el que la respuesta a la pregunta de la última tarjeta se colocaría en la primera tarjeta.



DECIMALES CON CALCULADORA

ATRAVIESA EL PANAL.

Es un juego para dos jugadores. Se necesitan un tablero como el que aparece a continuación, una calculadora y un puñado de fichas de dos colores, uno para cada uno de los jugadores.



Como puede apreciarse el tablero hexagonal tiene dos extremos en negro (izquierda y derecha) y otros dos en blanco (arriba y abajo). Cada jugador elige una de esas parejas y su objetivo es unir mediante una línea poligonal de fichas (no necesariamente recta) los dos extremos que ha elegido.

Instrucciones:

1) Por turno un jugador elige dos números (distintos) del recuadro superior y una operación, producto o división.

2) A continuación realiza la operación (con la calculadora si es necesario) y coloca la ficha en una casilla del panal donde aparezca el resultado de esa operación. Si el resultado obtenido no aparece en el panal o está ya esa casilla ocupada, el jugador pierde el turno.

3) Gana la partida el primero que consigue unir los dos extremos que ha elegido (ambos blancos o ambos negros) mediante una línea continua de fichas de su color. Si ninguno de los jugadores puede unir sus extremos, la partida se considera en tablas.

Para jugar a este juego es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

a) Hay resultados de operaciones que no figuran en el panal.

b) No es obligatorio colocar las fichas en una casilla adjunta a la que se ha colocado la anterior, ni es necesario comenzar a colocar fichas junto a uno de los extremos. Las fichas pueden situarse en el tablero de forma arbitraria.

c) La calculadora no puede utilizarse para realizar pruebas, es decir, sólo puede usarse después de haberse elegido los números y la operación a realizar, con el objetivo de comprobar la solución.

d) Aunque en la primera partida, los números suelen elegirse al azar y por su facilidad, tras varias partidas es usual que muchos alumnos realicen las operaciones mentalmente antes de elegir su tirada, con lo que se está potenciando este tipo de cálculo.

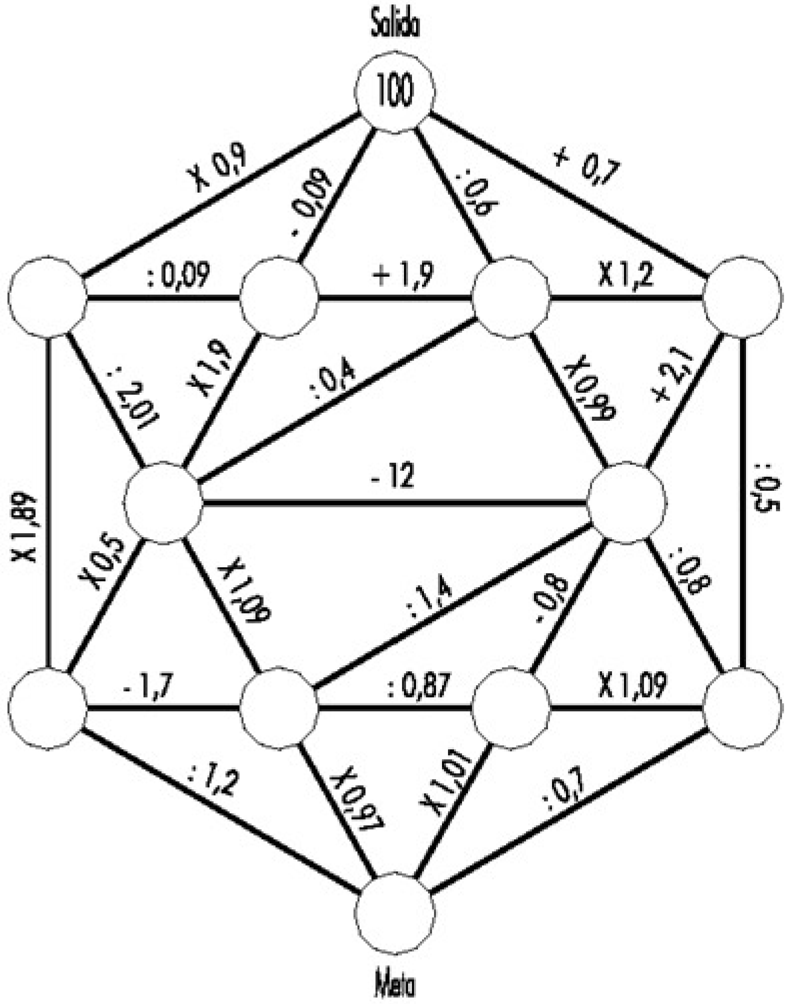
e) El tablero está preparado de forma que todos los números se obtienen con alguna operación de los cinco números elegidos, sin necesidad de repetir los números. Si se quieren simplificar los cálculos se puede permitir que los números que se eligen para realizar la operación sean repetidos.

Este juego está basado en un juego de tablero llamado HEX, que se juega sobre un tablero hexagonal (con las casillas vacías) y donde se colocan las fichas de dos colores con el objetivo ya indicado de unir los dos extremos que hayan correspondido a cada jugador. Ambos juegos tienen una estrategia ganadora, es decir, es posible jugar de forma que siempre se gane. Dejamos para la investigación de los lectores la búsqueda de esa estrategia ganadora.

La estructura de juego puede mantenerse modificando las operaciones y los números que figuran, tanto en el tablero como en la regleta rectangular. Así podemos adaptarlo para trabajar en Primaria, colocando sólo números naturales en la regleta y utilizando la suma y la resta para encontrar las soluciones que estarán sobre el tablero (como es lógico en este caso no se permitiría la calculadora). También podríamos colocar números convenientes de forma que su máximo común divisor o mínimo común múltiplo estuviesen en las casillas del tablero. O una regleta con polinomios y otra con números y, en las casillas, los valores numéricos de esas expresiones. La forma de jugar se mantiene en todos los casos, sólo se cambian los términos que aparecen en la regleta y las operaciones a realizar.

LABERINTO DECIMAL.

El siguiente es un juego para realizar con toda la clase. Cada jugador dispondrá de una calculadora y un tablero como el de la figura.



Instrucciones:

1) Se parte de la SALIDA tecleando el número 100 en la calculadora. Cada jugador recorre el tablero hasta llegar a la META con las siguientes reglas:

a) En cada segmento que se recorre se realiza la operación indicada sobre el número que en ese momento se tenga en la calculadora. El alumno tiene que anotar la operación correspondiente y el número obtenido.

b) No puede pasarse dos veces por el mismo segmento.

c) La dirección es siempre desde la SALIDA a la META y no se puede retroceder.

2) Gana el jugador que consigue llegar a la META con el valor más alto.

Una vez encontrado el camino, el alumno debe escribir en su cuaderno la expresión completa de las operaciones que ha realizado para llegar a su resultado, atendiendo especialmente al buen uso de la jerarquía de operaciones.

Después de las primeras partidas se puede modificar el objetivo del juego cambiándolo por los siguientes:

· Gana el jugador que consigue llegar al final con el menor valor.

· Gana el jugador que llega al final a un resultado lo más cercano posible al número original (100).

· Gana el jugador que obtiene el mayor valor al final después de haber pasado por todas las casillas.

Después de realizar dos o tres recorridos distintos se les puede pedir que intenten encontrar qué segmentos (es decir que operaciones) han influido en que los resultados sean mayores o menores.

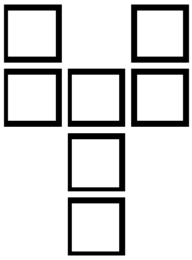
Esta actividad es especialmente interesante porque rompe algunos esquemas erróneos que poseen los alumnos. En concreto nos referimos a la idea de que siempre que se multiplica se aumenta, y que al dividir disminuye el resultado.

Si se trabaja con alumnos con dificultades, puede plantearse un objetivo más simple. Bastaría que el alumno hiciera un recorrido por el tablero, siguiendo las condiciones propuestas y que escribiera correctamente la lista de operaciones que dan lugar al resultado obtenido.

Juegos numéricos

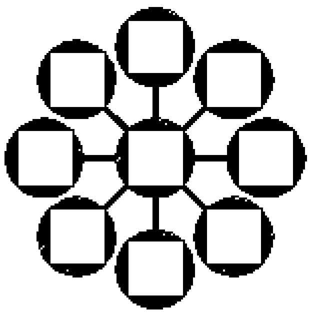
Siete números en la y griega

Coloca las cifras del 1 al 7 en el siguiente tablero, de manera que dos números consecutivos no estén juntos ni vertical, ni horizontal, ni diagonalmente



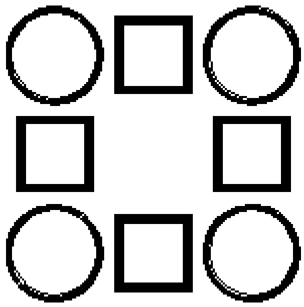
La rueda numérica

Coloca los números del 1 al 9 en los cuadros del tablero, de forma que todas las líneas de tres números sumen 15.



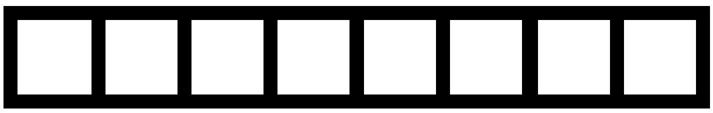
El cuadro de números.

Coloca los ocho primeros números en el tablero, de forma que cada número que esté en un cuadrado, sea la diferencia de los que están en los círculos a sus lados.



Ocho números en línea

Coloca las cifras del 1 al 8 en los cuadros de la siguiente línea, de forma que la diferencia, en un orden o en otro, entre dos números vecinos, no sea nunca menor que 4



SOPA POLINÓMICA

Este juego está diseñado para que jueguen desde uno hasta cuatro jugadores, y cada grupo debe tener un tablero y dieciséis tarjetas con polinomios como las que vienen a continuación

Tablero:

x-1	x+1	x-2	2x+3	1-x
x-1	x	x-7	x-2	x+4
x+2	5x+2	x+3	x+1	x-2
x+6	x	x^2+1	3x-2	$2x^2+1$
$3x^2+2$	x	-2x-1	x+1	$-x^2-1$
x-3	4x-1	x+2	x-2	3-x

Tarjetas:

1 x^3-2x^2-x+2	2 x^3+3x^2+x+3	3 $2x^3+x^2-7x-6$	4 x^3-3x+2
5 x^3+2x^2-3x	6 $6x^3-4x^2+3x-2$	7 $-x^3+7x-6$	8 $x^3-6x^2+12x-8$
9 $4x^3-x^2$	10 $5x^3+7x^2+2x$	11 $-2x^3-5x^2-2x$	12 $-2x^3-5x^2-23x+6$
13 $3x^3-9x^2+2x-6$	14 $-x^3+3x^2+4x-12$	15 $3x^3-5x^2-4x+4$	16 x^3+x

Reglas del juego:

1) Se barajan las 16 tarjetas y se colocan boca abajo sobre la mesa y cada jugador, por turno, elige una tarjeta hasta totalizar cuatro de ellas.

2) Los jugadores factorizan sus polinomios, y buscan, en la sopa de factores que aparece en el tablero, los factores consecutivos de cada factorización y los marcan.

3) Gana el jugador que consigue marcar primero las descomposiciones de sus cuatro polinomios, en un tiempo fijado de antemano. Si nadie lo ha conseguido será ganador el que más polinomios haya descompuesto.

Explicación del juego:

Esta actividad se basa en el conocido pasatiempo de "Sopa de Letras", un juego clásico que puede readaptarse y ser utilizado en clase de Matemáticas. Según la clasificación utilizada por el profesor Fernando Corbalán pertenecería a los Juegos de Procedimiento Conocido con Modificaciones, pues sus reglas generales son conocidas por los alumnos fuera del ámbito escolar. En nuestra adaptación proponemos que los alumnos trabajen la factorización de polinomios por lo que las palabras se sustituyen por polinomios y las letras de la sopa por factores.

Los objetivos del juego son los siguientes:

1) Factorizar polinomios de grado tres con dificultades de todo tipo (raíces reales simples, raíces dobles o triples, factores del tipo ($a \cdot x+b$), factor x, factores ($x \pm a$), usando factores comunes, el teorema del factor o la regla de Ruffini.

2) Comprobar que hay polinomios que no pueden factorizarse totalmente en factores de grado 1, razonando el porqué.

3) Trabajar el cálculo mental.

4) Trabajar la relación raíz (o solución o cero) de un polinomio con la de factor y viceversa.

5) Resolver ecuaciones.

La presentación de esta actividad permite modificaciones sobre la que hemos presentado. Así, los polinomios que aparecen en las tarjetas no tienen por qué ser todos de grado tres, se pueden colocar de distintos grados aunque entonces habría que modificar la regla 3), pues la suerte en la elección puede hacer que se necesite más tiempo según los polinomios que toquen. También se pueden modificar los polinomios no incluyendo factores de grado superior a uno.

Una dificultad que presenta el juego tal como está planteado son aquellos polinomios cuyos coeficientes principales son negativos, pues al descomponer en factores el alumno debe decidir en cuál de los tres tiene que incluir el signo menos y para ello tiene que fijarse muy bien en el tablero. Esto puede simplificarse poniendo todos los polinomios con coeficiente principal positivo.

La dinámica del juego también puede cambiarse, modificando las reglas de juego que podrían ser las siguientes:

1) Las tarjetas se barajan y se colocan boca abajo sobre la mesa.

2) El jugador que tiene el turno toma una tarjeta y descompone el polinomio, señalando los factores en la sopa. Si lo hace correctamente se anota un punto y pasa el turno al siguiente jugador y la tarjeta utilizada es eliminada del juego.

3) Si el jugador no sabe descomponer el polinomio pierde su turno y no se anota ningún punto. El jugador siguiente tiene la oportunidad de descomponer el polinomio ganando un punto extra por rebote. En caso de no hacerlo pasaría a su siguiente.

4) Si el jugador que le toca se equivoca en su descomposición y algún contrincante lo descubre, el jugador pierde su turno y el contrario se anota un punto por haber hecho correctamente la descomposición.

5) La partida acaba después de haber dado cuatro rondas, pasando por todos los jugadores. Gana quien tenga más puntuación.

También podría jugarse sin tarjetas, solamente utilizando el tablero. Jugarían dos alumnos y cada uno de ellos con el tablero por delante, construiría cuatro polinomios eligiendo dos o tres factores del tablero. Después los jugadores se intercambian los polinomios para factorizarlos y señalarlos en la sopa de factores. El primero que consiga señalar los cuatro polinomios gana la partida.

Con esta modalidad, antes de la factorización hay que repasar las operaciones de suma, resta y producto de polinomios.

Hay una última variante que podemos presentar. Una vez consolidada la factorización y conocidas las reglas del juego éstas se pueden variar para trabajar el concepto de raíz (o solución o cero) de un polinomio, y relacionarlo con los factores de ese mismo polinomio, de modo que en vez de buscar en la sopa los factores del polinomio correspondiente se busquen sus raíces reales.

De esta forma, al descomponer por ejemplo el primer polinomio:

x^3-2x^2-x+2 = (x-1)·(x+1)·(x-2) señalamos sus raíces.

1 -1 2

1	- 1	2	-3/2	1
1	0	7	2	- 4
- 2	-2/5	- 3	-1	2
- 6	0	-1	2/3	-1/2
-2/3	0	-1/2	- 1	1
3	1/4	- 2	2	3

Sopa de Raíces

En esta modalidad hay polinomios, como el 2º, que sólo tienen una raíz real y por lo tanto sólo se marcaría una casilla en la sopa; y otros, como el 9º, con raíces múltiples donde se marcaría la misma raíz tantas veces como su multiplicidad.

HEXAMANTE

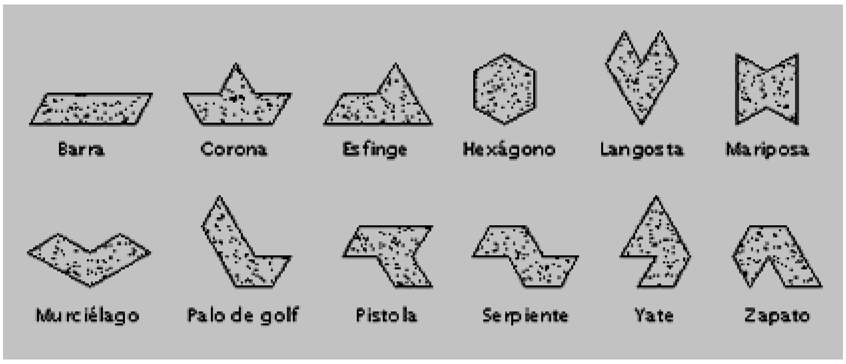
Introducción: Entre los puzzles que suelen encontrarse en cualquier tienda de juegos, existen varios que son especialmente atractivos para los matemáticos, pues permiten sacarles rendimiento didáctico en clase. Uno de ellos es el Tangram Chino y otro son los Pentominós. Estos últimos están formados por todas las piezas planas que se pueden construir con cinco cuadrados, unidos entre sí por un lado común y considerando iguales las reflexiones especulares. Con ellos es posible construir muchas figuras geométricas. Los Pentominós son un caso particular de los Poliminós, creados en la década de los cincuenta por el profesor norteamericano Solomón W. Golomb, que son las figuras que pueden construirse uniendo cuadrados por un lado común y cuyo nombre deriva de la pieza más simple, la formada por dos cuadrados y que es conocida por Dominó.

En la misma época, el propio Golomb hablaba de otro posible puzzle basado en triángulos equiláteros unidos también por un lado. Como la figura más elemental posible es la que se obtiene uniendo entre sí dos triángulos equiláteros, que equivale al diamante de la baraja francesa, este tipo de figuras fueron bautizadas a principios de los sesenta por el matemático escocés T.H. O´Beirne como "poliamantes". Igual que en los poliminós son iguales una figura y su reflexión en un espejo, es decir, si se levanta, voltea y coincide con la otra. Son estas figuras con las que vamos a jugar en este artículo.

Desarrollo didáctico de la actividad**:** Nosotros dividimos el trabajo con los poliamantesen tres fases: el diseño de las piezas, su estudio geométrico y la construcción de figuras. Vamos a desarrollar cada uno de estos aspectos.

Diseño y construcción de los poliamantes: A los alumnos se les entrega una trama triangular y con ella se les pide que vayan diseñando los distintos poliamantes. Deben comenzar con la única pieza de diamante que existe, y aumentar el número de triángulos obteniendo el triamante, los tetramantes (3), pentamantes (4) y hexamantes, de los que sólo existen doce posibles piezas, igual número que los pentominós. No es conveniente continuar a partir de ahí, pues existen 24 heptamantes (aunque si hay algún alumno especialmente dotado puede afrontar su desarrollo) y la cifra de octamantes se dispara hasta 66.

A continuación aparecen los doce hexamantes junto con el nombre que se les suele adjudicar, la mayoría de ellos elegidos por el matemático O'Beirne y que sirven como regla mnemotécnica para recordar las formas.



Conviene insistir a los alumnos que utilicen un método preciso de recurrencia para el diseño de las fichas, partiendo de un determinado escalón, por ejemplo los pentamantes, y añadiendo un nuevo triángulo en todas las formas posibles para obtener los hexamantes. Si no se quiere trabajar directamente sobre la trama isométrica, se puede dar a los alumnos varios triángulos equiláteros para que, uniendo sus lados, consigan todas las fichas.

Una vez diseñadas las piezas, el siguiente paso sería construirlas utilizando materiales fácilmente trabajables como cartón o acetatos de colores, u otros de más consistencia como panel, cartón pluma o madera. Es aconsejable que las piezas tengan el mismo color por ambas caras para moverlas y voltearlas libremente.

Estudio geométrico de las piezas: Para los primeros puntos de este apartado no es indispensable tener construidas las piezas, pero sí tener el dibujo de todas ellas. Aunque nos vamos a referir a los hexamantes, se pueden hacer con cualquier otro nivel. Así a partir del dibujo de las piezas se pueden estudiar las siguientes características matemáticas:

Perímetros: Aunque todas las piezas tienen la misma área, al estar formadas por seis triángulos equiláteros, el perímetro varía de unas piezas a otras. Por ello, deben sumar el valor de los lados de cada pieza y posteriormente agruparlas según su perímetro. ¿Cuál es la pieza con mayor perímetro?, ¿y con menor? Ordenar las piezas según el número de lados.

Simetrías y giros: Estudiar qué hexamantes tienen ejes de simetrías y dibujarlos. Ver qué piezas poseen centro de rotación que deje invariante la figura al girarla menos de 360º y estudiar los ángulos de rotación en esos casos.

Ángulos: Aparte de lo anterior, al dibujar las piezas observamos que aparecen algunas cóncavas y otras convexas, por lo que pueden estudiarse la magnitud de los ángulos agudos y obtusos (que siempre serán múltiplos de 60º) y clasificar las figuras también por este concepto.

Escalas: Es interesante estudiar cómo afecta el cambio de medidas a las piezas del puzzle, lo que permite repasar problemas de cálculo. Se pueden construir figuras de doble área, aunque es más interesante la construcción con doble longitud. En este puzzle se ve muy claro que al duplicar la longitud del lado de la pieza, el área se multiplica por 22 = 4, pues todas las piezas se pueden construir a doble tamaño del lado con cuatro piezas del propio puzzle. Algunas de ellas tienen distintas soluciones. La mayoría de las piezas permiten también construirlas a triple escala.

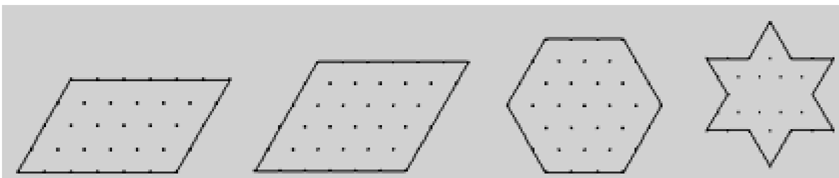
Relaciones entre poliamantes: Se pueden relacionar unos niveles con otros. Por ejemplo: ¿es posible obtener todos los hexamantes con dos triamantes?, ¿es posible descomponer todas las piezas en tres diamantes?

Construcción de figuras: Si consideramos este puzzle como un juego, el aspecto más atractivo es el de realizar figuras, aunque no son fáciles de conseguir salvo quizás las que ya hemos comentado: elegir cuatro hexamantes y construir una pieza a doble tamaño.

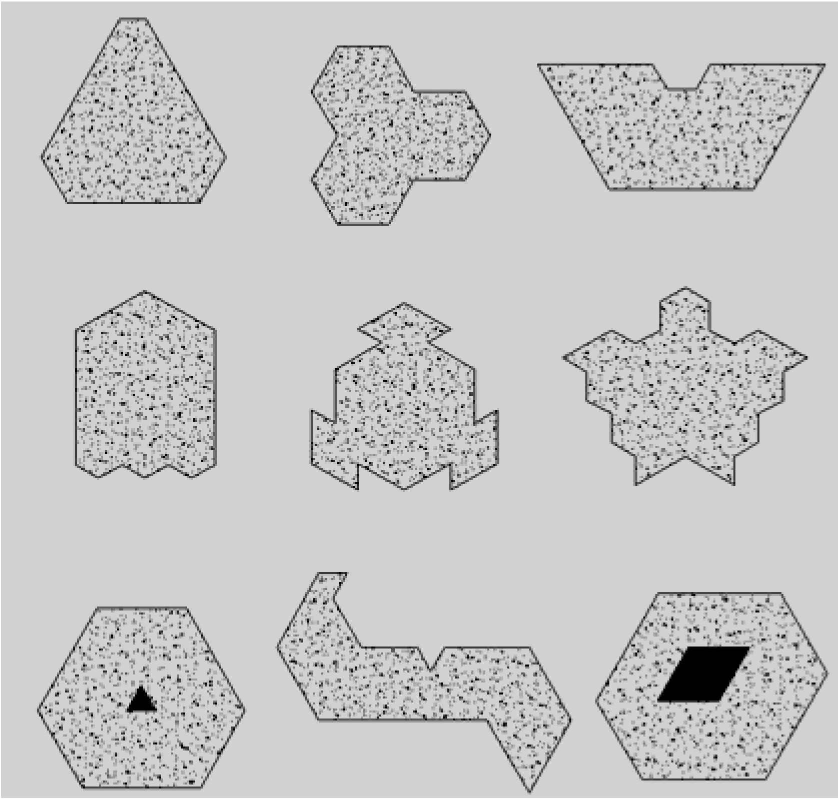
Una actividad sería construir piezas geométricas, a ser posibles con algún nivel de simetría, utilizando todos o parte de los hexamantes. A continuación presentamos algunas figuras que se pueden construir con este puzzle.

a) Utilizando sólo algunos hexamantes: La figura más fácil de conseguir es la del romboide, pues existe mucha variedad de tamaños. Se pueden construir todos los romboides con un lado de medida tres unidades (donde la unidad es la medida del lado del triángulo base, de los que se utilizan seis para construir los hexamantes) y el otro lado variando desde 4 hasta 12. El número de piezas necesarias para construirlos coincide con el valor de ese último lado.

También pueden construirse un romboide con 8 piezas y de medidas 4x6 o con 10 piezas, de medida 5x6. Otras figuras que se pueden construir con parte de los hexamantes son: el hexágono hecho con 9 piezas, y la estrella para la que se utilizan 8 piezas.



b) Utilizando todos los hexamantes: Las siguientes figuras están conseguidas con las doce piezas



EL SALTO DEL FACTOR

Juego para dos jugadores

Material:- Lápiz y goma.
- Un tablero con los números del 1 al 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Reglas del juego:

1) El primer jugador tacha en el tablero un número par.

2) A continuación y por turno, cada jugador debe tachar un múltiplo o divisor del número que ha elegido su compañero y que no haya sido aún tachado.

3) Si un jugador elimina un número que no cumple las características anteriores y el contrario lo descubre, la jugada no tiene validez y el jugador pierde.

4) Cuando un jugador no encuentra ningún número que suprimir, pierde la partida.

Características del juego:

1) Este es un juego de conocimiento en el que se manejan los siguientes contenidos: múltiplo y divisor de un número entero, descomposición de un número en producto de factores y manejo de números primos.

2) El juego puede utilizarse al principio de la secundaria para afianzar los conceptos relativos a divisibilidad en enteros. Conceptos que previamente se habrán explicado y trabajado en clase. Si se utilizan en cursos posteriores, pueden servir para repasar esos mismos conocimientos antes de adentrarnos en otra parte de la materia.

3) Es deseable que se utilice el cálculo mental para descubrir cuál es la jugada que se debe hacer. Si en el grupo hay alumnos con más dificultades se les puede permitir que realicen los cálculos con papel e incluso con calculadora, pero potenciando que usen estos medios para asegurarse el cálculo, es decir, que elijan mentalmente el resultado y lo comprueben posteriormente a mano o con la calculadora.

4) Si se utiliza el juego en cursos bajos, es interesante no utilizar todos los números en un primer momento, sino comenzar sólo con números del 1 al 50 o incluso menos. En sucesivas partidas se puede ir ampliando la cantidad de números que se utilizan.

5) La primera regla del juego es necesaria porque si no existe una estrategia que permite ganar siempre sin más que comenzar por elegir un número primo superior a 50. Es interesante proponer el juego la primera vez sin esa condición y cuando los alumnos comiencen a encontrar la estrategia ganadora, entonces imponer la primera condición.

6) Las primeras partidas que se realizan suelen ser lentas pues los alumnos no manejan bien los números primos y los divisores de un número, pero posteriormente las partidas son muy rápidas por lo que en poco tiempo se practican varias veces los conceptos que hemos comentado.

7) Una de las mayores dificultades que encuentran los alumnos es localizar todos los posibles divisores de un número no primo para encontrar alguno que no esté tachado, puede ser deseable repasar estructuras en árbol o cualquier otro método que permita encontrar todos los divisores.

8) El tablero puede servir para realizar la Criba de Eratóstenes pues cuando los alumnos han descubierto estrategias basadas en los números primos, les interesa conocer cuáles son estos y sobretodo los números primos grandes que son los que permiten aislar al contrario.

9) Después de jugar varias veces, los alumnos llegan con facilidad a descubrir que caer en el número 1 es equivalente a perder la partida, pues al contrario le basta tachar un primo mayor que 50 para quedarse sin posibilidades de jugar.

10) El tablero del juego puede servir para varias partidas si se tachan los números con lápiz que pueda ser borrado. Pueden utilizarse también fichas para tapar los números y así no tener que andar borrando.

CARTAS CON FRACCIONES EN CUADRADOS

Para trabajar con este material, se da a los alumnos cada fracción representada en forma numérica y geométrica.
Esto permite que jueguen juntos alumnos que interpreten una u otra de las representaciones presentes.

El uno y medio

En los juegos que se proponen con este material se posibilita a los alumnos el trabajo con fracciones equivalentes y el desarrollo de estrategias personales para la comparación y suma de fracciones.

Materiales:

• El mazo de cartas de fracciones (son 40 cartas, en cuatro "palos", con los valores:
1, 1/8, 1/4, 3/8, 1/2 , 5/8, 3/4, 7/8, 9/8, 5/4)
• Una hoja en blanco y un lápiz para anotar por alumno
• Una tira de cartulina donde se ha representado la recta numérica con una marca sobre el 1 1/2
• Una ficha que represente a cada jugador (fácilmente distinguible)

Organización del grupo
• Se juega entre 4 jugadores.

Reglas del juego

Se trata de un juego del estilo del "siete y medio", cuyo objetivo es sumar fracciones y compararlas mentalmente. Se juegan 4 rondas. En cada ronda, uno de los jugadores reparte y no se da cartas a sí mismo (es el "cartero"). Se mezclan las cartas y el cartero reparte una a cada jugador, quienes la ubican boca abajo.
Cada jugador levanta y mira su carta –sin mostrarla– y en la siguiente ronda, a su turno, le dice al cartero que quiere una carta más –tantas veces como desee, hasta que decida "plantarse"–o que no quiere más cartas.

Material para docentes:

Se trata de acercarse a 1 1/2 tanto como se pueda.
Para decidir quién gana cada ronda, una vez que los tres jugadores declararon que no quieren más cartas, cada uno/a calcula cuánto tiene (la suma de sus cartas) y pone su ficha sobre el número correspondiente a la suma de sus cartas en la "recta numérica", con lo cual es prácticamente inmediata la comparación de las fracciones resultado. Se muestran las cartas

y controlan entre todos. Si alguien no está de acuerdo con el resultado, tiene que explicar por qué.
Cuando todos acuerdan quién es el ganador, se anota el puntaje de la ronda. En cada ronda se juega un punto.

• El que se pasa de 1 1/2, no recibe puntos en esa ronda.
• Si un solo jugador sumó exactamente 1 1/2 , gana el punto de esa ronda.
• Si nadie sumó 1 1/2, gana el punto quien más se aproximó.
• Si hay empate, se fracciona el punto en partes iguales (medios o tercios).

Se pueden jugar 4 u 8 rondas en cada partido, para que cada uno tenga la misma oportunidad de ser "cartero".

Consideraciones didácticas

Los denominadores de las fracciones en juego favorecen el trabajo con fracciones equivalentes, para realizar las sumas. Por otra parte, tener a la vista la recta numérica con las unidades divididas en octavos puede ayudar tanto a sumar fracciones como a compararlas y favorecer las representaciones mentales de fracciones equivalentes, lo que ayuda a construir el sentido de la suma de fracciones, en lugar de apoyarse en algoritmos que son fácilmente olvidados si se desconoce su origen.
Durante el juego, los alumnos tienen la oportunidad de utilizar y fundamentar (cuando se agregue explícitamente el pedido de hacerlo) estrategias para el cálculo mental de sumas de fracciones de distinto denominador. Además pondrán en juego procedimientos de comparación y ordenación.
Es importante que sean los alumnos los que controlen y analicen si las sumas y las comparaciones son correctas o no, debiendo el docente intervenir sólo en el caso de que ellos no se pongan de acuerdo.
Si las fracciones que aparecen en las cartas tienen distintos denominadores, tendrán que explorar
cómo operar. Podría pasar que, para sumar cartas, los alumnos vayan agrupando
mentalmente partes de la fracción. Por ejemplo, si alguien tiene las siguientes cartas: 3/4 y 5/8 puede descomponer los 5/8 en 2/8, que con el 3/4 completan el primer entero, y ver que le "sobran" 3/8 y diría que tiene "un entero y tres octavos".

Actividades complementarias:

Como primera actividad, y para permitir una familiarización con todo el mazo, se pueden colocar todas las cartas boca abajo mezcladas, en el centro de la mesa, y los alumnos, organizados en grupos de 4, por turno, deben levantar dos, mostrarlas, identificar el valor de cada una con uno de los puntos marcados en la recta numérica e indicar cuál es la mayor de ambas, registrando los resultados en sus cuadernos.
Luego se puede indicar que, en base a sus registros, sumen cada par extraído, identificando el valor de la suma en la recta numérica y registrándolo en el cuaderno.
En ambos casos se debe indicar que debe haber acuerdo en el grupo respecto de los resultados (pero no por "votación de la mayoría", como se suele llegar a acuerdos en otros asuntos, sino por alguna argumentación matemática, que puede basarse en el uso de alguna representación de los valores que consideren adecuada).
Es conveniente hacer una puesta en común luego de al menos 2 rondas, así cada alumno participa y pone en funcionamiento sus estrategias personales al menos dos veces.
Además de la actividad preliminar descripta, para un trabajo posterior se puede proponer el siguiente juego con lápiz y papel.

Variantes del juego:

• Trabajar con el apoyo de la recta numérica y asignarle un tope de tiempo a las respuestas, son variables que el docente evaluará cuándo incluir, ya que a partir de ellas variará el nivel de dificultad al que se enfrentan los alumnos.
• Para un segundo repertorio, se puede fabricar un segundo mazo, agregando cartas con sextos, tercios y doceavos. En este caso, para realizar las sumas deben recurrir muchas veces a la búsqueda de fracciones equivalentes con denominador 12.

BASTA NUMERICO CON FRACCIONES 2

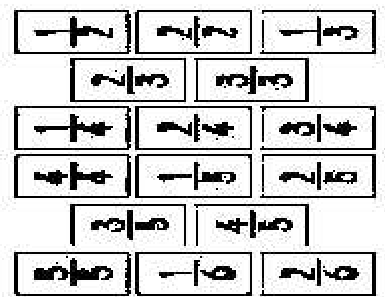
Reglas del juego

Uno de los alumnos del grupo elige al azar un número entre 1/2 y 1 1/2 de los que figuran en la recta numérica. Por el término de unos minutos, todos deben escribir sumas cuyo resultado sea ese número. Terminado el tiempo acordado (por ejemplo, se dan 5 minutos) los niños controlan las sumas y se asigna 1 punto por cada respuesta correcta no repetida y $\frac{1}{2}$ punto para cada uno si está repetida. Gana quien tiene mayor puntaje después de cuatro vueltas.

Variantes del juego:

• Versión con cartas del Basta numérico. Por turno, cada alumno va retirando del centro dos o más cartas que sumen el valor elegido hasta que se acaben todas, y van registrando por escrito cada extracción.

Cartas con fracciones



Con estas cartas se promueve que los alumnos operen fundamentalmente con la representación numérica recurriendo a la geométrica cuando la primera no resulte significativa.
Igual que con las cartas con fracciones en cuadrados, este material permite la realización de juegos en los que los alumnos comparan fracciones, las suman o las restan.

<u>GUERRA DE FRACCIONES</u>

Materiales:

• 48 cartas con las fracciones representadas en forma numérica en una cara y en forma gráfica en la otra

Organización del grupo:
• Se juega en grupos de 4 alumnos.

Reglas del juego:

Se mezclan y se reparten 12 cartas a cada jugador con la representación numérica hacia arriba, formando 4 pilas personales. Los 4 colocan a la vez en el centro, la carta superior de su pila.
El que tiene la carta de mayor valor se lleva las cuatro cartas y las coloca aparte en otra pila personal. Las cartas llevadas no se vuelven a usar.
Si hay dudas, se pueden dar vuelta las cartas y usar la comparación de los rectángulos pintados al dorso para constatar. Si hay empate se juega otra vuelta y el ganador se lleva las ocho cartas.
Gana quien al final del juego tiene más cartas.

Consideraciones didácticas:

Según la clasificación de fracciones que los alumnos estén manejando, se puede jugar con diferentes mazos, armados con algunas cartas seleccionadas entre las 48 del mazo. En tal caso, a cada jugador le tocarán menos cartas. Por ejemplo, con denominadores 2, 4 y 8, ó con 2, 3 y 6, ó con 2, 3, 4, 6 y 12.
El juego promueve la comparación de fracciones a partir de su representación numérica y, en una segunda instancia, de una representación geométrica, en este caso un rectángulo. Esta comparación permitirá reconocer fracciones equivalentes como expresiones de la misma cantidad.

Material para docentes:

También puede ser interesante, en un momento de reflexión, proponer la comparación de ambas representaciones con otras trabajadas anteriormente.
Se puede agregar la regla de que el que se lleva cartas debe anotar todas las cartas de la mano señalando la ganadora para tener un registro escrito utilizable para la puesta en común.
Es conveniente que el docente genere un espacio para recuperar las distintas estrategias de comparación desarrolladas por los alumnos durante el juego. Convendrá detenerse tanto en el orden en que se van comparando como en los elementos tenidos en cuenta para establecer la comparación: los numeradores, los denominadores, su diferencia, la parte del entero que representa cada
fracción, lo que le falta a cada una para completar la unidad, u otras que puedan surgir.

GUERRA CON CALCÚLOS

Se puede introducir la regla de que cada alumno dé vuelta dos cartas a la vez y las sume; y que se lleve todas el que obtenga la suma mayor. También, en forma análoga, se puede pedir que las reste y se lleve las cartas el que tenga la resta cuyo resultado sea el mayor o el menor.
Esto permitirá que los alumnos utilicen diferentes estrategias para sumar o restar fracciones y también para comparar los resultados. Podrán hacerlo comparando las representaciones geométrica o numérica de las fracciones que resultan en cada caso, o comparando las cartas una a una.
En caso de realizar la operación podrán utilizar o no equivalencias para obtener los resultados.
También en estos casos es conveniente solicitarles que registren por escrito los resultados obtenidos
en algunas de las rondas, para facilitar una posterior puesta en común.

PONER ORDEN

Modificar el juego inicial: cuando los cuatro jugadores dieron vuelta su carta, ordenarlas de mayor a menor, asignando puntos de 4 a 1, según ese orden. Gana el que obtiene más puntos.
En este caso no es necesario desempatar ya que puede haber jugadores con el mismo puntaje en esa ronda, si tenían tarjetas con fracciones equivalentes. Además, las cartas ya jugadas, pasan a un pozo común.
Este cambio involucra un proceso de comparación más complejo, ya que se deben comparar todas las cartas entre sí para establecer el orden entre ellas.

Actividades complementarias:

Se pueden proponer actividades que simulen rondas de los juegos en sus diversas variantes.
Se podrá pedir que, en situaciones de comparación, de suma o de resta, determinen tanto el ganador como las cartas componentes de una jugada.
Por ejemplo: a partir del dibujo de las cuatro cartas descubiertas en una partida donde se las lleva el que tiene la mayor, preguntar: “¿Hay un ganador o es necesario desempatar? Expliquen por qué.”.

O para la variante con suma o con resta, dibujar 4 pares de cartas y preguntar cuál es el ganador, o dado el ganador y las cartas de tres jugadores, pedir que escriban posibles pares de cartas correspondientes al cuarto jugador.
En cuanto a la variante de establecer un orden, se puede proponer completar una serie con distintas posibilidades dadas dos o tres de las cuatro cartas.

TARJETAS NUMERICAS

DESCUBRIENDO EQUIVALENTES

Materiales:

• Un juego de 42 fichas con distintas escrituras numéricas
• Lápiz y papel para anotar el puntaje

Organización del grupo: • Se juega entre 4 alumnos.

Reglas del juego:

Se colocan las fichas boca abajo, en un arreglo rectangular. Por turno, cada jugador levanta dos fichas, de manera que las vean los cuatro integrantes del grupo.
Si quien las levantó identifica que las dos fichas corresponden a distintas representaciones de un mismo número racional, lee en voz alta ambas tarjetas, y si todos acuerdan, se las lleva y se anota para sí ese número como puntaje. Si alguien no acuerda, se discute en el grupo para decidir quién tiene razón.
Si quien levantó las fichas decide que éstas no corresponden a representaciones del mismo número, las vuelve a colocar en el mismo lugar, boca abajo.
En ambos casos le toca el turno al compañero.
Cuando no quedan más fichas sobre la mesa, se suman los puntos que acumuló cada uno; después de controlar y acordar con el resultado, gana quien logró la mayor suma.

Consideraciones didácticas:

En este juego, los alumnos tienen la oportunidad de reconocer distintas representaciones numéricas de un mismo número racional y establecer equivalencias entre ellas.
La diversidad de representaciones pretende favorecer el establecimiento de relaciones entre ellas.
Los alumnos podrán poner en funcionamiento procedimientos de identificación de números racionales en diversas interpretaciones y de comparación entre los símbolos que componen cada escritura, por ejemplo:
50% 50 de cada 100 50/100 Otro ejemplo: 0,5 5 décimos 5/10
Es importante que, en caso de desacuerdo, los alumnos expongan sus posiciones y las justifiquen, y que sólo pidan la intervención del docente si agotada esta instancia no se llega a un acuerdo.

Actividades complementarias:

Se pueden simular partidas donde los jugadores tengan "visión de rayos X": el docente puede dibujar en el pizarrón algunas fichas del juego y proponer:
• asociarlas de a 2;
• dar una e indicar todas aquellas con las que se podría asociar;
• dar "pares levantados" para corregir si están bien o mal y por qué;
• inventar otras tarjetas posibles a partir de una del juego.

CONCLUSIÓN

Por la semejanza de estructura entre la matemática y el juego, es claro que existen muchos tipos de actividades y muchas actitudes fundamentales comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados con contenidos matemáticos, en muchos casos con claras ventajas de tipo psicológico y motivacional para el juego sobre los contenidos propiamente matemáticos.

Si la matemática y el juego, en su propia naturaleza, tienen tantos rasgos comunes, no es menos cierto que también participan de las mismas características en lo que respecta a su propia práctica.

Esto es especialmente interesante cuando nos preguntamos por los métodos más adecuados para transmitir a nuestros alumnos el profundo interés y el entusiasmo que las matemáticas pueden generar y para proporcionar una primera familiarización con los procesos usuales de la actividad matemática.

BIBLIOGRAFIA

Libros:

_ Holt, Michael; "Matemáticas recreativas 2"; Editorial Martínez Roca; España; 1996

-Bolt, Brian; "Más actividades matemáticas"; Editorial Cambridge University Press; 1989

_ Villella, José; "¡Piedra libre para la matemática!"; Editorial Aique; 1998

_ Bustos, Blanca; "Estrategias metodologicas interactivas y lúdicas en matemáticas"; Editorial Alianza; 2003

Internet:

_Davis, M.; "introducción a la teoría de los juegos" Alianza Editorial, la edición

_ William Poundstone: El dilema del prisionero, Alianza Editorial, 2005

_ http://divulgamat.ehu.es/juegos matemáticos

_ http://divulgamat.ehu.es/el paraíso de las matemáticas