Instituto Superior Fundación Suzuki
Diepregep 3882
Dirección General de Cultura y Educación

Matemática Lúdica

Jugando en Matemática

Tesina para optar el Profesorado de Matemática

Monzo, Carolina
San Miguel– Buenos Aires
Marzo - 2009

Índice:

“Los Juegos Matemáticos son una forma de poder llegar hacia la comprensión de los contenidos matemáticos”

El porque del titulo

He elegido Matemática Lúdica como titulo ya que el trabajo hace referencia a la inclusión de estos juegos en la matemática lo cual hace que los contenidos matemáticos puedan llegar a ser mejor comprendidos por los alumnos.

Resumen

Este trabajo de investigación contiene problemas de la antigua Grecia, con lo cual muestra la resolución matemática que realizaban en aquellos años. Se desarrolla el impacto de los juegos en la historia de la matemática y muestra teoremas fundamentados por sus autores.
Resalta las consecuencias para la didáctica de la matemática. Como así también la utilización de los juegos matemáticos en la enseñanza.
Hace referencia también en los pasos a seguir a la hora de resolver los juegos. Se nombra con ejemplos la utilización de la simetría, como así también la definición sobre juegos de rol. Se ejemplifican algunos de los temas desarrollados con los mismos juegos. Aparecen autores que dan técnicas de construcción para resolución de juegos matemáticos.
Y por ultimo contiene una conclusión personal en referencia a la experiencia en cuanto a la realización del trabajo.

<u>Abstract</u>

This investigation practice work is about ancient Greek problematic situations, where show the mathematics solution that they executed in this years B.C.
Carry out the impact of the games in the mathematics history and show fundamentals theorems by their authors.
Resalted out the consequences to the mathematics didactic so the utilization of the mathematics games in the education. This make reference in the way to resolve the mathematics games.
It's mention whit examples, the symmetry utilization and the definition about the game role.
In this practice work it specify some developed subject whit mathematics games, appear authors whose give developed technique to the resolution to this games.
Finally contain a personal conclusion in reference to the experience obtain during the realization of the this work.

Descriptores

- **Juegos Matemáticos.**
- **Proceso de enseñanza – Aprendizaje.**
- **Juegos en el Aula.**
- **Didáctica Elemental.**

Introducción

Lo que me llevo a la elección de este tema es mi interés en relación al desafío de llevar los juegos matemáticos al aula. Me parece importante investigar lo didáctico que pueden resultar los juegos a la hora de enseñar.

Fundamentación

El siguiente trabajo de investigación fue confeccionado con el fin de utilizar los juegos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que sirven como herramienta Didáctica. Es un elemento de importancia, sirven de aplicación a la hora de resolver las distintas problemáticas que pudieren surgir en la vida cotidiana.

El juego, en general, es fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje: a la hora de aprender, la calidad con que una persona aprende algo se basa en la utilidad práctica que le encuentre a dicho conocimiento. El juego permite acceder al conocimiento de forma significativa, pues convierte en relevantes, informaciones que serían absurdas de otra manera.

Cálculo mental, aprendizaje de accidentes geográficos y nombres, adquisición de soltura a la hora de esquematizar y tomar notas... Otro gran aporte de estos juegos en beneficio del desarrollo educativo, es la promoción de la lectura como medio lúdico y recreativo, lo que a la larga favorece la creación de hábitos que ayudan a superar muchas de las dificultades que surgen en los estudios como consecuencia de una deficiente lectura comprensiva, por falta de motivación. Otro aspecto que ayuda a desarrollar los juegos de rol es la adquisición de una gran riqueza expresiva. Con estos juegos se desarrolla una gran riqueza de vocabulario, otro del gran déficit que suele ser origen del fracaso escolar. Los juegos de rol también estimulan el potencial creativo e imaginativo de la persona, además de hacer trabajar el razonamiento y la lógica durante el transcurso de las aventuras al enfrentar nuevos panoramas, retos y confrontaciones e intentar solucionarlos.

<u>Supuestos y limitaciones</u>

- **Suponemos que es posible encontrar el método de llevar los juegos matemáticos al aula.**

- **Suponemos que la utilización de los juegos por parte de los alumnos va a beneficiarlos a la hora de comprender los contenidos matemáticos.**

- **Suponemos que al utilizar los juegos matemáticos como recurso didáctico dentro del aula vamos a generar un mayor entusiasmo, y va a resultar esto una actividad lúdica diferente a lo convencional.**

- **La heteregoneidad del grupo puede limitar la comprensión del juego matemático.**

- **Esta propuesta de Matemática Lúdica no siempre podrá ser comprendida por el alumno.**

Marco Histórico

Historia de los juegos matemáticos

Papiro Rhind y los Tres Problemas Clásicos Griegos

Desde los tiempos más antiguos, los juegos se han visto unidos a la historia de las matemáticas. No es un capricho del destino que los matemáticos de todas las épocas hayan mostrado interés por estos juegos por dos razones principales. Por una parte, muchos tienen un contenido inspirador que propiciado el estudio y desarrollo de diferentes áreas de esta ciencia; y de otro lado, nos encontramos con el carácter lúdico de las matemáticas que se ve perfectamente complementado con el juego.

Es fácil comprobar como la inmensa mayoría de las partes de la matemática aparecen en distintos juegos:

- La aritmética está inmersa en los cuadrados mágicos, cambios de monedas,...

- La teoría elemental de números es la base de muchos juegos de adivinación fundamentados en criterios de divisibilidad, aparece en juegos que implican diferentes sistemas de numeración,...

- La combinatoria es la pieza clave de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una empresa. Muchos de ellos sin resolver aún, como el problema del viajante.

- El álgebra es la base de muchos acertijos a cerca de edades, medidas.

- La teoría de grupos es un instrumento de vital importancia para analizar determinados juegos con fichas en un tablero en los que, al igual que las damas, se eliminan fichas al realizar movimientos.

Comencemos ahora un breve recorrido por los distintos juegos matemáticos que han ido apareciendo a lo largo de la historia de la humanidad.

El 'papiro de Rhind' o de 'Ahmes' (obra de la civilización egipcia), encontrado en un antiguo edificio de Tebas, data del año 1850 A.C. Se trata de un escrito que nos muestra las matemáticas de la época. En él aparece una recopilación de varios problemas cuya resolución se realiza principalmente a través de métodos basados en prueba y error. Con él se muestra como en las matemáticas de aquella civilización ya aparecían los juegos a modo de acertijos.

La siguiente parada en nuestro paseo por la historia, son los tres problemas clásicos de Grecia: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. Los astutos cretenses se planteaban la construcción de estas tres figuras solamente empleando la regla y el compás.

La cuadratura del círculo, que por primera vez se planteó Anaxágoras consiste en fabricar un cuadrado de idéntica área a la de un círculo dado.

Hicieron falta más de dos mil años para que Ferdinand Lindeman (1852-1939) demostrara que era imposible tal construcción con regla sin marcas y compás, pues pi es un número trascendente.

La duplicación del cubo, reside en construir el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen de un cubo inicial dado. Es decir, dado un cubo de arista a y volumen V, hallar la arista de un cubo de volumen 2V.

Tuvieron que pasar muchos siglos para poder probar que este problema no tenía solución en la forma que lo planteaban los griegos. Y la razón se reduce a que si empleamos coordenadas cartesianas este problema consiste en calcular $x^3 = 2$.

El geómetra francés L. Wantzel se encargo en 1837 de demostrar en uno de sus trabajos que esta hazaña era imposible con la simple utilización de estos dos elementos.

La trisección del ángulo, este fue el tercer problema griego. La labor consistía en trisectar un ángulo solo con regla (no graduada) y compás.

Los propios griegos sabían que para ciertos ángulos, con unas características específicas, esto era posible. Pero en general, este problema, al igual que los dos anteriores, no tiene solución en esas condiciones. Fue el matemático francés Pierre Wantzel (1814-1848) quien probó formalmente que un ángulo w es trisecable con regla y compás si el polinomio $4x^3 - 3x - \cos(w)$ es reducible.

Del mismo modo, fue también P.L. Wantzel quien en 1837 publicó por primera vez, en una revista de matemáticas francesa, la primera prueba rigurosa sobre la imposibilidad de trisectar el ángulo con regla y compás. Aun así, sigue habiendo matemáticos que rechazan esta prueba y continúan investigando, creyendo haber llegado muchas veces a la solución del problema.

El Acertijo del Ganado

El Acertijo del Ganado, también llamado Problema Bovinum, que se enuncia de la siguiente manera:

'El dios del Sol poseía una manada de ganado que estaba compuesta por toros y vacas, de los cuales la primera parte eran blancos, la segunda eran negros, la tercera moteados y, por último, la cuarta parte eran marrones. Entre los toros, el número de blancos era un medio y un tercio del número de negros más que del de marrones; el número de negros, era un cuarto y un quinto de los moteados superior al de marrones; el número de moteados, un sexto y un séptimo del conjunto de blancos más que de los marrones. Entre las vacas, el número de blancas era la tercera parte y un cuarto del ganado negro total; el número de negras, un cuarto más un quinto de la totalidad del ganado moteado; la cantidad de vacas moteadas era un quinto y un sexto del ganado marrón al completo; las marrones, un sexto más un séptimo del conjunto de ganado blanco. ¿Cómo estaba compuesta de la manada?'

La solución consiste en resolver las ecuaciones simultáneas de Diophantine en las siguientes variables enteras:

W: número de toros blancos.
X: número de toros negros.
Y: número de toros moteados.
Z: número de toros marrones.
W: número de vacas blancas.
X: número de vacas negras.
Y: número de vacas moteadas.
Z: número de vacas marrones.

De manera que el ganado total sería la nada despreciable cantidad de 50389082 toros y vacas.

También se puede plantear una versión más complicada del problema que consiste en añadir dos restricciones. De manera que exigiremos que W + X sea un número cuadrado y que Y + Z sea un número triangular.

El primero en conseguir las soluciones a este problema fue Williams en 1965 obteniendo unos números con 206544 ó 206545 dígitos. Para estos cálculos fueron necesarias siete horas y cuarenta y nueve minutos. Y en los años1980 – 1981, Nelson publicó en cuarenta y siete páginas el contenido de la memoria del ordenador 'CRAY 1' con los 206545 dígitos de la solución.

Además de obtenerse la solución más pequeña, fueron encontrados cinco resultados adicionales llegando a superarse la cantidad de un millón de dígitos (Rorres). Y recientemente, Vardi (1998) desarrolló fórmulas explícitas y sencillas que permitían dar solución al Acertijo del Ganado.

Marco Teórico

¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas.

El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. Las diferentes partes de la matemática tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos en el campo. Cuando la teoría es elemental, estos no son muchos ni muy complicados y se adquieren bien pronto, lo cual no quiere decir que el juego sea trivial. Elemental quiere decir cerca de los elementos iniciales y no necesariamente simple. Existen problemas elementales desproporcionadamente complicados con respecto a su enunciado. Un ejemplo lo constituye el problema de averiguar el mínimo de las figuras en las que una aguja unitaria puede ser invertida en el plano por movimientos continuos. Cuando la teoría no es elemental es generalmente porque las reglas usuales del juego se han desarrollado extraordinariamente en número y en complejidad y es necesario un intenso esfuerzo para hacerse con ellas y emplearlas adecuadamente. Son herramientas muy poderosas que se han ido elaborando, cada vez más sofisticadas, a lo largo de los siglos. Tal es, por ejemplo, la teoría de la medida e integral de Lebesgue en el análisis superior.

La matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema.

Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y matemática, que a veces los hace indiscernibles, hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos matemática profundamente seria.

Impacto de los juegos en la historia de la matemática.

La historia antigua no ha sido inclinada a preservar sino los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El llamado problema bovino de Arquímedes, álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. Euclides fue, al parecer, no sólo el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada Pseudaria (Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía.

En la Edad Media Leonardo de Pisa (ca.1170-ca.1250), mejor conocido hoy y entonces como Fibonaccí, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus contemporáneos hasta el punto de ser proclamado oficialmente por el emperador Federico II como Stupor Mundí.

En la Edad Moderna Geronimo Cardano (1501-1576), el mejor matemático de su tiempo, escribió el Líber de ludo aleae, un libro sobre juegos de azar, con el que se anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad. En su tiempo, como tomando parte en este espíritu lúdico, los duelos medievales a base de lanza y escudo dieron paso a los duelos intelectuales consistentes en resolver ecuaciones algebraicas cada vez más difíciles, con la participación masiva, y más o menos deportiva, de la población estudiantil, de Cardano mismo y otros contendientes famosos como Tartaglia y Ferrari.

El famoso problema del Caballero de Meré, consistente en saber cómo deben ser las apuestas de dos jugadores que, habiendo de alcanzar n puntos con sus dados, uno ha obtenido p y el otro q puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gobaud, Caballero de Meré (1610-1685) a Pascal (1623-1662). De la correspondencia entre éste y Fermat (1601-1665) a propósito del problema surgió la moderna teoría de la probabilidad.

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: "Nunca son los hobres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente", escribía en una carta en 1715. Y en particular comenta en otra carta en 1716 lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta el jugarlo al revés.

En 1735, Euler (1707-1783), oyó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano). Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y con ella de la topología general.

También el espíritu matemático de la época de Euler participaba fuertemente del ánimo competitivo de la época de Cardano. Johann Bernoulli (1667-1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Jakod Bernoulli (creador, precisamente con su solución al problema, del cálculo de variaciones) Leibniz, Newton y Huygens.

Se cuenta que Hamilton (1805-1865) sólo recibió dinero directamente por una de sus publicaciones y ésta consistió precisamente en un juego matemático que comercializó con el nombre de Viaje por el Mundo. Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular, las ciudades de ese mundo, un viaje que no repitiese visitas a ciudades circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Esto ha dado lugar a un problema interesante en teoría de grafos que admiten un camino hamiltoniano.

Los biógrafos de Gauss (1777-1855) cuentan que el Princeps Mathematicorum era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.

Hilbert (1862-1943) uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

John von Neumann (1903-1957), otro de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, escribió con Oskar Morgenstern en 1944 un libro titulado Teoría de Juegos y Conducta Económica. En él analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de minimax, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico.

Según cuenta Martin Gardner, Albert Einstein (1879-1955), tenía toda una estantería de su biblioteca particular dedicada a libros sobre juegos matemáticos.

Matemáticas con sabor a juego.

Resulta fácil señalar problemas y resultados profundos de la matemática que rezuman sabor a juego. Citaré unos pocos entresacados de la matemática más o menos contemporánea.

El teorema de Ramsey, en su forma más elemental, afirma que si tenemos 6 puntos sobre una circunferencia, los unimos dos a dos, y coloreamos arbitrariamente los segmentos que resultan de rojo o de verde, entonces necesariamente hay al final un triángulo con tales segmentos por los lados que tiene sus tres lados del mismo color.

El lema de Sperner, importante en la teoría del punto fijo, afirma que si en un triángulo ABC se efectúa una triangulación (Una partición en un número finito de triángulos tales que cada dos de ellos tienen en común un lado, un vértice, o nada) y se nombran los vértices de los triángulos de la triangulación con A, B, C, de modo que en el lado AB no haya más que las letras A ó B, en el AC nada más que A ó C y en BC nada más que B ó C, entonces necesariamente hay un triángulo de la triangulación que se llama ABC.

El teorema de Helly afirma que si en un plano hay un número cualquiera de conjuntos convexos y compactos tales que cada tres tienen un punto en común, entonces todos ellos tienen al menos un punto en común.

El problema de Lebesgue, aún sin resolver, pregunta por el mínimo del área de aquellas figuras capaces de cubrir cualquier conjunto del plano de diámetro menor o igual que 1.

El siguiente problema de la aguja en un convexo tridimensional está también aún abierto: ¿Cuál es el cuerpo convexo de volumen mínimo capaz de albergar una aguja de longitud 1 paralela a cada direción dada? Se sospecha, por analogía con el caso bidimensional, que es el tetraedro regular de altura 1, pero no hay demostración de ello.

Consecuencias para la didáctica de la matemática.

La matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumento matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la matemática. Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas, ni tediosas. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos, permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse, no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le plantea de modo natural. Por eso muchas de sus cuestiones espontáneas le estimulan a crear instrumentos sutiles cuya adquisición no es tarea liviana. Sin embargo, es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante. De hecho, como veremos, han sido numerosos los intentos de presentar

sistemáticamente los principios matemáticos que rigen muchos de los juegos de todas las épocas, a fin de poner más en claro las conexiones entre juegos y matemáticas. Desafortunadamente para el desarrollo científico en nuestro país, la aportación española en este campo ha sido casi nula. Nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes.

UTILIZACION DE LOS JUEGOS EN LA ENSEÑANZA.

Los juegos tienen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión. Para eso se han hecho y ese es el cometido básico que desempeñan. Por eso es natural que haya mucho receloso de su empleo en la enseñanza. "El alumno, -piensa-, se queda con el pasatiempo que, eso sí, le puede comer el coco totalmente y se olvida de todo lo demás. Para lo que se pretende, es una miserable pérdida de tiempo".

En cambio, ese mismo elemento de pasatiempo y diversión que el juego tiene esencialmente, debería ser un motivo más para utilizarlo generosamente. ¿Por qué no paliar la mortal seriedad de muchas de nuestras clases con una sonrisa? Si cada día ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el rollo cotidiano, un elemento de diversión, incluso aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra enseñanza, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían favorablemente.

Pero es que además sucede que, por algunas de las razones apuntadas antes, relativas a la semejanza de estructura del juego mismo y de la matemática, avaladas por la historia misma de la matemática y de los juegos, y por otras razones que señalaré a continuación, el juego bien escogido y bien explotado puede ser un elemento auxiliar de gran eficacia para lograr algunos de los objetivos de nuestra enseñanza más eficazmente.

El objetivo primordial de la enseñanza básica y media no consiste en embutir en la mente del niño un amasijo de información que, pensamos, le va a ser muy necesaria como ciudadano en nuestra sociedad. El objetivo fundamental consiste en ayudarle a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso. Y para ello nuestro instrumento principal debe consistir en el estímulo de su propia acción, colocándole en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las actitudes básicas más características que se pretende transmitir con el cultivo de cada materia.

Por la semejanza de estructura entre el juego y la matemática, es claro que existen muchos tipos de actividad y muchas actitudes fundamentales comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados tan bien o mejor que escogiendo contenidos matemáticos de apariencia más seria, en muchos casos con claras ventajas de tipo psicológico y motivacional para el juego sobre los contenidos propiamente matemáticos.

Es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática, disfrutan intensamente con puzzles y juegos cuya estructura en poco difiere de la matemática. Existen en ellas claros bloqueos psicológicos que nublan su mente en cuanto se percatan de que una cuestión que se les propone, mucho más sencilla tal vez que el juego que practican, tiene que ver con el teorema de Pitágoras. Estos bloqueos son causados muy frecuentemente en la niñez, donde a absurdas preguntas iniciales totalmente inmotivadas seguían respuestas aparentemente inconexas que hacían de la matemática una madeja inextricable cada vez más absurda y complicada.

Bien se puede pensar que muchas de estas personas, adecuadamente motivadas desde un principio, tal vez a través de esos mismos elementos lúdicos que están descargados del peso psicológico y de la seriedad temible de la matemática oficial, se mostrarían, ante la ciencia en general y ante la matemática misma en particular, tan inteligentes como corresponde al éxito de su actividad en otros campos diferentes.

Es claro que no todos los juegos que se encuentran en los libros de recreaciones matemáticas se prestan igualmente al aprovechamiento didáctico. Muchos son meras charadas y acertijos ingeniosos. Muchos otros se basan en la confusión intencionada del enunciado al modo de los oráculos sibilinos y dejan al final una impresión de mera tomadura de pelo. En otros casos la solución de la impresión de haber llegado por revelación divina que no cabe fácilmente en un esquema de pensamiento que pueda conducir a un método. Pero, como veremos, hay juegos que, de forma natural, resultan asquibles a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos y que encierran lecciones profundamente valiosas.

Es se presentan a continuación dos esquemas de posible utilización de los juegos en la enseñanza. El primero consiste en un ensayo de desarrollo heurístico a través de los juegos. Se pone de manifiesto cómo lo que, constituye la savia de las matemáticas y la manera más efectiva de acercamiento a ellas desde el punto de vista didáctico, la resolución de problemas, puede aprovecharse de la actividad con juegos bien escogidos. El segundo esquema presenta, a través de un listado de temas, actitudes y actividades matemáticas, cómo los juegos pueden utilizarse para motivar, enriquecer e iluminar la ocupación con ellas.

Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y

no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en el que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas. Muchos de estos elementos pueden adquirirse igualmente en el enfrentamiento con los problemas que constituyen los juegos matemáticos.

El objetivo del siguiente esquema consiste simplemente en tratar de poner bien patente la semejanza de actitudes que se dan en la resolución de un puzzle o un juego y en la de un genuino problema matemático, y cómo, efectivamente, muchos de los hábitos adecuados para la tarea matemática podría no adquirirlos igualmente bien divirtiéndose con ejemplos escogidos de juegos. La elaboración de un curso completo de heurística en esta dirección sería un trabajo bien interesante que requeriría una inmersión a fondo en la abundante literatura existente a fin de analizar los juegos más apropiados para cada aspecto y para comprobar el rendimiento efectivo de esta actividad. A continuación se presentan ejemplos a fin de evitar introducciones que nos llevarían mucho tiempo.

Directrices heurísticas basadas en juegos.

¿COMO RESOLVERLO?

1) ANTES DE HACER TRATARÉ DE ENTENDER. No pienses que es una observación del todo tonta. La experiencia dice que son muchos los que se lanzan a hacer cosas a lo loco, por si alguna da en el blanco por casualidad.

¿Sabes bien de qué va?
¿Cómo funcionan las diferentes partes del juego? Estúdialas una a una: forma del tablero, reglas, funcionamiento de las fichas...
Hazte una o varias figuras si te parece que te va bien.
Juega un poco con las fichas o las partes del juego según las reglas para familiarizarte con su forma de actuar.

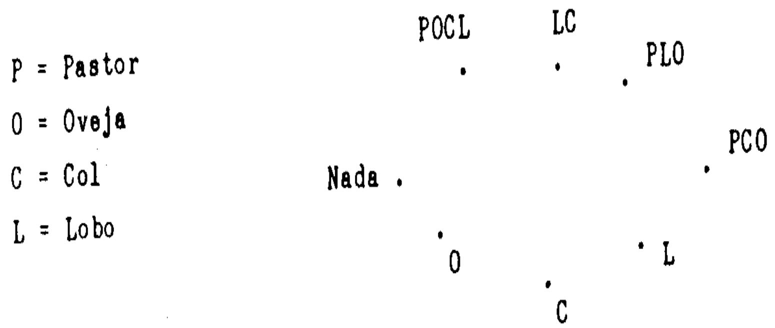
<u>2) TRAMARÉ UNA ESTRATEGIA</u>. Busca conexiones con otros elementos que conozcas. Tal vez necesitarás construirte un juego auxiliar más simple que puedas resolver.
Al final de esta etapa deberías construirte un plan de ataque concreto. Aquí tienes algunas observaciones y preguntas que te pueden ayudar en esta tarea.
<u>Ya me lo sé.</u> ¿Lo has visto antes? ¿Lo has visto en forma parecida al menos?
<u>No me lo sé, pero conozco uno que...</u> ¿Conoces algún juego semejante, relacionado con éste de alguna manera? ¿Sabes algo del otro que pueda ayudarte en éste?
<u>¿Cómo marchaba aquél?</u> Tienes un juego semejante en el que sabes cómo actuar. ¿Puedes usar la misma forma de proceder? ¿Puedes usar la misma idea que conduce allí a la solución? ¿Deberías introducir en éste alguna modificación que lo haga más semejante a aquél?
<u>Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil.</u> ¿Puedes resolver al menos parte del juego? ¿Lo puedes hacer en circunstancias especiales, suponiendo por ejemplo que hubieras conseguido superar una etapa inicial? Supón que se te pide un poco menos, ¿puedes entonces?
<u>Supongamos el problema resuelto...</u> ¿Puedes tratar de recorrerlo hacia atrás? ¿Puedes pensar desde aquí en alguna pista?
<u>Si hago esto, entonces queda así... A ver si puedo transformar el juego en otro más sencillo</u>. Introduce tú mismo modificaciones en las reglas, en las condiciones... tratando de sacar alguna luz de estas modificaciones.
<u>Me hago un esquema, me lo pinto en colores, me escribo una ecuación...</u> Procura, por todos los medios a tu alcance tener un buen esquema de los puntos principales en la mente.
<u>Veamos de nuevo... ¿Para qué son así las reglas? ¿Cuál es la mala (o buena) idea detrás de ellas?</u> Fíjate de nuevo en la estructura del juego. Trata de encontrar pistas en la diferente función de las partes.

<u>3) MIRARÉ SI MI ESTRATEGIA ME LLEVA AL FINAL.</u> Trata de poner en práctica tus planes.
<u>Ya tengo una idea. Vamos a ver si marcha.</u> Lleva adelante tu estrategia con decisión. No te arrugues fácilmente. Si tienes varias ideas, pruébalas una a una, por orden. No las mezcles en un principio sin ton ni son.
<u>No nos liemos... Probaré otra cosa.</u> No te emperres demasiado en una sola estrategia. Si te lleva a una situación muy complicada, vuelve al paso segundo y busca otra estrategia. Probablemente hay otro modo más sencillo.
<u>Lo conseguí... ¿Por casualidad?</u> Si te va bien con tu estrategia, estúdiala detenidamente para convencerte de que no es por casualidad.

<u>4) SACARÉ JUGO AL JUEGO</u>. No consideres que ya hayas terminado del todo cuando lo has resuelto. Míralo a fondo. Aprovecha tu solución para asimilar bien la experiencia.
<u>No sólo sé que va, sino que veo por qué va</u>. Trata de localizar la razón profunda del éxito de tu estrategia.
<u>Con los ojos cerrados</u>. Mira a ver si con la luz que ya tienes encuentras otra estrategia, otra solución más simple.
<u>Ahora veo la astucia de las reglas</u>. Trata de entender, a la luz de tu solución, qué lugar ocupan las condiciones y reglas del juego.
<u>Además con esto gano a aquel otro juego.</u> Mira si otros juegos semejantes funcionan también con el mismo principio que has encontrado.
<u>Me hago otro juego... y lo patento</u>. Constrúyete un juego semejante al que has resuelto modificando sus piezas o sus reglas y mira si tu principio vale aquí también.

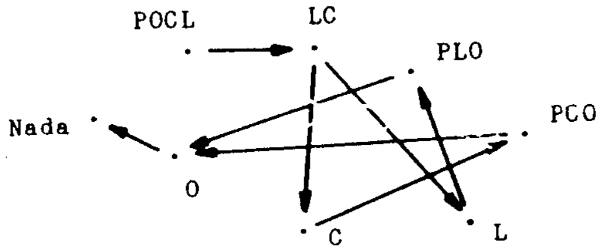
A continuación se ilustra algunas de las observaciones anteriores con juegos concretos.

<u>¿Cómo marchaba aquél?</u>
Un pastor, con una col, una oveja y un lobo (se supone que hasta cierto punto amaestrado) se encuentra a la orilla de un río que quiere atravesar. Hay en su orilla una barca en la que cabe él y una sola de sus pertenencias al tiempo. ¿Cómo se las ingeniará para pasarlas todas? Si deja solas a un lado oveja y col, ésta será liquidada rápidamente por la oveja. Si deja oveja y lobo solos a un lado, el lobo se zampará a la oveja. En cambio al lobo no le atrae nada la col y bien se puede quedar solo con ella.
El problema es clásico y fácil de resolver sin grandes esfuerzos sistemáticos. Pero existe una solución sencilla acudiendo, como sucede en muchas ocasiones en que se trata de realizar secuencialmente un conjunto de tareas, a la teoría de grafos.
Apuntamos las posibles situaciones de las pertenencias del pastor en la orilla inicial I sin que le desaparezca nada. Así



A continuación señalamos con una flecha los posibles pasos de una situación a otra según la regla del juego, es decir que en la barce sólo pueden cruzar el pastor y una sola de sus pertenencias. Así se obtiene el

grafo que sigue.

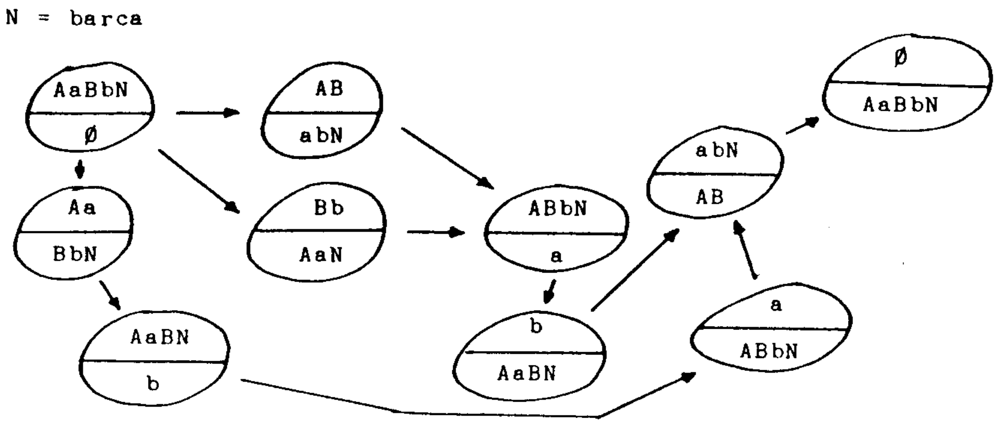


Nuestro problema ahora consiste en hallar un camino de flechas desde POCL hasta Nada. En el cuadro es evidente que hay solamente dos posibilidades

(1) POCL - LC - L - PLO - O - Nada
(2) POCL - LC - C - PCO - O - Nada

La interpretación de las operaciones que el pastor ha de hacer es clara.

Cualquiera que haya visto esta solución y se enfrente ahora con el también clásico problema de los dos maridos celosos, tendrá muy claro cómo debe de proceder. El problema consiste en resolver la dificultad con que se encuentran dos maridos A, B que llegan con sus respectivas esposas a, b a la orilla de u río que quieren cruzar. Hay una barca en la que solo caben dos personas al tiempo. El problema sería más fácil si no fuera porque los dos maridos son tan celosos que no pueden sufrir que la esposa esté ni un momento en compañía de otro hombre sin estar él delante. ¿Cómo podrán arreglárselas?
Escribimos como antes las distintas situaciones posibles y unimos con una flecha aquellas que son alcanzables desde otras según las reglas.
Así

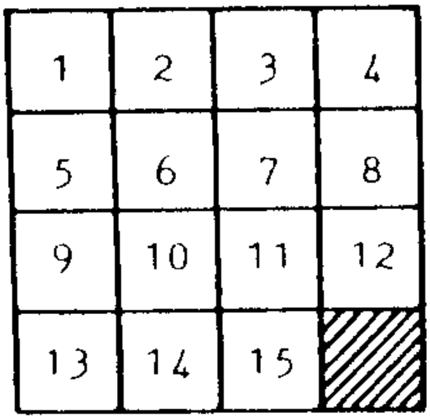


De esta forma no sólo podemos encontrar una solución, sino que podemos obtenerlas todas y escoger la mejor, si es que hay alguna mejor.

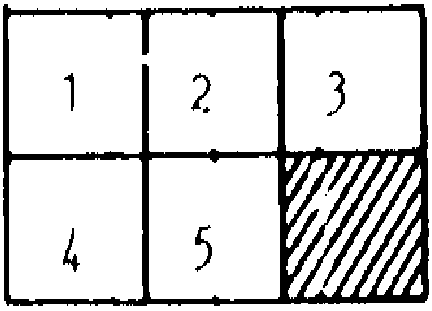
<u>Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil.</u>
En un tablero de ajedrez se tapan dos cuadros de los extremos de una

diagonal. Quedan 62 cuadros. Se tienen 31 fichas de dominó o de papel, cada una capaz de cubrir dos cuadros contiguos. Se pide colocar, si se puede, las fichas de dominó de modo que cubran exactamente los 62 cuadros del tablero.
Si empezamos por colocar fichas al buen tuntún, sin pensar un poco antes, pronto nos encontraremos en un buen lío, porque aquí se puede efectivamente empezar a hacer cosas sin sistema y llegar bastante lejos cubriendo el tablero. Pero nuestros intentos sucesivos van fracasando y aconsejándonos que recapacitemos...
El tablero es grande, hay muchas posibilidades. ¿Y si nos construimos uno más modesto e intentamos allí un problema semejante? Tal vez el tablero 2x2, 3x3, 4x4,... En el tablero 2x2 pronto nos damos cuenta de que lo que se pide es imposible sin partir en dos una ficha. Los dos cuadros que quedan están en una diagonal y no hay forma de cubrirlos con una ficha de dominó. En el tablero 3x3 el juego no tiene sentido, pues si se cubren 2 cuadros, quedan 7 que no pueden ser cubiertos ni con tres fichas ni con cuatro exactamente. En el tablero 4x4 no existe este problema, pero la experiencia del tablero 2x2 nos puede hacer pensar en la imposibilidad aquí también... ¡Sí! En el de 4x4 se quitan dos cuadros de una diagonal, dos cuadros por tanto del mismo color, como sucedía en el de 2x2. Quedan 8 cuadros de un color y 6 del otro. Pero una ficha de dominó bien colocada cubre necesariamente un cuadro blanco y otro negro... Así es imposible cubrir el tablero. Y esto mismo sucede en el caso 8x8, 10x10,.. Además esto va a suceder siempre que quitemos dos cuadros del mismo color.

Este principio de <u>empezar por lo fácil</u> es de amplia aplicación. Las dificultades provienen a menudo de la complejidad de la estructura que nos encubre los rasgos básicos. Estos quedan muy a menudo más claros en un problema semejante más sencillo. Descubierto aquí el principio, éste puede ser aplicado al caso más complicado. La dificultad puede consistir en encontrar un problema más sencillo que el propuesto que, con todo, conserve sus rasgos fundamentales.
Otras veces la solución del problema sencillo es útil, no sólo porque revele un principio que puede ser utilizado para el problema original, sino porque constituye una parte, un escalón en el que nos podemos apoyar para resolver el problema inicial.
En el conocido problema de los 15 se tiene un cuadrado 4x4 en el que se pueden deslizar 15 cuadraditos 1x1 numerados del 1 al 15 utilizando el hueco restante. Se presenta el cuadrado con los números desordenados. Se pide colocarlos en orden con el hueco en la esquina del SE, es decir

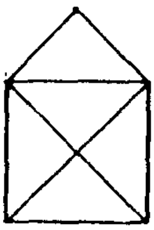


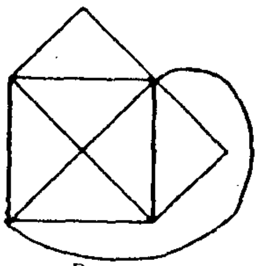
Al acudir a un problema más sencillo, por ejemplo un cuadrado 2x2 con tres cuadraditos 1x1, se puede uno percatar fácilmente de que el problema propuesto es a veces insoluble y trivial cuando es soluble. Si acudimos al problema semejante de un rectángulo 3x2 con cinco piezas



Podemos encontrar fácilmente una estrategia para resolver aquí cualquier problema soluble. Resuelto este problema ya tenemos una estrategia para el original de los 15, observando que en tablero de los 15 podemos dejar fijas todas las fichas excepto las de un rectángulo 3x2 o 2x3 en el que colocamos el hueco y con esta flexibilidad resolvemos fácilmente cualquier problema soluble. ¿Sabrías determinar cuáles son los problemas solubles y los insolubles?

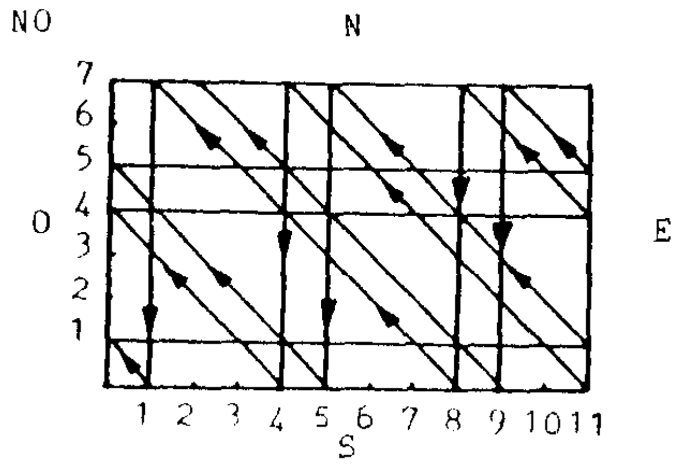
<u>Supongamos el problema resuelto.</u>
Se dan las siguientes figuras A y B


A


B

¿Puedes trazarlas sin levantar el lápiz del papel, sin repetir dos líneas y saliendo y terminando en un mismo vértice?
Las dos figuras se pueden trazar sin levantar el lápiz del papel, pero A parece resistirse más a un camino que termina en el punto de partida. ¿Por qué? Supongamos que en A hubiese tal camino, es decir, supongamos el problema resuelto. Entonces, cada vez que llegamos a un vértice de paso en nuestro camino (no inicial ni final), salimos de él por una línea distinta no recorrida antes. Así cada vértice de paso tiene que tener un número par de arcos que concurren en él. También en el vértice de salida tienen que concurrir un número par de arcos, el arco de salida, el arco de llegada y el número par de arcos correspondientes a los pasos por él. Como A tiene los dos vértices de abajo con tres líneas concurrentes en cada una de ellos, el trazado pedido es imposible.

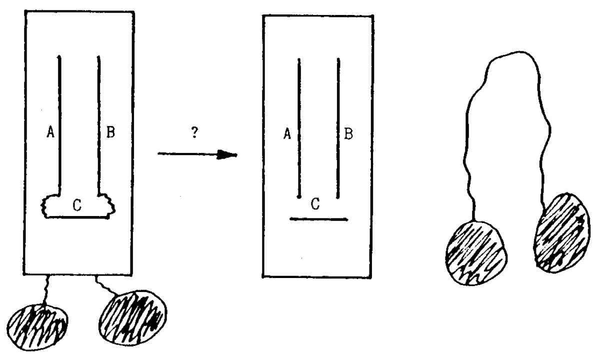
Me hago un esquema, me lo pinto en colores, me escribo una ecuación....
Una forma adecuada de representación de un juego puede dar un método para resolverlo y para resolver al tiempo muchos otros semejantes.
De entre los problemas clásicos de Bachet, tal vez los más conocidos son los relativos a medidas. Consideremos el siguiente: Se tienen junto a una fuente una medida de 7 litros y otra de 11. Pero nosotros necesitamos medir exactamente dos litros. ¿Cómo?
Existe una representación gráfica muy útil en los problemas de este tipo.



Las coordenadas horizontales indican la situación del recipiente de 11 litros. Las verticales la situación del de 7 litros. Las flechas horizontales hacia el E indican que se va llenando el recipiente de 11 litros, las oblicuas hacia el NO indican que del de 11 litros se va trasvasando al de 7 litros. Las flechas verticales hacia el S indican que el de 7 se vacía de lo que contiene.
La sucesión de operaciones queda bien clara por el diagrama siguiendo las flechas desde la esquina SE hasta el momento en que llegamos al otro punto gordo de la figura (el de 11 conteniendo 2 litros):
Se llena el de 11 (punto gordo de salida) y se pasa todo lo que se puede al de 7 (línea NO). Se vacía el de 7 (linea hacia S). Se echan los 4 que hay en

el de 11 en el de 7 (línea NO). Se llena el de 11 (línea hacia E). Se trasvasa del de 11 al de 7, que contenía 4 (línea NO), quedando 8 en el de 11...
Ya hemos visto también cómo los problemas clásicos sobre cruces pueden tratarse con una gráfica adecuada. También los problemas sobre pesas admiten un tratamiento semejante.

<u>Veamos de nuevo... ¿Para qué son las reglas así? ¿Cuál es la mala o buena idea detrás de ellas?</u>
Escribe, sin que yo lo vea, un número de tres cifras ABC. Repítelas y forma el número de 6 cifras abcabc. Divídelo por 7. Divide el resultado por abc. Divide el resultado por 11. Lo que te resulta es 13.
Si alguien te hace el jueguecito y no lo conoces, te deja un poco perplejo. Para salir de tu sorpresa, sigue la receta de arriba. El número abcabc se puede dividir por 7, por 11, por 13, es decir por 7x11x13=1001. Además abcabc es divisible por abc... ¿Quién es abcabc? ¿Qué tiene que ver con el número 1001?... Fácil: abcabc=abcx1001+abc= abcx1001. Ahora sí que está clara la cosa. ¿Podrías inventar un juego parecido con el mismo principio?
Muchos de los puzzles de alambres y cuerdas llevan en su misma estructura la pista adecuada para dar con la solución. Por ejemplo el siguiente de las guindas:



Las dos cuerdas están unidas por una cuerda. El rectángulo es de papel con los tres cortes indicados A, B, C. Las guindas son muy grandes para pasar por C sin romper el papel. ¿Cómo separar las guindas del papel?

<u>No sólo sé que va, sino que veo por qué va.</u>
El juego de Nim consiste en lo siguiente. Se ponen tres montones de piedrecillas, uno con 3, otro con 4, otro con 5. Juegan dos jugadores A y B. El primero en jugar, A, puede quitar tantas piedras como quiera (siempre una o más) de uno sólo de los tres montones. Luego juega B del mismo modo. Gana quien se lleve la última piedra.
Tal vez te haya contado alguien la estrategia infalible que tiene A. Se ponen en sistema binario los números de piedras de cada montón. Al empezar estos son

3------------ 1 1
4------------ 1 0 0
5------------ 1 0 1

La estrategia consiste en quitar las piedras que haga falta del montón adecuado para que los unos de cada columna de los números en sistema binario sumen un número par. Así, aquí se pueden quitar dos piedras del montón de 3 y queda

1------------- 1
4------------- 1 0 0
5------------- 1 0 1

El primer jugador gana necesariamente siguiendo esta misma estrategia cada vez que le toque jugar.
¿Te has parado a pensar alguna vez por qué marcha? ¿Por qué A puede llevar a cabo su estrategia haga B lo que haga? ¿Y si los montones tienen números de piedras diferentes a 3, 4, 5?
Si lo averiguas no te será difícil tal vez dar con la estrategia del juego de Moore, que es como el de Nim, pero pudiendo quitar las piedras que se quiera (siempre una o más) de uno o dos montones en cada turno.

Con los ojos cerrados. Consideremos ahora el juego siguiente con un montón de 40 piedras. Los jugadores A puede quitar 1, 2, 3,4, ó 5 piedras a su antojo. Luego B puede quitar así mismo 1, 2, 3,4, ó 5 piedras. Ahora le toca a A. Gana quien se lleve la última.
La estrategia de A consiste en dejar, siempre que no se pueda llevar todas las piedras que quedan, un número de piedras que sea multiplo de 6. Es claro que así B no puede ganar, y como gana alguien seguro, tiene que ser A quien gane. Una vez que A conoce la estrategia, no le hace falta hacer cuentas más que la primera vez que juega, en que quita 4 piedras, dejando 36. A partir de entonces su táctica es sencilla: si B quita m, A quita 6-m.

Y además, con esto gano a aquel otro juego...
En un tablero de ajedrez se señalan dos cuadros A y B. ¿Es posible pasearse con una torre por todo el tablero comenzando en A y terminando en B? Recordemos que la torre se mueve horizontal y verticalmente, nunca en oblicuo.
Por supuesto que uno piensa enseguida en lugar a lo mismo en un tablero más pequeño, como en el juego del ajedrez recortado que hemos visto antes y así resulta fácilmente que a veces, por ejemplo en un tablero 2x2 con A y B en dos esquina diagonalmente opuestas el paseo propuesto es imposible. Asímismo, quien conozca el uso que en el otro juego hemos hecho de los colores, puede pensar rápidamente en aplicar el mismo principio aquí. Si A y B son del mismo color, blanco por ejemplo, el paseo es imposible en el tablero 8x8. En efecto la torre va recorriendo sucesivamente blanco, negro, blanco, negro,... Así si el paseo terminase en blanco, el número de cuadros sería impar. En cambio será imposible el paseo en un tablero con un número impar de cuadros si A y B son de distinto color y también si son del mismo color si es que este color es el mas escaso en el tablero. ¿Podrías dar con un teorema general y una estrategia para hacer el paseo siempre que se pueda?

Directrices temáticas para el uso de los Juegos.

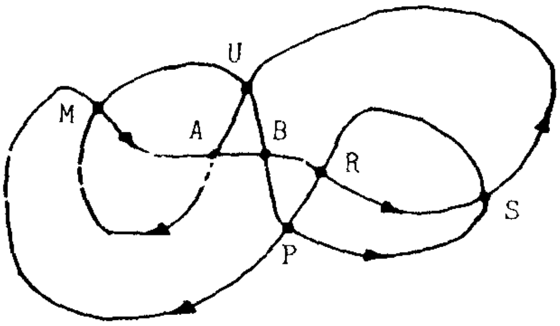
Un segundo esquema de utilización de juegos que puede parecer a muchos más directamente aprovechable. En él se señala mediante ejemplos concretos cómo diversos temas y actitudes que nos ocupan en nuestra enseñanza a todos los niveles pueden ser motivados, ilustrados y enriquecidos mediante el uso de juegos. La disposición de este esquema será presentada alrededor de unas cuantas actitudes y núcleos temáticos propios de la actividad matemática. El campo es enormemente rico. Sería muy útil una experimentación sistemática y de equipo con estos y otros elementos para averiguar el valor efectivo de estas ideas a fin de comunicar los temas y actitudes deseadas.

Bajo cada epígrafe concreto se menciona algunos juegos que, en mi opinión, pueden ayudar adecuadamente a mejor ponerlo de relieve. Ante la imposibilidad de exponer aquí el juego por extenso he optado por indicar algún lugar, lo más asequible posible, en la literatura actual donde se puede acudir para obtener información detallada.

SORPRESAS MATEMÁTICAS.

"Por la admiración comenzó el hombre a filosofar", dijo Aristóteles, y la admiración y la sorpresa y la curiosidad siguen contándose entre los elementos motivadores más fuertes de nuestra actividad intelectual. Cualquiera de nosotros que explore un poco en el origen de nuestro interés por las matemáticas encontrará sin duda instantes de sorpresa y admiración ante ciertos hechos matemáticos que nos han llamado poderosamente la atención. Los hay a todos los niveles, elementales, menos elementales, simples, más sofisticados,... En la enseñanza la motivación es el motor esencial. ¿Por qué no apoyarnos en los elementos más adecuados para ponerlo en marcha con energía? Incluso cuando se trata de hechos que no pueden ser explicados plenamente, estos pueden presentar aspectos de misterio que motiva fuertemente el interés por saber más para desvelarlo plenamente.

***Un truco topológico. Pinta un circuito cerrado con cruces todo lo complicado que quieras, como este, sin que yo lo vea. Que no haya cruces triples, cuádruples,...**



Pon a cada punto de cruce una letra a tu antojo. Ahora recorre el circuito y vas diciéndome las letras. Cuando tú quieras cambias una vez las letras sucesivas para engañarme. Por ejemplo, en el de arriba me dices

MARBSUAMUBPSRP

y te adivino cuál es el cambiazo que me has dado (Me basta escribir las otras a medida que me las das una ariba y otra abajo de una raya, así

MRSAUPR
ABUMBSP

al observar que cada una está una vez arriba y otra abajo excepto las cambiadas R y B. Has cambiado B por R) (Gardner 3, Cap. 9).

***La historia del pequeño Gauss. El maestro manda a su clase hallar la suma de los 100 primeros números. Quería tranquilidad para un rato largo. Gauss escribe inmediatamente algo así**

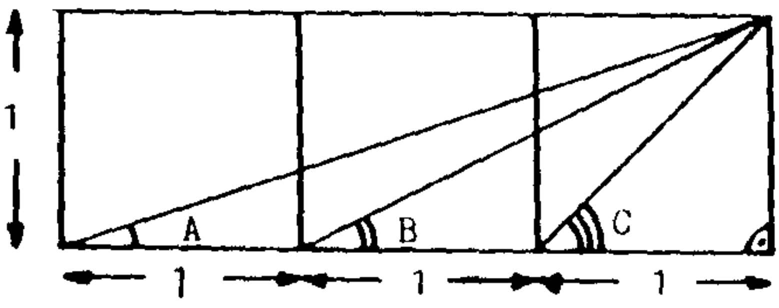
$$\begin{array}{l} S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 98 + 99 + 100 \\ \underline{S = 100 + 99 + 98 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 2 + 1} \\ 2S = 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 101 + 101 + 101 = S \end{array}$$

$$50 \times 101 = 5050$$

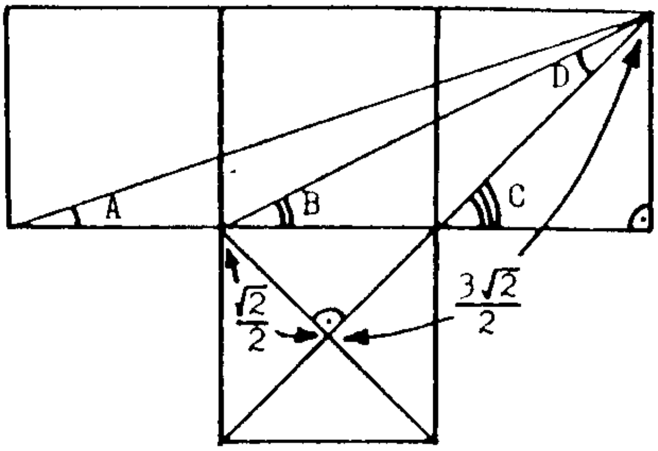
ELEMENTAL, QUERIDO WATSON

He aquí algunos problemitas elementales que pueden servir para ejercitar el arte de resolver problemas de acuerdo con las normas heurísticas dadas anteriormente.

***Sin trigonometría, sólo con geometría elemental, demostrar que en la figura**



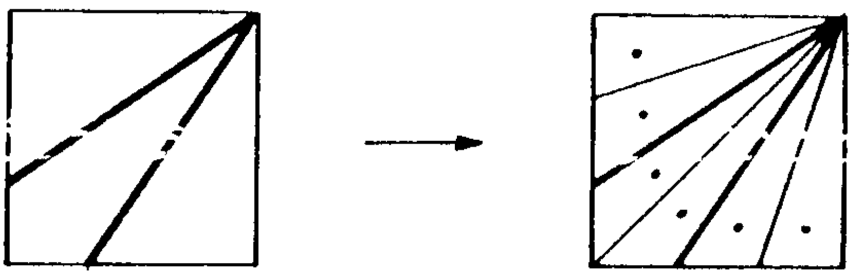
Se tiene C=A+B
Solución: Observa con atención la figura siguiente



$A = D$

$C = B + D = B + A$

*Las dos rectas señaladas en la figura de abajo cortan al cuadrado en tres partes de igual área. ¿Cómo cortan a los lados? Sin hacer cuentas.**



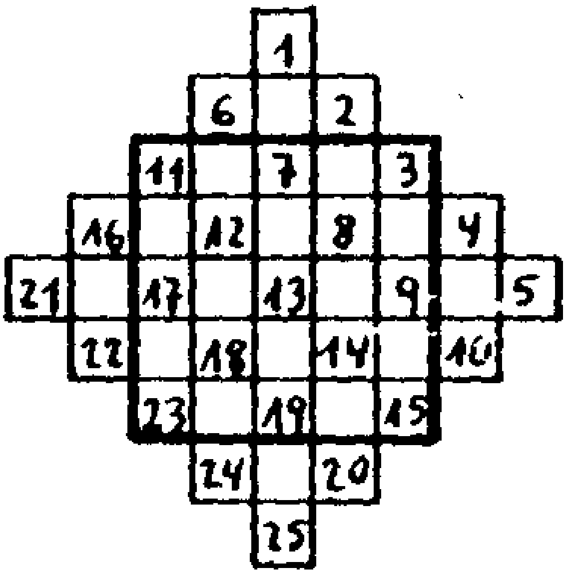
Basta observar la figura auxiliar siguiente con los segmentos adicionales que se han trazado dividiendo las áreas señaladas en dos partes iguales. Con ello es claro que las rectas originales van a parar a 1/3 del vértice opuesto.

SIMETRIA

La utilización de la simetría es técnica muy frecuente en matemáticas... y en juegos. He aquí algunos ejemplos.

***Consideramos el siguiente juego para dos jugadores A y B, en el tablero de ajedrez con 32 rectángulos de papel, cada uno capaz de cubrir dos cuadros del tablero. Juega A colocando un rectángulo donde quiera, cubriendo dos cuadrados. Luego juega B cubriendo otros dos cuadros no cubiertos. Luego A... Pierde el primero que no pueda colocar un rectángulo que cubra dos cuadros. ¿Sabrías dar con una estrategia para alguno de los dos jugadores que le permita ganar siempre? (Fácil: Simetría) ¿Cómo cambian las cosas si juegan en un tablero 8x7,..?**

***Para construir cuadrados mágicos impares hay una técnica muy sencilla y fácilmente memorizable. Se amplía el cuadro 5x5 como se indica en la figura, con las pirámides que he señalado**

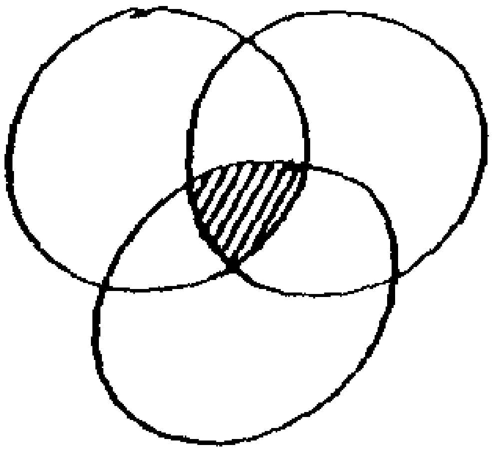


A continuación se colocan los números oblicuamente, como lo he hecho arriba. Luego la pirámide superior se desliza hasta abajo del cuadro donde encaja perfectamente. Análogamente se procede con las otras pirámides. Así se obtiene un cuadro mágico 5x5

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

¿Sabrias demostrar por qué sale siempre bien?

***Se considera la siguiente figura**

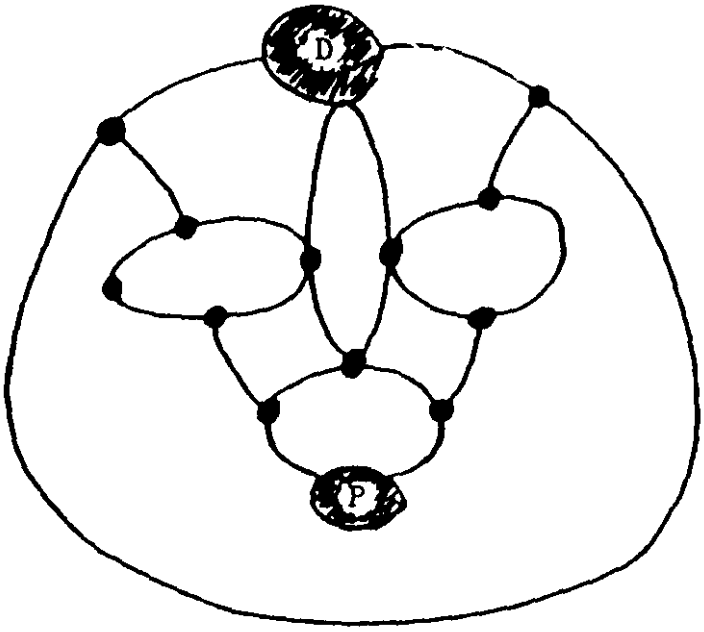


Los tres círculos tienen el mismo radio y cada uno pasa por el centro de los otros dos. ¿Podrías determinar si la zona rayada mide más o menos que 1/4 del área del círculo? Sin cálculos.

***En un billar ¿cómo llegar con una bola a otra sin efectos después de dos reflexiones sobre dos bandas? (Se halla el simétrico del punto de destino con respecto a la última banda, luego el simétrico de este punto con respecto a la primera banda que hay que tocar y este punto se une con el de partida, determinando así el comienzo de la trayectoria).**

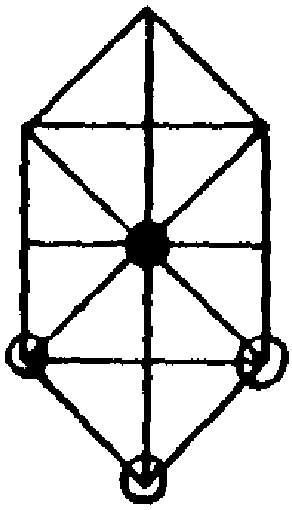
***El problema de la araña y la mosca. Una araña en el interior de un vaso cilíndrico quiere llegar lo más rápidamente posible a una apetitosa mosca que está en el interior del vaso. ¿Le puedes indicar el recorrido que debe seguir? (Desarrolla el cilindro y lo tendrás casi resuelto). ¿Y si sustituimos el vaso cilíndrico por una caja de zapatos? ¿Cómo resuelves ahora el mismo problema?**

***En el tablero siguiente**



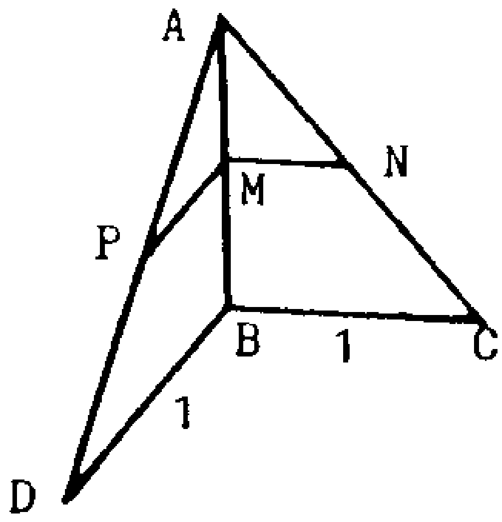
Juegan D y P. El jugador D juega con un duro que sale de D y el jugador P con una peseta que sale de P. Los jugadores se mueven alternativamente por las rutas señaladas, empezando C. El jugador D trata de cazar a P y gana si lo consigue en 6 o menos turnos. Si no lo ha conseguido despues de 6 turnos, pierde.

***El juego militar, un clásico juego de acorralamiento parecido al de los gatos y el ratón sobre un tablero como el de abajo**



***La siguiente falacia es muy antigua (Torricelli?) y viene a demostrar que el principio de Cavalieri (mal interpretado) es falso. Consideramos los dos triángulos de la figura, ABC y ABD, con BC=BD. Para cada de AB es claro que MN=MP. Así por el principio de Cavalieri, el área de ABC es igual al de**

ABD.



FELIZ IDEA

En la resolución de juegos y acertijos, como en la resolución de problemas, a veces es preciso que surja en nuestra mente lo que llamamos una feliz idea. Un concepto nada fácil de definir. Para el experto es un método de trabajo lo que para el novicio resulta una feliz idea, una especie de revelación divina que surge como un relámpago en la oscuridad y nos deja ver claro el camino a seguir. El examen de muchas felices ideas puede abrir en nuestro espíritu cauces que hagan surgir chispas semejantes en circunstancias parecidas. Por eso no es nada despreciable esta labor preparatoria.

A pensar:

Sudoku Jes es un juego matemático que consiste en rellenar una cuadrícula de 81 casillas distribuidas en nueve filas y nueve columnas con

los números del uno al nueve, pero en cada fila y en cada columna no puede repetirse ninguno de los números. Además el tablero de juego está dividido en nueve bloques cuadrados de nueve casillas en los que tampoco se podrá repetir ninguno de los números.

Incluye hasta cinco niveles de dificultad (que determinan las cantidad de ayudas disponibles)

Este pasatiempo fue inventado hacia el 1783 por Leonhard Euler, un matemático nacido en Basilea el 1707.

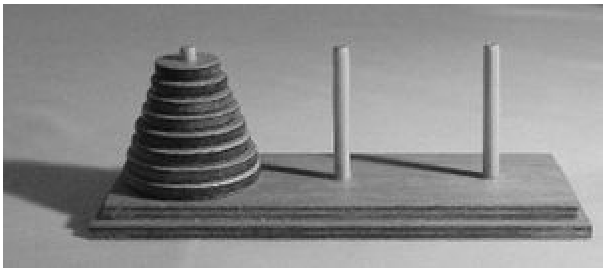
Solución:

1	2	3	4	5	6	7	9	8
4	6	8	2	7	9	1	3	5
5	7	9	3	1	8	2	4	6
2	1	5	6	3	4	8	7	9
3	4	6	8	9	7	5	2	1
8	9	7	1	2	5	4	6	3
9	3	1	5	4	2	6	8	7
7	8	4	9	6	1	3	5	2
6	5	2	7	8	3	9	1	4

Estas muestras del interés de los matemáticos de todos los tiempos por los juegos matemáticos, que se podrían ciertamente multiplicar, apuntan a un hecho indudable con dos vertientes. Son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente y por otra parte una gran porción de la matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego.

El primer aspecto se puede poner bien de manifiesto sin más que ojear un poco el repertorio de juegos más conocidos. La aritmética está inmersa en los cuadrados mágicos, cambios de monedas, juegos sobre pesadas, adivinación de números,... La teoría elemental de números es la base de muchos juegos de adivinación fundamentados en criterios de divisibilidad, aparece en juegos que implican diferentes sistemas de numeración. La combinatoria es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea, muchos de ellos sin resolver aún, como el de averiguar el número de formas distintas de plegar una tira de sellos, el problema del viajante,... El álgebra interviene en muchos acertijos sobre edades, medidas, en el famoso juego de los 15, en el problema de las ocho reinas,... La teoría de grupos, en particular el grupo de Klein, es una herramienta importante para analizar ciertos juegos con fichas en un tablero en los que se "come al saltar al modo de las damas. La teoría de grafos es una de las herramientas que aparece más frecuentemente en el análisis matemático de los juegos. La probabilidad es, por supuesto, la base de todos los juegos de azar, de los que precisamente nació. La lógica da lugar a un sinfín de acertijos y paradojas muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje.

Las Torres de Hanoi es un juego matemático que consiste en tres varillas verticales y un número indeterminado de discos que determinarán la complejidad de la solución. No hay dos discos iguales, están colocados de mayor a menor en una varilla ascendentemente, y no se puede colocar ningún disco mayor sobre uno menor a él en ningún momento. El juego consiste en pasar todos los discos a otra varilla colocados de mayor a menor ascendentemente.



Leyenda: Dios al crear el mundo, colocó tres varillas de diamante con 64 discos en la primera. También creó un monasterio con monjes, los cuales tienen la tarea de resolver esta Torre de Hanoi divina. El día que estos monjes consigan terminar el juego, el mundo acabará. El mínimo número de movimientos que se necesita para resolver este problema es de 264-1. Si los monjes hicieran un movimiento por segundo, los 64 discos estarían en la tercera varilla en poco menos de 585 mil millones de años. Como comparación para ver la magnitud de esta cifra, la Tierra tiene como 5 mil millones de años, y el Universo entre 15 y 20 mil millones de años de antigüedad, sólo una pequeña fracción de esa cifra.

Resolución: el problema de las Torres de Hanoi es curioso porque su solución es muy rápida de calcular, pero el número de pasos para resolverlo crece exponencialmente conforme aumenta el número de discos. Para obtener la solución más corta, es necesario mover el disco más pequeño en todos los pasos impares, mientras que en los pasos pares sólo existe un movimiento posible que no lo incluye. El problema se reduce a decidir en cada paso impar a cuál de las dos pilas posibles se desplazará el disco pequeño:

El algoritmo en cuestión depende del número de discos del problema.

- **Si inicialmente se tiene un número impar de discos, el primer movimiento debe ser colocar el disco más pequeño en la pila destino, y en cada paso impar se le mueve a la siguiente pila a su izquierda (o a la pila destino, si está en la pila origen).**

  La secuencia será DESTINO, AUXILIAR, ORIGEN, DESTINO, AUXILIAR, ORIGEN, etc.

- **Si se tiene inicialmente un número par de discos, el primer movimiento debe ser colocar el disco más pequeño en la pila auxiliar, y en cada paso impar se le mueve a la siguiente pila a su derecha (o a la pila origen, si está en la pila destino).**

ALGUNAS INDICACIONES BIBLIOGRÁFICAS

tiempos Matemáticos (LB 391).

GARDNER 4, Mathematical Circus. Traducido al castellano por Luis Bou, editado por Alianza Editorial: Circo Matemático (LB 937).

GARDNER 5, Further Mathematical Diversions, The paradox of the Unexpected Hangind and Others (Allen and Unwin, London, 1970).

GARDNER, 6, The Sixth Book of Mathematical Games from scientific American (Freeman and Co., San Francisco, 1971).

GARDNER 7, Mathematical Carnival. Traducido al castellano por Luis Bou, editado por Alianza Editorial: Carnaval Matemático (LB 778).

GARDNER 8, Mathematical Magic Show. Traducido al castellano por luis Bou, editado por Alianza Editorial: Festival Mágico-Matemático (LB 1023).

Los dos libros de M. Gardner editados por Labor son también muy recomendables, aunque en este trabajo no he hecho mucho uso de ellos.

Inspiración ¡ajá! (Labor, Barcelona 1981)
¡ajá! Paradojas que hacen pensar (Labor, Barcelona, 1983)

La obra más seria desde el punto de vista matemático es la de BERLEKAMP, CONWAY y GUY, que he mencionado varias veces en estas notas. Su referencia completa es:

BERLEKAMP, E.R., CONWAY, J.H. and GUY, R.K., Winning Ways for your Mathematical Plays, vols. 1, 2 (Academic Press, London, 1982).

A continuación algunos libros que existen en castellano más o menos útiles para la finalidad que he pretendido con este trabajo. Una bibliografía general más extensa, orientada no exclusivamente hacia los juegos matemáticos, sino hacia obras adecuadas para proporcionar motivación y enriquecimiento histórico, estético y lúdico de la enseñanza.

DONOVAN, J., Matemáticas más fáciles con manualidades de papel (Distein, Madrid, 1975).

FRABETTI, C., Problemas de ingenio (Bruguera, Barcelona, 1982).

GAMOW, G., Uno, dos, tres,... infinito (Espasa-Calpe, Madrid, 1969).

GARDNER, M., Las referencias han sido dadas separadamente antes.

GUZMAN, M. de, Mirar y Ver (Alhambra, Madrid, 1977).

GUZMAN, M. de, Cuentos y Cuentas (Labor, Barcelona, 1984).

HOGBEN, L., El Universo de los números (Destino, Madrid, 1966).

LEWIS, B., Matemáticas Modernas. Aspectos recreativos (Alhambra, Madrid, 1983).

MATAIX LORDA, M., Divertimientos lógicos y matemáticos (Marcombo, Madrid, 1979).

MATAIX, M., Cajón de sastre matemático (Marcombo, Madrid, 1981).

MATAIX, M., Fácil, menos fácil y difícil (Marcombo, Madrid, 1981).

MATAIX, M., El discreto encanto de las matemáticas (Marcombo, Madrid, 1979).

PEDOE, D., La geometría en el arte (G. Gili, Barcelona, 1979).

PERELMAN, Y.I., Problemas y experimentos recreativos (Mir, Moscú, 1975).

PERELMAN, Y., Matemáticas recreativas (Martínez Roca, Barcelona, 1968).

PERELMAN, Y., Algebra recreativa (Mir, Moscú, 1978).

PERELMAN, Y., El divertido juego de las matemáticas (Círculo de Lectores, Madrid, 1970).

RADEMACHER, H. y TOEPLITZ, O., Números y figuras (Alianza, Madrid,1970).

SMULLYAN, R., ¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos (Cátedra, Madrid, 1983).

SMULLYAN, R., ¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos (Cátedra, Madrid, 1981).

TAHAN, MALBA (seudónimo de J.C. de Melho), El hombre que calculaba (Losada, Madrid, 1980).

Tangram (anónimo?) (Labor, Barcelona, 1981).

THIO DE POL, S., Primos o algunos dislates sobre números (Alhambra, Madrid, 1975).

UNICEF, Juegos de todo el mundo (UNICEF, Zürich, 1978).

VANNIER, E. y CHAUVEU, P., Cómo jugar y divertirse con su calculadora de bolsillo (Altalena, Madrid, 1978).

VASILIEV, N.B. y GUTENMAJER, V.L., Rectas y curvas (Mir, Moscú, 1980).

VIVES, P., Juegos de ingenio (Círculo de Lectores, Madrid, 1983).

WARUSFEL, Los números y sus misterios (Martínez Roca, Madrid, 1972).

Los juegos de rol. El potencial educativo y la pasión de los niños son intrínsecos a la interpretación de un personaje utilizando la imaginación en cada uno de los escenarios propuestos.

<u>Definición de juegos de rol:</u>

Un juego de rol es un juego interpretativo-narrativo en el cual los jugadores asumen "el rol" de los personajes a lo largo de una historia o trama, para lo cual interpretan sus diálogos y describen sus acciones. No hay un guion a seguir, ya que el desarrollo de la historia queda por completo sujeto a las decisiones y acciones de los jugadores. Destaca el hecho de que la imaginación, la narrativa, la originalidad y el ingenio son primordiales para el adecuado desarrollo de este juego dramatúrgico.

Tenemos que entender que un juego de rol no es un juego de computadora, o similar, digamos que es más similar a una interpretación teatral, sin llegar a ser tan estricta (no existe un guion fijo a seguir) y que normalmente se juega sentados alrededor de una mesa.

"Una mesa es el escenario en donde se desarrolla la historia, la trama está en la imaginación de cada uno de los jugadores y su soporte es la expresión oral. Hay diferentes formas de jugarlo, pero en todas, la esencia es la misma. "…" Este no es un juego como cualquier otro, porque en él no existen ganadores ni perdedores, sólo personajes que evolucionan.

Los juegos de rol son una excelente oportunidad para enfrentar a los niños a situaciones que normalmente no enfrentaran, o que difícilmente cuenten con el apoyo y guía adecuados; por ejemplo, enfrentarlos a situaciones de racismo y sexismo, o incluso xenofobia. Estos juegos nos permiten, como docentes o educadores, plantear un escenario, de forma amena haciéndolos participar de los diálogos y dediciones resolviendo los problemas planteados.

Otra gran idea es utilizarlo para clases de historia, que mejor que crear un taller (siempre de pocos alumnos, como máximo 6 a 8), que cada uno elija un personaje dentro de un marco histórico, plantearles el escenario (pueden utilizar el libro de historia o geografía para resolver dudas sobre los detalles) y que intenten recrear la historia, ver si las decisiones que cada líder tomo fueron las mejores, o si otro camino hubiera sería mejor.

No es lo mismo estudiar el funcionamiento del gobierno del Imperio Romano en un libro, que ser un senador discutiendo la política de invasión de las Galias o el gobierno de las provincias. Y resulta mucho más fácil recordar el nombre de aquella cadena montañosa cuando tienes que cruzarla para llegar a la capital.

Documento de Trabajo

Juegos Matemáticos

1) Consigna:

Sudoku Jes es un juego matemático que consiste en rellenar una cuadrí- -cula de 81 casillas distribuidas en nueve filas y nueve columnas con los números del uno al nueve, pero en cada fila y en cada columna no puede repetirse ninguno de los nú- -meros. Además el tablero de juego está dividido en nueve bloques cua- -drados de nueve casillas en los que tampoco se podrá repetir ninguno de los números.

Incluye hasta cinco niveles de difi- -cultad.

Este pasatiempo fue inventado hacia el 1783 por Leonhard Euler, un ma- -temático nacido en Basilea el 1707.

<u>Documento de Trabajo</u>

<u>Juegos Matemáticos</u>

2) <u>Consigna:</u>

***Con cuatro números 4 y tres opera-**

-ciones entre ellos (+; - ; x ; :) tienes

q lograr que el resultado sea igual a

1, 2, 3… hasta el numero 10.

Ej:

Para lograr que me de cómo resultado

el número cero, puedo elegir las tres

siguientes operaciones.

<u>Ejercicio</u>: 4…4…4…4=0

<u>Solución</u>: 4 (+) 4 (−) 4 (−) 4 =0

Con estas tres operaciones una suma

Y dos restas hemos logrado q el resul-

-tado sea igual a cero.

1) <u>Solución:</u> Sudoku

2) <u>Soluciones:</u>

*** 4...4...4...4= 0**

*** 4...4...4...4= 1**

*** 4...4...4...4= 2**

*** 4...4...4...4= 3**

*** 4...4...4...4= 4**

*** 4...4...4...4= 5**

*** 4...4...4...4= 6**

*** 4...4...4...4= 7**

*** 4...4...4...4= 8**

*** 4...4...4...4= 9**

*** 4...4...4...4= 10**

CONCLUSION:

Se asume de mucha importancia la historia de los juegos Matemáticos, ya que en aquellos años Antes de Cristo, las diferentes problemáticas se resolvían con escasos conocimientos en comparación del avance matemático alcanzado y conocido hoy en día. De igual forma, es importante destacar que a pesar de tener un conocimiento matemático reducido en esos años se produjeron los algoritmos más significativos.

Al investigar acerca de los juegos matemáticos he llegado a la conclusión de que su utilización como dispositivo didáctico es fundamental para el desarrollo del razonamiento.

BIBLIOGRAFIA:

Buscador: Geoogle; Historia de los Juegos Matemáticos (tomo 1) Papiro Rhind y los tres problemas clásicos Griegos.

Buscador: Geoogle ; Integración numérica.

Buscador: Geoogle ; Diferenciación numérica.

Buscador: Geoogle ; Algoritmo - Método Simplex Filas para la resolución de problemas de programación lineal.

Buscador: Geoogle; Historia de los Juegos Matemáticos (III) - El Acertijo del Ganado.

Buscador: Geoogle; Juegos de rol como recurso didáctico.

Diccionario: Juegos de rol.

Libro: Introducción a la teoría de los juegos; ED. Aique.

Biografías:

Frank Plumpton Ramsey

(Cambridge, 1903- *id*., 1930) Matemático y filósofo británico. Fue profesor de matemáticas en el Trinity College y orientó sus trabajos principalmente a temas de lógica matemática y de economía. Estructuró una teoría subjetivista de la probabilidad. Con su teoría simple de los tipos, resolvió varias dificultades que sobre la teoría ramificada de los tipos se exponían en los *Principia mathematica*. Destaca su obra *Fundamentos de las matemáticas y otros ensayos sobre lógica* (1931).

Emanuel Sperner

fue un matemático alemán nacido en 1905 y fallecido en 1980. Sus aportaciones principales a las matemáticas fueron el teorema de Sperner y el lema de Sperner.

Martín Gardner

Nació en Tulsa, Oklahoma (Estados Unidos) el 21 de octubre de 1914. Estudió filosofía y después de graduarse se dedicó al periodismo. Saltó a la fama gracias a su columna mensual Juegos matemáticos, publicada en la revista de divulgación científica Scientific American entre diciembre de 1956 y mayo de 1986. A lo largo de esos treinta años trató los temas más importantes y paradojas de las matemáticas moderna, como los algoritmos genéticos de John Holland o el juego de la vida de John Conway, con lo que se ganó un lugar en el mundo de la matemática merced a la evidente calidad divulgativa de sus escritos. Su primer artículo llevaba el título de Flexágonos y trataba en concreto sobre los hexaflexágonos; el último tuvo como tema los árboles de Steiner minimales. Gardner también escribió una columna en la revista Skeptical Inquirer, dedicada a la investigación científica de los fenómenos paranormales, con el objetivo de poner en evidencia los fraudes. Además de sus libros sobre pasatiempos matemáticos y divulgación científica, ha escrito sobre filosofía (Los porqués de un escriba filosófico) y una versión comentada del clásico de Lewis Carroll Las aventuras de Alicia en el país de las maravillas (Alicia anotada), así como numerosas revisiones de libros de otros autores.

John von Neumann zu Margitta (se pronuncia « fon noiman »), (Margittai Neumann János Lajos)

(28 de diciembre de 1903 - 8 de febrero de 1957) fue un matemático húngaro-estadounidense, de ascendencia judía, que realizó contribuciones importantes en física cuántica, análisis funcional, teoría de

conjuntos, informática, economía, análisis numérico, hidrodinámica (de explosiones), estadística y muchos otros campos de la matemática.

CARDANO Jerónimo (1501-1576)

Nació en Pavia y murió en Roma. Cardano era médico de profesión y demostró conocer al menos intuitivamente el fenómeno de la alergia. Además era un matemático de primera línea. Plagió, copió y publicó como propio el método de resolución de ecuaciones de tercer grado de Tartaglia, después de prometer a su descubridor que lo mantendría en secreto. Pasó varias etapas de su vida en la cárcel, debido a sus numerosas trampas y pillerías. Desde entonces se asumió que la gloria de un trabajo científico corresponde a quien primero lo publique.

GLOSARIO

INCONEXA: Falto de conexión.

Puzle: Rompecabezas

Heurística: Técnica de la indagación y del descubrimiento.