Titulo: Escher y Las Matemáticas

“Un Mundo Fascinante”

Tesina para optar al titulo de profesor de Matemática

Rojo Mariela Roxana

Fundamentación

La importancia de los números y las operaciones es evidente por el uso que se les da en la vida cotidiana. Pero no es suficiente enseñar los contenidos que tengan uso evidente. La Matemática es un bien cultural; la cultura, entre otras cosas ha producido Matemática y la Geometría es parte de ese evidente bien cultural. En lo que a Matemática se refiere, la escuela debe enseñar esta costosa producción cultural

El campo del aprendizaje de la Matemática padece de prejuicios. Sin embargo, la construcción del conocimiento en esta disciplina requiere por parte del docente y de los alumnos una actitud de flexibilidad, apertura y desinhibición para enfrentarse a dichos problemas y poder llegar a una solución creativa de los mismos.

Agradecimientos

Hay muchas personas muy importantes a las que les debo todo, porque se que sin su ayuda no hubiera podido conseguir este logro tan deseado por mi. Y gracias a l apoyo incondicional, por la paciencia que me tuvieron, por el empuje que me dieron cada vez que me faltaban las fuerzas para seguir, por las palabras de aliento que me daban cada vez que algo me costaba mucho y vaya que me costaba. Las personas más importantes y principales merecedoras de mis agradecimientos son en primer lugar el gran amor de mi vida, el padre de mis dos hermosos hijos, mi gran gran amigo y compañero, porque no se canso de alentarme y darme fuerzas, ni seso nunca de acompañarme.

A mis dos maravillosos hijos Evelyn y Matías a los que durante toda mi carrera sacrifique con mi ausencia y mis faltas de tiempo para ocuparme de ellos. Ellos también son dueños de este titulo.

Mi mamá y mis hermanas que me ayudaron mucho cuidando de mis hijos. A mi cuñada y amiga ROSA que siempre me presto su oído y me dio las palabras justas en el momento justo.

Mi padre el que con su gran paciencia me cebaba mates mientras yo estudiaba acompañándome en silencio y siempre encontraba en sus ojos todo ese amor que nunca deja de trasmitirme.

Hoy miro el cielo y se que desde allá hay otra personita que hizo posible este momento, esa personita que por siempre va a vivir en mi corazón y en mi mente. MI AMADO HERMANO DAVID.

Por ultimo y no por eso menos importante todo el resto de la familia, mis profesores que me formaron y vieron mi gran esfuerzo.

El coraje de hoy

Existen, cada semana, dos días por los cuales no tendríamos que preocuparnos jamás, dos días que tendríamos que estar exentos de temores y pesares.

Uno de ellos es AYER, con sus errores y sus inquietudes, sus faltas, males y penas.

AYER se escapo de nuestras manos, se ha ido para siempre. Todo el oro del mundo no podría hacer revivir el día de AYER. No podemos borrar uno solo de nuestros actos, no podemos quitar una sola palabra de las que hemos pronunciado.

El AYER no esta mas.

El otro día que no tendría que preocuparnos es MAÑANA, con sus posibles adversidades, sus cargas, sus lindas promesas y sus pobres realizaciones.

MAÑANA también esta fuera de nuestro alcance. MAÑANA el sol se levantara con todo su esplendor o detrás de de una pantalla de nubes, pero se levantara.

Hasta ese instante no tenemos poder sobre MAÑANA, porque aún esta por llegar.

Nos queda un solo día: HOY. Todas las personas pueden librar un combate en un solo día.

Siempre con la ayuda y el aliento de sus seres amados y teniendo fe y confianza en dios.

Resumen

El objetivo de este trabajo es poder ver la relación directa que hay entre las matemáticas y el arte.

Examinar por medio de los trabajos de Escher las aplicaciones geométricas que utilizo en todas sus obras.

Mostrar que las matemáticas abarcan un amplio contexto y que no se limitan solo a números y operaciones.

Introducción

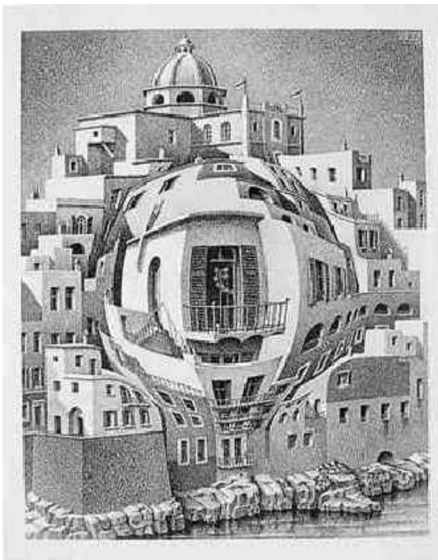
Hay muchas maneras de acercarnos a la matemática pero en general resultan aburridas o incomprensibles o, en cierta manera, nos hacen sentir frustrados. A veces nos vemos a nosotros mismos como improvisados Quijotes en el intento improbable de encontrarle la vuelta a los molinos de sus engranajes: vientos de fórmulas, geometrías que nos soplan desde los ángulos más inesperados y espeluznantes teoremas que amenazan con empujarnos de la montura de nuestro entendimiento. ¿Será que la matemática es en verdad una caja negra herméticamente cerrada cuyo misterio nos está negado descubrir?

¡¡¡¡Nooo!!! La matemática posee una belleza tan especial y extraordinaria que es necesario aproximarse a ella de modos no convencionales, más sutiles, menos desestructurados y lúdicos. A quienes así lo hicieron se les abrió una multiplicidad de mundos asombrosa. Una de las personas que atravesó el alma de la matemática a través del arte para crear obras únicas fue M. C. Escher. Los dibujos, los ensayos y desarrollos artísticos, las pinturas, los grabados y toda la producción de este genial artista holandés nos señalan -si estamos dispuestos a jugar, indagar, observar, investigar y entregarnos a las paradojas- incitantes caminos de descubrimiento.

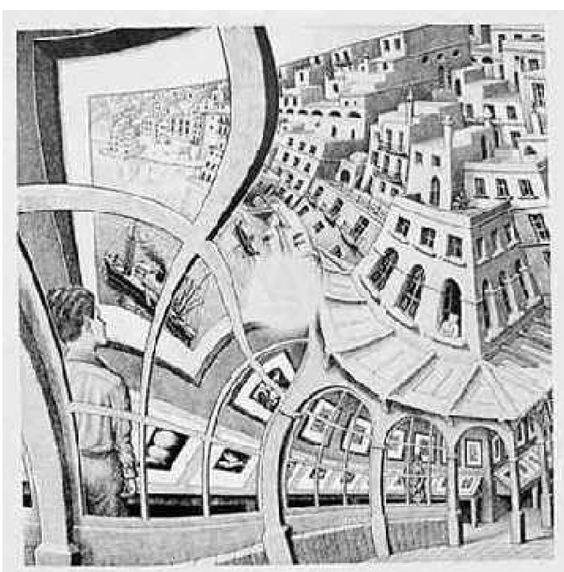
¿Qué tal sin ensayamos una nueva mirada y le tomamos el gusto a la otra matemática? Esa matemática despojada de los prejuicios y tabúes, la que está emparentada con todas las cosas de nuestra vida cotidiana; la que percibimos, usamos y practicamos todos los días intuitivamente sin saberlo.

MATEMÁTICAS Y ESCHER

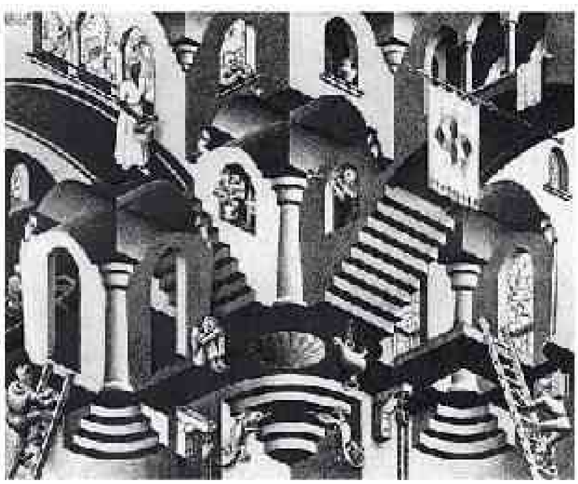
INTRODUCCIÓN

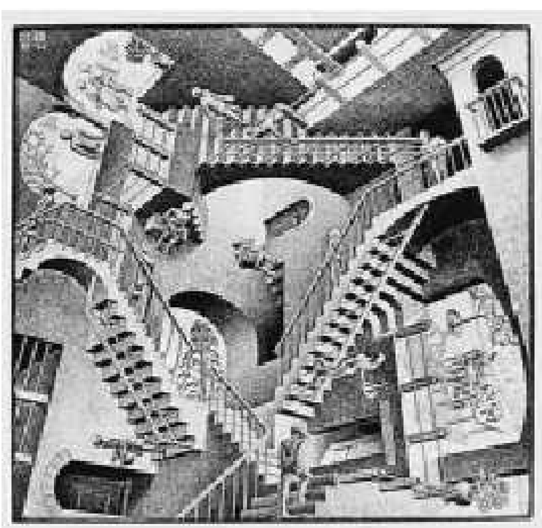


Escher fue un artista inusual, decidido a resolver problemas que parecían interesar más a los matemáticos que a los artistas. Tenía el deseo de romper las limitaciones que impone el plano al arte, de mostrar como nunca antes se había visto que una superficie bidimensional es capaz de ilusiones ópticas de gran profundidad.



Escher luchó para encontrar un mecanismo que permitiese dar la impresión de un espacio sin límites, de mundos que se transforman en otros, o en otros. Incluso podemos llegar a creer que una transformación es de lo más normal y creíble, pero cuando sucede otra a la primera y observamos el punto inicial vemos que es del todo imposible, a pesar de la sensación de normalidad que nos transmite.





Si nos introducimos en uno de sus

diseños, lo cual es sumamente fácil, acabamos de entrar en otro mundo, donde todos nuestros sólidos principios son puestos en duda y sustituidos por una serie de nuevas leyes y extraños principios geométricos.

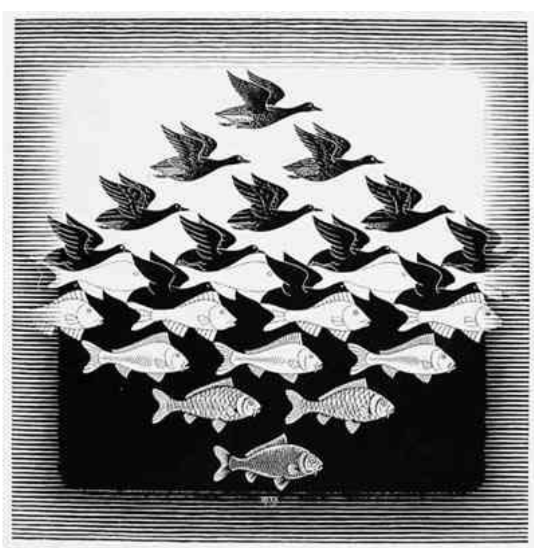
Pero no es por esto exclusivamente por lo que sus trabajos apasionan a muchos matemáticos, sino también porque en ellos subyacen una serie de conceptos matemáticos como reflexiones, simetrías, traslaciones, cuerpos platónicos, el infinito, cintas de Möebius, geometría hiperbólica, etc... Y sin embargo Escher se consideraba un lego en matemáticas.

BREVE BIOGRAFÍA

Maurits Cornelis Escher nació en 1898 en Leeuwarden (Holanda), siendo el hijo más joven de un ingeniero hidráulico.

No fue precisamente un estudiante brillante, y sólo llegó a destacar en las clases de dibujo. En 1919 y bajo presión paterna empieza los estudios de arquitectura en la Escuela de Arquitectura y Artes Decorativas de Haarlem, estudios que abandonó poco después para pasar como discípulo de un profesor de artes gráficas. Adquirió unos buenos conocimientos básicos de dibujo, y destacó sobremanera en la técnica de grabado en madera, la cual llegó a dominar con gran perfección.

Entre 1922 y 1935 se traslada a Italia donde realiza diversos bocetos y grabados principalmente de temas paisajísticos. Abandona Italia debido al clima político de aquellas fechas, trasladándose a Suiza, pero añora el sur de Italia y lo frecuenta repetidas veces. También viaja a España, y en particular a Granada. Visita dos veces la Alhambra, la segunda vez de forma más detenida, copiando numerosos motivos ornamentales. Estos estudios supusieron la base para sus trabajos sobre la partición periódica del plano.

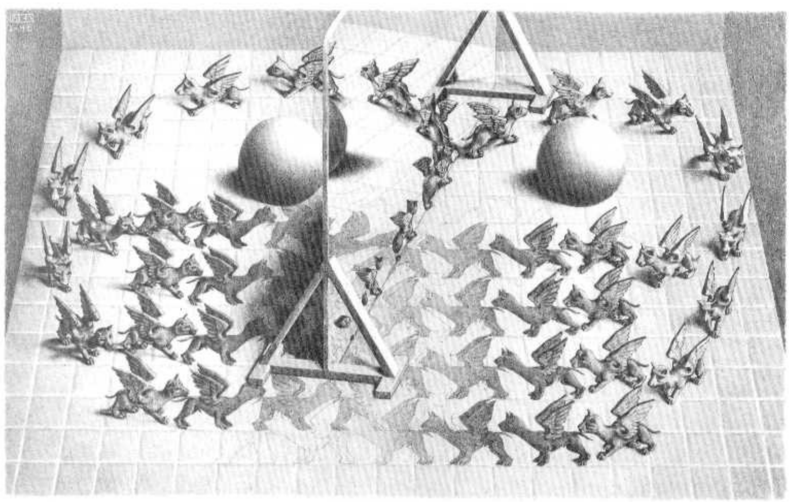


En 1941 se muda a Baarn (Holanda), después de una estancia difícil en Bélgica (estamos en plena 2ª Guerra Mundial). Parece que debido al habitual mal tiempo de esa región, donde los días soleados se consideran una bendición, es por lo que abandona los motivos paisajísticos como modelos y se centra más en su propia mente, encontrando en ella una potentísima fuente de inspiración. Quizás por ello en este período su producción sea tan fructífera y regular, y sólo se verá interrumpida por la operación que sufrió en 1962, consecuencia de su debilitada salud. En 1969 con 71 años realiza su grabado "Serpientes" donde demuestra sus facultades a pesar de su avanzada edad.

En 1970 se traslada a la Casa Rosa Spier de Laren, al norte de Holanda, donde los artistas podían tener estudio propio. En esa ciudad fallece dos años más tarde, en 1972.

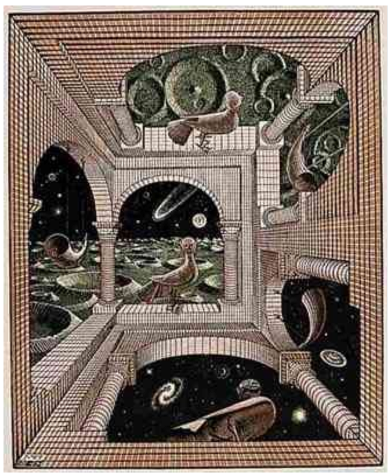
ESCHER COMO ARTISTA

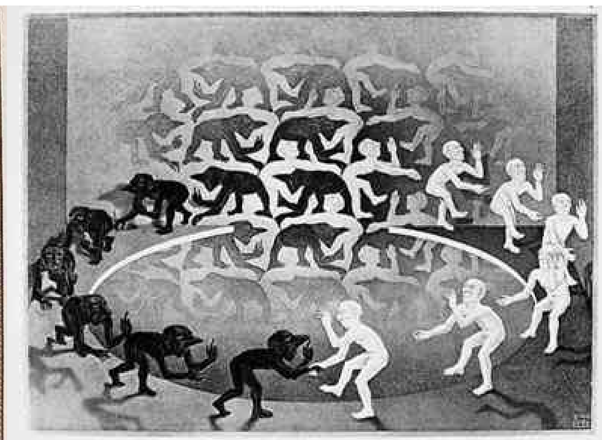
Escher no es un artista al modo usual de su época, se menciona de forma habitual que sus trabajos obtienen más admiración de los científicos que de los artistas.

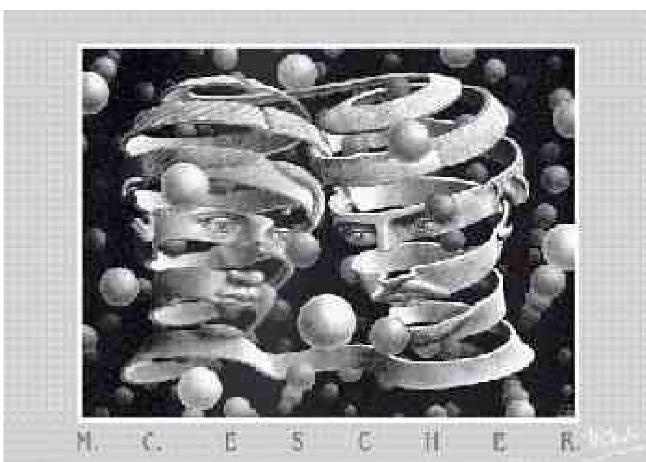


Fue cauto con las críticas de los artistas contemporáneos, y comprendió que su audiencia no podía ser convencional, e incluso no particularmente artística, por lo que él mismo dijo: "A pesar de que no tengo ningunos conocimientos ni enseñanzas - de matemáticas -, habitualmente me parece que tengo más cosas en común con los matemáticos que con mis compañeros artistas".

Cuando Escher era llamado para asistir o intervenir en conferencias sobre temas como matemáticas aplicadas, se encontraba perdido ante las preguntas de los expertos. Sólo podía encontrar respuestas a estas preguntas a través de la experimentación visual, y esto hacía que los especialistas estuviesen más fascinados por su mundo, que Escher por el de ellos. Quizás haya sido el único artista del siglo XX que consiguiera aunar arte y ciencia, y además de un modo magistral.







Su obra gráfica está llena de ilusiones ópticas, que parecen a primera vista naturalistas, pero que después de una visión más detallada nos sorprenden con la imposibilidad de lo que creímos obvio. Así nos vemos forzados a mirar una y otra vez para descubrir las sorpresas que nos ocultan sus dibujos. Esta observación más minuciosa nos permite descubrir

lo excelente dibujante que era Escher y su absoluto dominio de la geometría, imprescindible éste para llevar a buen fin sus obras.

APROXIMACIÓN MATEMÁTICA A LOS TRABAJOS DE ESCHER

En estas páginas vamos a intentar aproximarnos a alguno de los trabajos de Escher desde el punto de vista matemático. Para ello y teniendo en cuenta la variedad de su obra nos centraremos en un par de tipos de trabajos muy relacionados con las matemáticas:

- **PARTICIÓN DEL PLANO.**

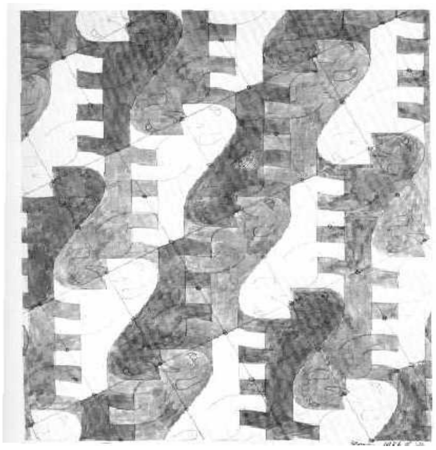
Fue según sus propias palabras el tema que más le apasionó: "Es la fuente más rica de inspiración que jamás haya encontrado".

La idea de rellenar el plano con un mismo motivo se considera original suya, no influida por su aprendizaje. Afirmó: "Mucho antes de que, a raíz de visitar la Alhambra, descubriera cuán afín me es el problema de la partición de la superficie, yo había descubierto por mí mismo mi interés por él".

Ya en 1922 antes de visitar Granada imprime una plancha en la que están representadas ocho cabezas, cuatro al derecho y cuatro al revés.

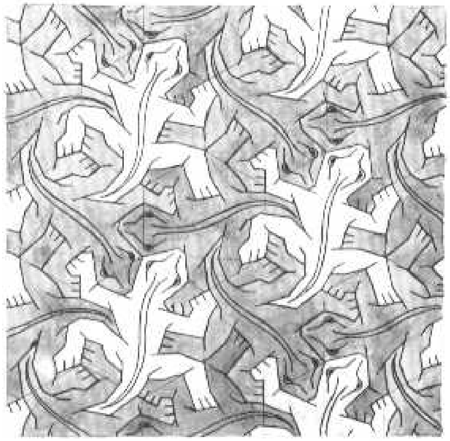
Después de visitar la Alhambra por primera vez, Escher intentó unos nuevos diseños, de los que se conservan bocetos de 1926, todavía muy rudimentarios. Tras una segunda visita, esta vez junto con su mujer, en 1936, copió durante varios días motivos allí representados y descubrió un sistema para representar particiones periódicas del plano, consiguiendo

descubrir los 17 grupos de simetría planos que figuran en la Alhambra, a pesar de sus rudimentarios conocimientos matemáticos. Pero no se detuvo aquí, sino que además introdujo el color, cosa que nadie había hecho hasta esa fecha.

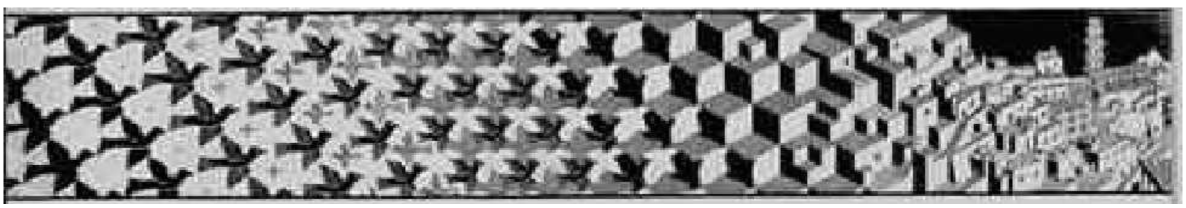


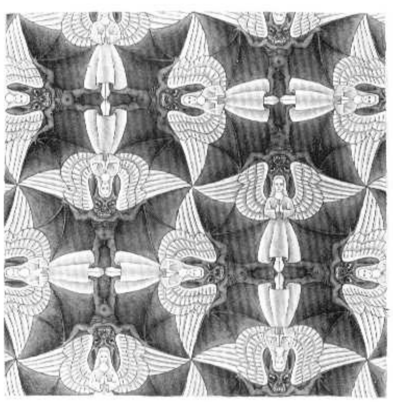
Escher trabaja básicamente con las figuras geométricas que rellenan el plano (cuadrado y triángulo equilátero) y con las figuras obtenidas a partir de ellos que también rellenan el plano: cuadrados, triángulos equiláteros, paralelogramos y hexágonos. Además trabaja con las redes formadas por estas figuras y sus derivadas.

Pero sólo utiliza estas figuras geométricas como punto inicial de sus diseños, va modificando cada una de ellas a su antojo creando una figura patrón que al repetirla encaja con las demás rellenando el plano sin dejar espacios libres.
Esto podemos verlo claramente en la animación anterior, que nos muestra como a partir de un hexágono se obtiene después de unos pasos, la silueta de un reptil, que sirve para la partición del plano que observamos a continuación, que no es sino un boceto del ciclo que aparece al final de esta página: "Reptiles".

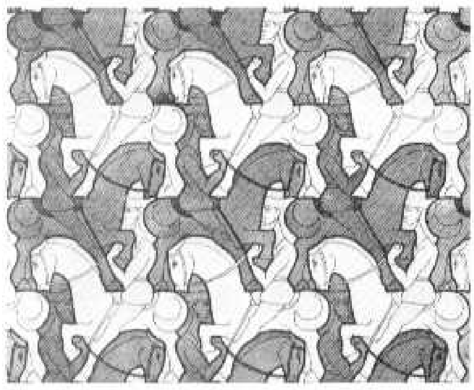


Según el tipo de repetición y forma en que encajan estos patrones estamos ante frisos, si la repetición es en una sola dirección (una especie de tiras donde se repiten los mismos motivos) o mosaicos si la repetición es en dos direcciones (por ejemplo las baldosas del suelo).

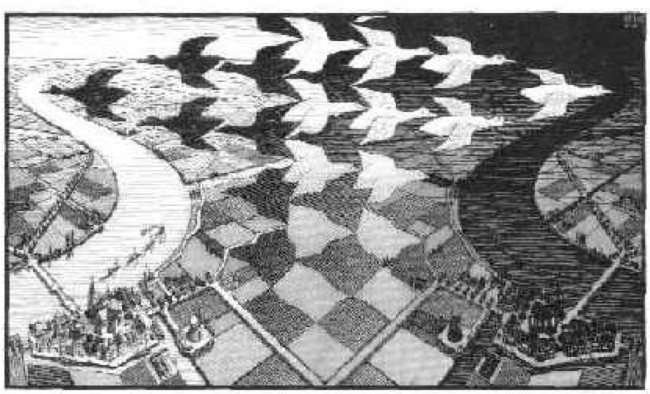


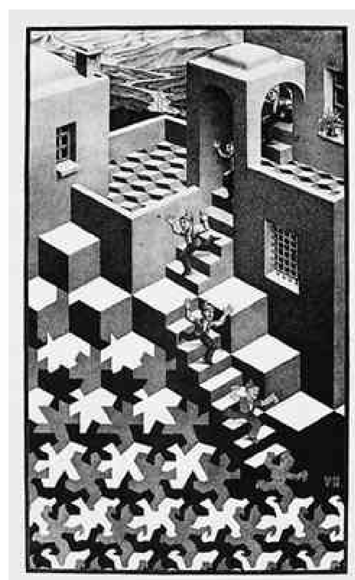


Estos últimos son los menos utilizados por Escher, y tan sólo los usa como bocetos, como parte de otro dibujo o como instrumento para dos temas importantes para él: la metamorfosis y el ciclo.



La metamorfosis consiste en unas figuras que poco a poco se van transformando en otras. Formas indeterminadas y abstractas se van convirtiendo poco a poco en otras formas ya reconocibles, y estas a su vez pueden pasar a otros estadios de la metamorfosis a través de sucesivas transformaciones. Ahora bien, Escher insiste en un tipo de metamorfosis especiales, los ciclos.





El ciclo es básicamente una metamorfosis pero que comienza y termina igual, cerrándose en sí misma toda una etapa. Este tipo de diseños eran de los preferidos por el autor, que gustaba de hacer que los elementos visuales se volviesen sobre sí mismos.

- EL INFINITO.

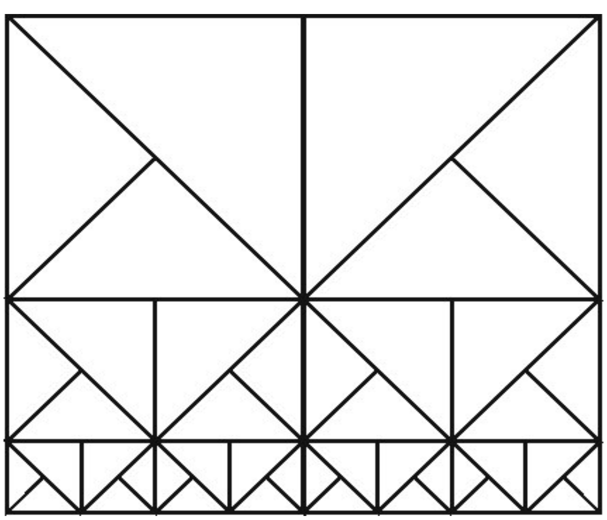
En 1959, en un artículo, el propio Escher expresaba lo que le motivaba a representar la idea del infinito: "Nos resulta imposible imaginar que, más allá de las estrellas más lejanas que vemos en el firmamento, el espacio se acaba, que tiene un límite más allá del cual no hay nada. El término vacío todavía nos dice algo, puesto que un espacio determinado puede estar vacío, por lo menos en nuestra imaginación; pero no estamos en condiciones de imaginar algo que estuviese vacío en el sentido de que el espacio deja de existir. Por esta razón, desde que el hombre existe sobre la tierra, desde que está de pie, sentado o acostado, desde que corre, navega, anda a caballo y vuela, nos aferramos a la idea de un más allá, de un purgatorio, de un cielo y de un infierno, de una transmigración y de un nirvana, todos lugares de infinita extensión en el espacio o estados de infinita duración en el tiempo".

Con la partición regular de la superficie no se ha obtenido todavía la idea del infinito, sino sólo un fragmento de él. Si la superficie fuese infinitamente grande - imposible en nuestra realidad cotidiana – necesitaríamos infinitas partes para cubrirla en su totalidad.

Pero existen otras formas de representar artísticamente el infinito sin necesidad de curvar la superficie. Escher hace varios intentos en esta dirección, al principio muy influido por sus anteriores trabajos sobre particiones regulares del plano. La idea es sencilla, se trata de ir dibujando figuras que encajen entre sí rellenando el plano y que poco a poco van aumentando o disminuyendo de tamaño (según sea el caso) hasta dar la impresión de que hay un número infinito de ellas.

Pero no se trata sólo de una impresión, puesto que disponemos un método, usado por Escher, para encajar un número infinito de figuras en un espacio finito. Basta con tomar objetos cuyas áreas sigan la regla: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ... y así sucesivamente. Si sumáramos todas sus áreas tendríamos la expresión: 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 +.....=1, que es una serie convergente de suma la unidad. Con este método podríamos dibujar un número infinito de figuras en una superficie finita.

Podemos ver en la siguiente figura un esbozo de ese método, usado en su diseño "Límite cuadrado".



Básicamente Escher trabaja con varios tipos de diseños: diseños cuadrados, diseños de espirales, diseños inspirados por Coxeter, cintas de Möebius, figuras imposibles y diseños en tres dimensiones.

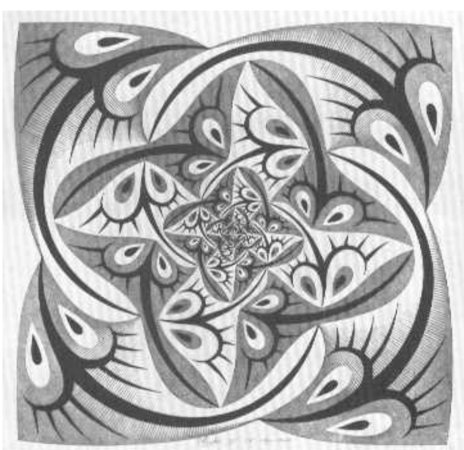
a) Diseños cuadrados.

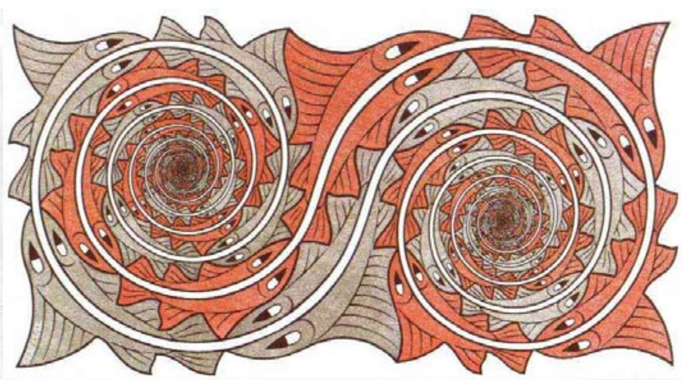
Su primer trabajo es de 1939 (Evolución II)

y en él no tiene todavía muy desarrollada la técnica de la disminución en el tamaño de las figuras. Pero más adelante y conforme la domine nos irá dando muestras de su virtuosismo, como en "Límite cuadrado".

b) Diseños de espirales.

C

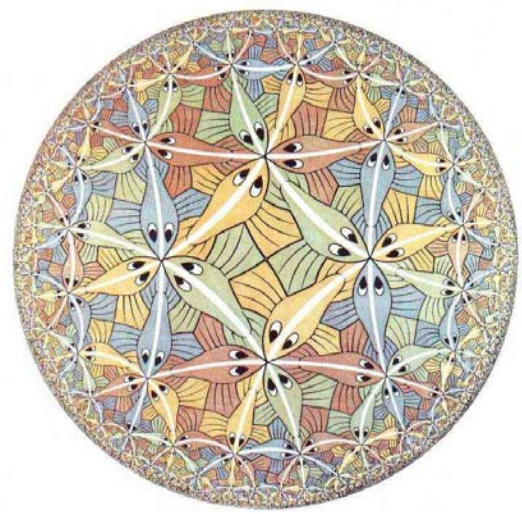


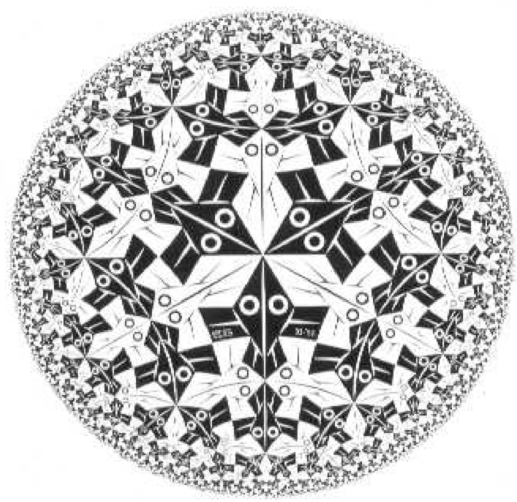


on este tipo de diseños parece que Escher no sólo quiso expresar el infinito, sino también la idea de la transformación continua. Los peces son muy pequeños al nacer y poco a poco se van desarrollando y aumentando de tamaño, hasta que llega un momento en que empiezan a disminuir de nuevo para acabar tal y como comenzaron, pequeños.

c) Diseños inspirados por Coxeter.

Escher tuvo conocimiento de las leyes matemáticas a través del libro "Introducción a la Geometría", de H. Coxeter. En particular observó en dicho libro un mosaico hiperbólico obra de Henri Poincaré que le inspiró la idea de la aproximación al infinito desde un nuevo punto de vista.



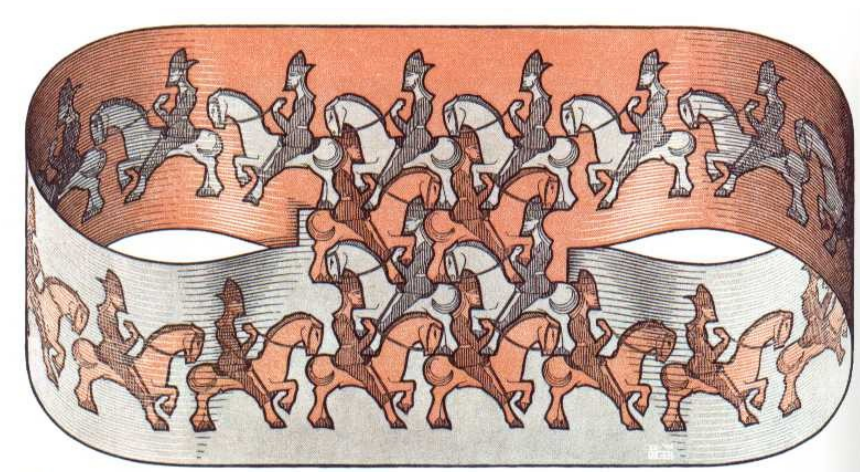


Además podemos observar que en los grabados de la familia límite circular las líneas curvas acentúan la impresión de volumen con lo cual parece que estamos viendo una mitad de una esfera, y nuestro cerebro puede imaginar que el dibujo continúa fuera de nuestra visión.

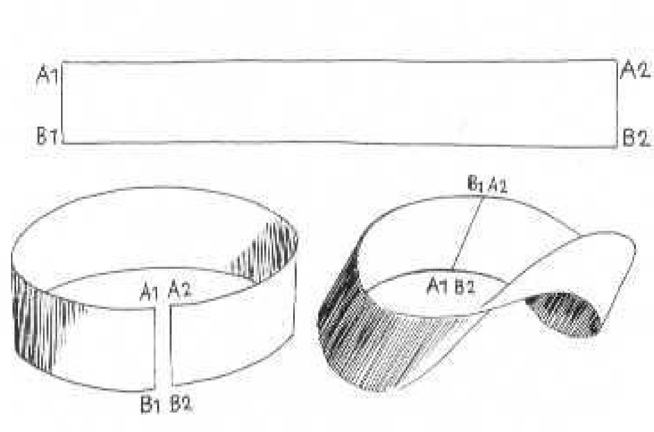
Así fue desarrollando esta idea hasta dar con un sistema de construcción propio, que llega a su máximo exponente con el grabado "Serpientes", en el que ya no se aprecia el mosaico de Poincaré aunque siga estando subyacente.

d) Cintas de Möebius.

Escher trabajó con una aproximación a la idea de cinta de Möebius en su trabajo "Jinetes" mucho antes de conocer expresamente tal estructura topológica.



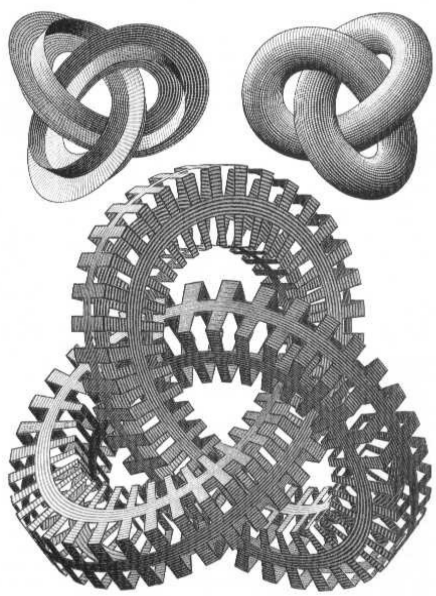
Pero ¿qué es una cinta de Möebius? Es un objeto que se construye a partir de un rectángulo de papel en el que dos extremos se unen pero no de la forma habitual para formar un cilindro, sino girando uno de los lados, como se muestra en la figura.



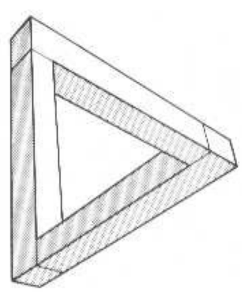
Estas cintas tienen la propiedad de tener una sola cara y un solo borde, mientras que una cinta normal tiene dos caras y dos bordes. Además al cortarlas longitudinalmente no se separan sino que aparece otra cinta pero con dos vueltas.

Con el uso de cintas de Möebius, Escher quiso también expresar la idea del infinito como un movimiento constante, sin principio ni final.

También llega a trabajar con otras estructuras topológicas, como son los nudos, pero que al fin y al cabo no son sino cintas de Möebius pero originadas a partir de una "cinta" con forma de cilindro o de ortoedro. En todas ellas se sugiere el movimiento sin fin.

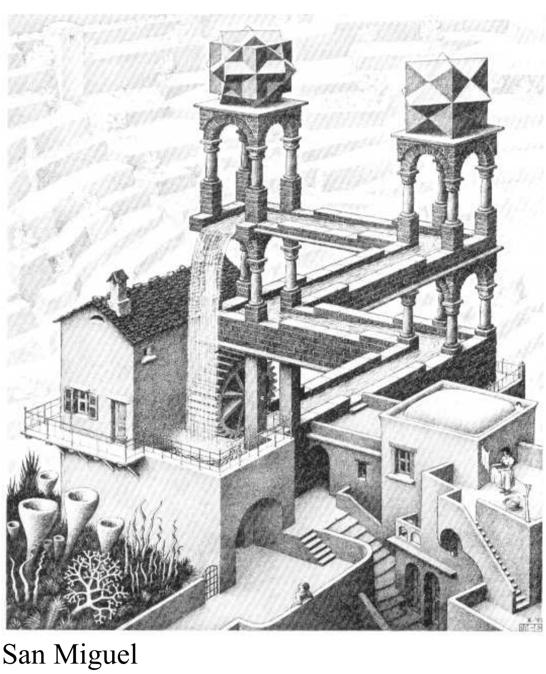



e) Figuras imposibles.



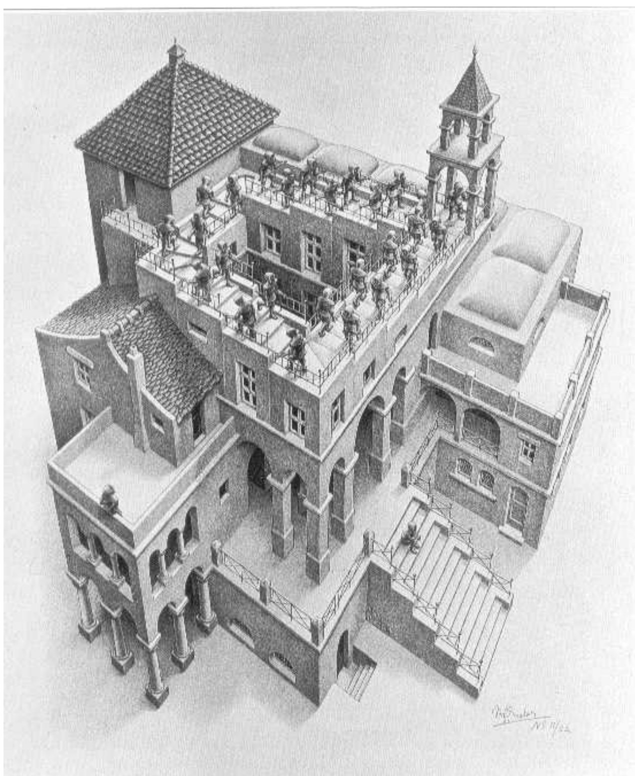
En 1958, Penrose ideó una figura imposible a la que denominó "tribar". Si observamos la imagen se trata aparentemente de un triángulo tridimensional, pero que en realidad es imposible de construir, sólo existe como dibujo.

Escher llegó a conocer este diseño y trabajó a partir de él. Para mostrar todavía mejor su imposibilidad creó varios edificios en los que usó de forma implícita uno o varios "tribar" y en los que tras una observación detenida podemos comprobar la imposibilidad del diseño, como escaleras que salen de dentro del edificio pero que se apoyan en la fachada (en "Belvedere"), o una noria con agua en perpetuo movimiento (en "Cascada").



Si en éste último nos fijamos en la corriente de agua podemos estar siguiéndola de forma continua sin poder llegar al final, en lo que supone un ciclo infinito.

Otro diseño imposible que usó Escher para demostrar el movimiento continuo es el de la escalera de Penrose. Gracias a él creó su famoso "Escaleras arriba, escaleras abajo" (también conocido como "Subiendo y bajando"), donde también nos muestra la idea del movimiento infinito, ya que podemos estar constantemente en marcha pero siempre permaneciendo en el mismo sitio.



f) Figuras en tres dimensiones.

Entre ellas también podríamos mencionar los nudos de los que hablamos en el apartado de cintas de Möebius, pero más bien me refiero a las esferas

talladas en madera o en marfil, con las que Escher quería mostrar lo que no tiene limite sin necesidad de ser infinito.

BIBLIOGRAFÍA

- BERENGUER, LUIS y otros (1996): **Construir las matemáticas (Varios tomos).** Granada. Proyecto Sur.
- ERNST, BRUNO (1994): **El espejo mágico de M.C. Escher.** Köln. Evergreen.
- FELLOWS, MIRANDA (1995): **The life and works of Escher.** Avonmouth (Great Britain). Parragon Book Service Limited.
- SCHATTSCHNEIDER, DORIS y WALKER, WALLACE (1992): **M.C. Escher. Calidociclos.** Baarn (Holanda). Taschen.
- TASCHEN, BENEDIKT (1995): **M.C. Escher. Taschen Postcardbook.** Baarn (Holanda). Taschen.

VARIOS AUTORES (1995): **La Alhambra.** Granada. SAEM THALES.