Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XV No. 1 (2008), pp. 1–12

BUEN PLANTEAMIENTO LOCAL DE UNA ECUACIÓN KORTEWEG-DE VRIES DE QUINTO ORDEN

GERMÁN E. FONSECA B. (*)
MIGUEL A. PACHÓN H. (**)

Resumen. En este trabajo se demuestra el buen planteamiento local en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 1$, para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \alpha\partial_x^5 u + \beta\partial_x^3 u + \gamma\partial_x u\partial_{xx} u = 0, & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Esta es una ecuación de tipo Kaup-Kuperschmidt que ha sido utilizada para modelar propagación de ondas capilares gravitatorias. Resultados previos muestran la existencia de soluciones en $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq \frac{301}{108}$, ver [4]. Nuestro método de prueba consiste en aplicar el teorema del punto fijo de Banach en los espacios de funciones de Bourgain, $X^{s,b}$, determinados por el grupo unitario de la ecuación diferencial lineal asociada.

Palabras claves. Ecuación de tipo Kaup-Kuperschmidt, Teorema del punto fijo de Banach, espacios de funciones de Bourgain.

2000 Mathematics Subject Classification: 35A25, 35Q99

(*) Germán E. Fonseca B., Departamento de Matemticas, Universidad Nacional de Colombia. E-mail: gefonsecab@unal.edu.co
(**) Miguel A. Pachón H., Departamento de Matemticas, Universidad Nacional de Colombia. E-mail: mapachonh@unal.edu.co .

ABSTRACT. In this paper we show the local well-posedness on $H^s(\mathbb{R})$ for the initial value problem

$$\begin{cases} u_t + \alpha\partial_x^5 u + \beta\partial_x^3 u + \gamma\partial_x u\partial_{xx}u = 0, & t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

This is a Kaup-Kuperschmidt type equation which has been used to model capillary gravity waves propagation. Previous results include the existence of local solutions in $H^s(\mathbb{R})$ for $s \geq \frac{301}{108}$, see [4]. Our method of proof consists in applying the Banach fix point theorem on Bourgain spaces, $X^{s,b}$, determined by the unitary group of the associated linear differential equation.

KEY WORDS AND PHRASES. Kaup-Kuperschmidt equation, Banach fixed point theorem, Bourgain functional spaces.

INTRODUCCIÓN

En [4], Tao S. y Cui S. consideran los problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + \alpha\partial_x^5 u + \beta\partial_x^3 u + \gamma\partial_x u\partial_{xx}u = 0, & t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{0.1}$$

y

$$\begin{cases} u_t + \alpha\partial_x^5 u + \beta\partial_x^3 u + \gamma u\partial_{xx}u = 0, & t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{0.2}$$

Estas dos ecuaciones se conocen en la literatura como ecuaciones de Kaup-Kupershmidt, y surgen en el estudio de modelos físicos, tales como ondas capilares gravitatorias (ver [4], [2] y sus referencias). En el caso particular de (0.1), una mirada al estudio del buen planteamiento la dieron Tao S. y Cui S. en [4], donde establecen varias estimativas de tipo Strichartz y efectos regularizantes del grupo asociado a la parte lineal de la ecuación, y demuestran la existencia local de soluciones en los espacios clásicos de Sobolev, $H^s(\mathbb{R})$, para $s \geq \frac{301}{108}$. Observamos la similitud de la ecuación asociada a (0.1) con la conocida ecuación KdV de quinto orden, también conocida como la ecuación Kawahara, [7]:

$$u_t + \alpha u_{xxxxx} + \beta u_{xxx} + \gamma u u_x = 0, \tag{0.3}$$

la cual surge por ejemplo en el estudio de propagación de ondas largas en aguas de poca profundidad y entre capas de hielo. En [3] Cui, Deng y Tao, utilizan espacios de Bourgain y la técnica de Kenig Ponce y Vega en [11] para mostrar la existencia local de soluciones $u \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{R}))$, con dato inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ con $s \geq -1$, para el PVI asociado a la ecuación (0.3). Vale la pena mencionar que recientemente Kwon, [13], consideró la ecuación de quinto orden que aparece en la jerarquía de la KdV, agregar en (0.1) el término no lineal $u\partial_{xxx}u$. Allí se demuestra que el PVI asociado está locamente bien planteado en $H^s(\mathbb{R}), s > 5/2$ pero que la solución no puede ser obtenida mediante el teorema del punto fijo pues la aplicación dato-solución no es uniformemente continua.

El objetivo principal de este trabajo es mejorar el resultado obtenido en [4], demostraremos el buen planteamiento local del PVI (0.1) en $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 1$, utilizando el método iniciado por Bourgain y desarrollado posteriormente por Kenig Ponce y Vega. También se utilizarán algunas ideas en [3] para la estimación bilineal del termino $\partial_x u \partial_{xx} u$ del PVI (0.1).

Consideramos los espacios de Bourgain $X^{s,b}$ definidos por

$$X^{s,b} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) : (1 + |\tau - P(\xi)|)^b (1 + |\xi|)^s \hat{f}(\xi, \tau) \in L^2(\mathbb{R}^2)\},$$

donde $s,\ b \in \mathbb{R}$, $P(\xi) = -\alpha\xi^5 + \beta\xi^3$, es el simbolo asociado a la parte lineal de la ecuación en (0.1), y $\hat{}$ denota la transformada de Fourier en dos variables. Por el principio de Duhamel, consideramos la ecuación integral del PVI (0.1)

$$u(t) = W(t)u_0 - \frac{\gamma}{2} \int_0^t W(t - t') \left(\partial_x (u_x^2)\right)(t') dt',$$

donde $\{W(t)\}$ es el grupo asociado a la parte lineal de la ecuación, esto es

$$W(t)u_0(x) := c \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi + tP(\xi))} \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

El teorema principal de este artículo es:

Teorema 0.1. *Sea $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, con $s \geq 1$, entonces existe $b \in (1/2, 1)$, $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ y una única solución $u(x,t)$ definida en $[0,T]$ del PVI (0.1), tal que*

$$u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$$
$$\partial_x(u_x^2) \ \in \ X^{s,b-1}$$

El artículo está organizado como sigue: En la primera sección se enuncian algunas estimativas lineales y desigualdades de cálculo elemental, en la segunda sección se dá una estimación para la parte no lineal de la ecuación y en la última sección se demuestra el teorema principal.

1. Estimativas preliminares

Primero consideramos algunas estimativas dadas en [11] y [10] que utilizaremos al final para mostar la existencia de soluciones de PVI (0.1).

Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi \equiv 1$ en $[-1/2, 1/2]$ y *supp* $\psi \subseteq (-1,1)$.
$\psi_\delta(t) := \psi(t/\delta)$.

Lema 1.1. *Sean $s,\ b,\ b'$ y $\delta \in \mathbb{R}$, tales que $1/2 < b' < b \leq 1$ y $0 < \delta < 1$. Si $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $g \in X^{s,b}$, entonces existe $c > 0$ tal que*

a) $\|\psi_\delta(t)W(t)u_0\|_{X^{s,b}} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|u\|_{H^s}$,
b) $\|\psi_\delta(t)g\|_{X^{s,b}} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|g\|_{X^{s,b}}$,
c) $\left\|\psi_\delta(t)\int_0^t W(t-t')g(t')dt'\right\|_{X^{s,b}} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|g\|_{X^{s,b-1}}$,
d) $\left\|\psi_\delta(t)\int_0^t W(t-t')g(t')dt'\right\|_{H^s} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|g\|_{X^{s,b-1}}$,
e) $\|\psi_\delta(t)u\|_{X^{s,b'}} \leq c\delta^{(b-b')/(4b)}\|u\|_{X^{s,b}}$.
f) $\|\psi_\delta(t)u\|_{X^{s,b'-1}} \leq c\delta^{(b-b')/8(1-b')}\|u\|_{X^{s,b-1}}$.

Las siguientes desigualdades de cálculo elemental son de gran utilidad en las estimación bilineal

Lema 1.2. (1) *Si $r > 0$, $s > 0$, $r + s > 1$ y $r \neq 1$, $s \neq 1$, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x-a|)^{-r}(1+|x-b|)^{-s}dx \leq$$
$$\begin{cases} c(1+|a-b|)^{-\min(r,s)}, & si\ r>1\ o\ s>1 \\ c(1+|a-b|)^{1-r-s}, & si\ \ r<1\ y\ s<1 \end{cases}$$

(2) *Si $0 < \alpha < 1$, $r > 1-\alpha$ y $r \neq 1$, entonces*
$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{-\alpha}(1+|x-a|)^{-r}dx \leq \begin{cases} c(1+|a|)^{-\alpha}, & si\quad r>1 \\ c(1+|a|)^{1-r-\alpha}, & si\ r<1 \end{cases}$$

2. Estimación bilineal

El objetivo principal de esta sección es dar una estimación de la forma bilineal $\partial_x u\partial_{xx}u = \frac{1}{2}\partial_x(u_x^2)$, que se ilustra en el siguiente teorema

Teorema 2.1. *Si $u \in X^{s,b'}$, donde $s \geq 1$, $1/2 < b < 3/4$ y $b' \in (1/2, b]$, entonces*

$$\|\partial_x(u_x^2)\|_{X^{s,b-1}} \leq c\|u\|^2_{X^{s,b'}}. \tag{2.1}$$

En la prueba de este teorema, f denota una función tal que
$$\hat{f} = (1+|\tau-P(\xi)|)^{b'}(1+|\xi|)^s\hat{u}.$$

Como en [11], demostrar (2.1) es equivalente a mostrar

$$= \left\|\frac{\xi(1+|\xi|)^s}{(1+|\tau-P(\xi)|)^{1-b}}\times\right.$$

$$\left.\times\iint\frac{\xi_1(\xi-\xi_1)\hat{f}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\hat{f}(\xi_1,\tau_1)\,d\xi_1 d\tau_1}{(1+|\xi-\xi_1|)^s(1+|\tau-\tau_1-P(\xi-\xi_1)|)^{b'}(1+|\xi_1|)^s(1+|\tau_1-P(\xi_1)|)^{b'}}\right\|_{L^2_\xi L^2_\tau}$$

$$\leq c\|f\|^2_{L^2_\xi L^2_\tau}.$$

Para ello vamos a seguir las ideas en [3].

Consideremos el simbolo asociado a la parte lineal de la ecuación

$$P(\xi) = -\alpha\xi^5 + \beta\xi^3,$$

además supongamos

$$\frac{1}{A} \leq |\alpha| \leq A, \quad |\beta| \leq B,$$

donde A y B son constantes positivas. Sea

$$Q(\xi,\xi_1) := 5\gamma\xi\xi_1(\xi-\xi_1)(\xi^2 - \xi\xi_1 + \xi_1^2) - 3\beta\xi\xi_1(\xi-\xi_1)$$

$$Q_0(\xi) := Q\Big(\xi, \frac{\xi}{2}\Big) = \frac{15}{16}\alpha\xi^3\Big(\xi^2 - \frac{4\beta}{5\gamma}\Big),$$

entonces se obtiene la igualdad

$$P(\xi-\xi_1) + P(\xi_1) = P(\xi) + Q(\xi,\xi_1)$$

derivando en ambos lados de la igualdad con respecto a ξ_1 se tiene

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi_1} = 5\gamma\xi(\xi - 2\xi_1)\Big(2\xi_1^2 - 2\xi\xi_1 + \xi^2 - \frac{3\beta}{5\alpha}\Big), \quad \text{para todo} \ \ \xi, \ \xi_1 \in \mathbb{R}.$$

De la igualdad anterior observemos que el polinomio Q tiene un único punto critico distinto de cero en $\xi_1 = \frac{\xi}{2}$ si y solo si $\beta\alpha \leq 0$ ó $\beta\alpha > 0$ y $|\xi| \geq \sqrt{\frac{6}{5}AB}$. De ahora en adelante supongamos $M = 1 + \sqrt{\frac{6}{5}AB}$.

Lema 2.2. *Si $|\xi| \geq M$ ó $|\xi_1| \geq M$, entonces existe $c > 0$ tal que*

$$\Big|\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\Big| \geq c|\xi||2\xi_1 - \xi|(1 + \xi^2 + \xi_1^2).$$

Demostración. La prueba se reduce a mostrar que existe $c > 0$ tal que

$$2\xi_1^2 - 2\xi\xi_1 + \xi^2 - \frac{3\beta}{5\alpha} \geq c(1 + \xi^2 + \xi_1^2).$$

Primero supongamos que $|\xi_1| \geq M$, y sea $2/3 < a < 1$ fijo. La función f definida por $f(\xi) = a\xi^2 - 2\xi\xi_1$, tiene mínimo en $\xi = \frac{\xi_1}{a}$, luego

$$\begin{aligned} 2\xi_1^2 - 2\xi\xi_1 + \xi^2 - \frac{3\beta}{5\alpha} &= 2\xi_1^2 + a\xi^2 - 2\xi\xi_1 + \xi^2 - a\xi^2 - \frac{3\beta}{5\alpha} \\ &\geq \xi_1^2(2 - \frac{1}{a}) + \xi^2(1-a) - \frac{3\beta}{5\alpha} \\ &\geq b\xi_1^2 + c\xi^2 - \frac{3\beta}{5\alpha} \end{aligned}$$

donde $b = 2 - \frac{1}{a}$, $c = 1 - a$. Como $2/3 < a < 1$ y $\frac{3\beta}{5\alpha} \leq \frac{(M-1)^2}{2}$, entonces $b > 1/2$, $c > 0$ y por lo tanto existe $d > 0$ tal que $b = d + 1/2$, luego

$$\begin{aligned} b\xi_1^2 + c\xi^2 - \frac{3\beta}{5\alpha} &\geq d\xi_1^2 + c\xi^2 + \frac{\xi_1^2}{2} - \frac{(M-1)^2}{2} \\ &\geq d\xi_1^2 + c\xi^2 + \frac{M^2}{2} - \frac{(M-1)^2}{2} \\ &\geq C(\xi_1^2 + \xi^2 + 1) \end{aligned}$$

donde $C = \min\{d, c, M - 1/2\}$.

Ahora supongamos que $|\xi| \geq M$. Por el teorema del valor intermedio podemos elegir $0 < a < 1$, fijo tal que

$$\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{M}\Big)^2 < \frac{a}{1+a} < \frac{1}{2}.$$

La función $g(\xi_1) = a\xi_1^2 + (\xi - \xi_1)^2$, tiene mínimo en $\xi_1 = \frac{\xi}{1+a}$, entonces

$$\begin{aligned} 2\xi_1^2 - 2\xi\xi_1 + \xi^2 - \frac{3\beta}{5\alpha} &= \xi_1^2 + a\xi_1^2 + (\xi_1 - \xi)^2 - a\xi_1^2 - \frac{3\beta}{5\alpha} \\ &\geq (1-a)\xi_1^2 + \frac{a}{1+a}\xi^2 - \frac{(M-1)^2}{2} \end{aligned}$$

se pueden elegir constantes $b > 0$, $c > 0$, tales que $\frac{a}{1+a} = b + c$ y además

$$\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{M}\Big)^2 < c < \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2\xi_1^2 - 2\xi\xi_1 + \xi^2 - \frac{3\beta}{5\gamma} &\geq (1-a)\xi_1^2 + b\xi^2 + c\xi^2 - \frac{(M-1)^2}{2} \\ &\geq (1-a)\xi_1^2 + b\xi^2 + M^2 c - \frac{(M-1)^2}{2} \\ &\geq (1-a)\xi_1^2 + b\xi^2 + d, \end{aligned}$$

donde $0 < d < M^2 c - \frac{(M-1)^2}{2}$, luego

$$2\xi_1^2 - 2\xi\xi_1 + \xi^2 - \frac{3\beta}{5\alpha} \geq C(\xi_1^2 + \xi^2 + 1),$$

donde $C = \min\{1 - a, b, d\}$. □

Lema 2.3. *Si $|\xi| \geq M$ y $\xi_1 \in \mathbb{R}$, entonces existe $c > 0$ tal que*

$$\Big|\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\Big| \geq c|\xi|^{\frac{1}{2}}(1 + \xi^2 + \xi_1^2)^{\frac{1}{2}}|Q(\xi, \xi_1) - Q_0(\xi)|^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Si $|\xi| \leq M$ *y* $|\xi_1| \geq M$*, entonces existe* $c > 0$ *tal que*

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\right| \geq c|\xi|^{\frac{1}{4}}|Q(\xi,\xi_1)|^{\frac{3}{4}}. \tag{2.3}$$

Demostración. Supongamos $|\xi| \geq M$. Un cálculo directo muestra que

$$Q(\xi,\xi_1) - Q_0(\xi) = -\frac{15}{16}\alpha\xi(2\xi_1 - \xi)^2\Big(3\xi^2 - 4\xi\xi_1 + 4\xi_1^2 - \frac{12\beta}{5\alpha}\Big),$$

entonces existe $c > 0$ tal que

$$\Big|3\xi^2 - 4\xi\xi_1 + 4\xi_1^2 - \frac{12\beta}{5\gamma}\Big| \leq c(1 + \xi^2 + \xi_1^2),$$

por consiguiente

$$|Q(\xi,\xi_1) - Q_0(\xi)| \leq c|\xi|(2\xi_1 - \xi)^2(1 + \xi^2 + \xi_1^2),$$

lo cual implica

$$|2\xi_1 - \xi| \geq c|\xi|^{-\frac{1}{2}}(1 + \xi^2 + \xi_1^2)^{-\frac{1}{2}}|Q(\xi,\xi_1) - Q_0(\xi)|^{\frac{1}{2}},$$

luego por el lema (2.2) se obtiene la desigualdad en (2.2).

Ahora suponga $|\xi| \leq M$ y $|\xi_1| \geq M$, entonces $|Q(\xi,\xi_1)| \leq c|\xi||\xi_1|^4$, luego $|\xi_1| \geq c|\xi|^{-\frac{1}{4}}|Q(\xi,\xi_1)|^{\frac{1}{4}}$, ahora utilizando el lema (2.2), se tiene

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\right| \geq c|\xi||\xi_1|^3 \geq c|\xi|^{\frac{1}{4}}|Q(\xi,\xi_1)|^{\frac{3}{4}}.$$

□

Lema 2.4. *Si* $b > 1/2$*, entonces para todo* $\xi \neq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$*, existe* $c > 0$ *tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1}{(1 + |\tau - P(\xi - \xi_1) - P(\xi_1)|)^{2b}} \leq c|\xi|^{-\frac{1}{4}}(1 + |\xi|)^{-\frac{15}{4}}(1 + |\tau - P(\xi)|)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Demostración. Como $P(\xi - \xi_1) + P(\xi_1) = P(\xi) + Q(\xi,\xi_1)$ la prueba se reduce a mostrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1}{(1 + |\tau - P(\xi) - Q(\xi,\xi_1)|)^{2b}} \leq c|\xi|^{-\frac{1}{4}}(1+|\xi|)^{-\frac{15}{4}}(1+|\tau - P(\xi)|)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

De ahora en adelante se denotará $\quad Q = Q(\xi,\xi_1) \;$ y $\; Q_0 = Q_0(\xi)$.

Sea M como en los lemas anteriores. Suponga $|\xi| \geq M$, entonces por los lemas (2.3) y (1.2)(2) se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1}{(1+|\tau - P(\xi) - Q|)^{2b}} \\
&\leq c|\xi|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\tau - P(\xi) - Q|)^{-2b}(1+\xi^2+\xi_1^2)^{-\frac{1}{2}}|Q-Q_0|^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\Big| d\xi_1 \\
&\leq c|\xi|^{-\frac{1}{2}}(1+|\xi|)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\tau - P(\xi) - Q|)^{-2b}|Q-Q_0|^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\Big| d\xi_1 \\
&\qquad \leq c(1+|\xi|)^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\tau - P(\xi) - \lambda|)^{-2b}|\lambda - Q_0|^{-\frac{1}{2}} d\lambda \\
&\qquad \leq c(1+|\xi|)^{-\frac{3}{2}}(1+|\tau - P(\xi) + Q_0|)^{-\frac{1}{2}} \\
&\qquad \leq c(1+|\xi|)^{-\frac{3}{2}}(1+|Q_0|)^{-\frac{1}{2}}(1+|\tau - P(\xi)|)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \leq c(1+|\xi|)^{-4}(1+|\tau - P(\xi)|)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad = c|\xi|^{-\frac{1}{4}}(1+|\xi|)^{-\frac{15}{4}}(1+|\tau - P(\xi)|)^{\frac{1}{2}}|\xi|^{\frac{1}{4}}(1+|\xi|)^{-\frac{1}{4}} \\
&\qquad \leq c|\xi|^{-\frac{1}{4}}(1+|\xi|)^{-\frac{15}{4}}(1+|\tau - P(\xi)|)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos $|\xi| \leq M$, entonces de los lemas (2.3) y (1.2)(2) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1}{(1+|\tau - P(\xi) - Q|)^{2b}} \\
&= \int_{|\xi_1|\leq M} \frac{d\xi_1}{(1+|\tau - P(\xi) - Q|)^{2b}} + \int_{|\xi_1|\geq M} \frac{d\xi_1}{(1+|\tau - P(\xi) - Q|)^{2b}} \\
&\leq c_1 + c_2|\xi|^{-\frac{1}{4}} \int_{|\xi_1|\geq M} (1+|\tau - P(\xi) - Q|)^{-2b}|Q|^{-\frac{3}{4}}\Big|\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\Big| d\xi_1 \\
&\leq c|\xi|^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\tau - P(\xi) - \lambda|)^{-2b}|\lambda|^{-\frac{3}{4}} d\lambda \\
&\leq c|\xi|^{-\frac{1}{4}}(1+|\tau - P(\xi)|)^{-\frac{3}{4}} \\
&= c|\xi|^{-\frac{1}{4}}(1+|\xi|)^{-\frac{15}{4}}(1+|\tau - P(\xi)|)^{\frac{1}{2}}(1+|\xi|)^{\frac{15}{4}}(1+|\tau - P(\xi)|)^{-\frac{5}{4}} \\
&\leq c|\xi|^{-\frac{1}{4}}(1+|\xi|)^{-\frac{15}{4}}(1+|\tau - P(\xi)|)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.5. *Si $s \geq 1$, $b \in (1/2, 3/4)$ y $b' \in (1/2, b]$, entonces existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{|\xi|(1+|\xi|)^s}{(1+|\tau - P(\xi)|)^{1-b}} E(\xi,\tau) \leq c, \tag{2.6}$$

donde

$E(\xi,\tau) =$

$$\left(\iint \frac{|\xi_1|^2|\xi-\xi_1|^2 \quad d\xi_1\ d\tau_1}{(1+|\xi_1|)^{2s}(1+|\xi-\xi_1|)^{2s}(1+|\tau-\tau_1-P(\xi-\xi_1)|)^{2b'}\ (1+|\tau_1-P(\xi_1)|)^{2b'}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Observemos que para todo ξ, ξ_1 se tiene

$$1+|\xi| \leq (1+|\xi_1|)(1+|\xi-\xi_1|).$$

Luego, de la desigualdad anterior, los lemas (1.2) y (2.4), existe $c>0$ tal que

$$\iint \frac{|\xi_1|^2|\xi-\xi_1|^2 \quad d\xi_1\ d\tau_1}{(1+|\xi_1|)^{2s}(1+|\xi-\xi_1|)^{2s}(1+|\tau-\tau_1-P(\xi-\xi_1)|)^{2b'}\ (1+|\tau_1-P(\xi_1)|)^{2b'}}$$
$$\leq c\int \frac{|\xi_1|^2|\xi-\xi_1|^2 \quad d\xi_1}{(1+|\xi_1|)^{2s}(1+|\xi-\xi_1|)^{2s}\ (1+|\tau-P(\xi)-Q|)^{2b'}}$$
$$= c\int \frac{|\xi_1|^2|\xi-\xi_1|^2 \quad d\xi_1}{(1+|\xi_1|)^{2}(1+|\xi_1|)^{2s-2}(1+|\xi-\xi_1|)^{2}(1+|\xi-\xi_1|)^{2s-2}\ (1+|\tau-P(\xi)-Q|)^{2b'}}$$
$$\leq c\frac{1}{(1+|\xi|)^{2(s-1)}}\int \frac{d\xi_1}{(1+|\tau-P(\xi)-Q|)^{2b'}}$$
$$\leq c(1+|\xi|)^{2(1-s)}|\xi|^{-\frac{1}{4}}(1+|\xi|)^{-\frac{15}{4}}(1+|\tau-P(\xi)|)^{\frac{1}{2}}.$$

Por consiguiente, para $s\geq 1$, $b\in(1/2,3/4)$ y reemplazando la última estimativa en (2.6) se tiene

$$|\xi|(1+|\xi|)^s(1+|\tau-P(\xi)|)^{b-1}(1+|\xi|)^{1-s}|\xi|^{-\frac{1}{8}}(1+|\xi|)^{-\frac{15}{8}}(1+|\tau-P(\xi)|)^{\frac{1}{4}} \leq c.$$

□

Demostración del teorema 2.1. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el lema anterior se obtiene

$$\Big\|\frac{\xi(1+|\xi|)^s}{(1+|\tau-P(\xi)|)^{1-b}}\times$$

$$\times\iint\frac{\xi_1(\xi-\xi_1)\hat{f}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\hat{f}(\xi_1,\tau_1)\,d\xi_1 d\tau_1}{(1+|\xi-\xi_1|)^s(1+|\tau-\tau_1-P(\xi-\xi_1)|)^{b'}(1+|\xi_1|)^s(1+|\tau_1-P(\xi_1)|)^{b'}}\Big\|_{L^2_\xi L^2_\tau}$$

$$\leq \sup_{\xi,\tau}\frac{\xi(1+|\xi|)^s}{(1+|\tau-P(\xi)|)^{1-b}}\times$$

$$\times\left(\iint\frac{|\xi_1|^2|\xi-\xi_1|^2 d\xi_1 d\tau_1}{(1+|\xi-\xi_1|)^{2s}(1+|\tau-\tau_1-P(\xi-\xi_1)|)^{2b'}(1+|\xi_1|)^{2s}(1+|\tau_1-P(\xi_1)|)^{2b'}}\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|^2_{L^2_\xi L^2_\tau}.$$

□

3. Prueba del teorema principal

Consideremos la ecuación integral del PVI (0.1) adaptada a los espacios $X^{s,b}$

$$u(t) = \psi(t)W(t)u_0 - \psi(t)\ \frac{\gamma}{2}\int_0^t W(t-t')\left(\psi_\delta^2(t')u_x u_{xx}(t')\right)dt',$$

donde $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, con $\psi \equiv 1$ sobre $[-1/2, 1/2]$, *supp* $\psi \subseteq (-1,1)$.
Definimos el conjunto,

$$\mathcal{C}_{u_0} = \{u \in X^{s,b} : \|u\|_{X^{s,b}} \leq 2c\|u_0\|_{H^s}\}$$

y la función:

$$\Phi_{u_0}(u)(t) = \psi(t)W(t)u_0 - \psi(t)\frac{\gamma}{2}\int_0^t W(t-t')\{\psi^2(\delta^{-1}t')\partial_x(u_x^2)(t')\}dt',$$

Suponga $b \in (1/2, 3/4)$ y $b' \in (1/2, b)$, entonces por lema (1.1) y el teorema (2.1), se tiene

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{u_0}(u)\|_{X^{s,b}} &\leq c\|u_0\|_{H^s} + \left\|\psi(t)\frac{\gamma}{2}\int_0^t W(t-t')\{\psi_\delta^2(t')\partial_x(u_x^2)(t')\}dt'\right\|_{X^{s,b}} \\
&\leq c\|u_0\|_{H^s} + c\left\|(\partial_x(\psi_\delta^2 u_x^2)\right\|_{X^{s,b-1}} \\
&\leq c\|u_0\|_{H^s} + c\|\psi_\delta u\|^2_{X^{s,b'}} \\
&\leq c\|u_0\|_{H^s} + c\delta^{(b-b')/(2b)}\|u\|^2_{X^{s,b}} \\
&\leq c\|u_0\|_{H^s} + 4c^3\delta^{(b-b')/(2b)}\|u_0\|^2_{H^s}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente se elige δ de tal forma que $4c^2\delta^{(b-b')/(2b)}\|u_0\|_{H^s} < 1/2$, y por lo tanto $\Phi(\mathcal{C}_{u_0}) \subseteq \mathcal{C}_{u_0}$.

Analogamente se demuestra que para el mismo δ se cumple

$$\|\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)\|_{X^{s,b}} \leq 4c^2\delta^{(b-b')/(2b)}\|u_0\|_{H^s}\|u-v\|_{X^{s,b}} \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_{X^{s,b}},$$

esto es, Φ_{u_0} resulta ser una contracción en el espacio métrico completo$(\mathcal{C}_{u_0}, \|\cdot\|_{X^{s,b}})$, luego por el teorema de punto fijo de Banach existe una única función $u \in \mathcal{C}_{u_0}$ tal que

$$u(t) = \psi(t)W(t)u_0 - \frac{\psi(t)}{2}\int_0^t W(t-t')\{\psi^2(\delta^{-1}t')\partial_x(u_x^2)(t')\}dt'. \tag{3.1}$$

Escogemos $T = \delta < 1$, y nuestra solución u corresponde a $u|_{[0,T]}$. Ahora mostremos la propiedad de persistencia

$$u \in C\big([0,T] : H^s(\mathbb{R})\big)$$

Sea $0 \leq \tilde{t} < t \leq T$ y $t - \tilde{t} \leq \Delta t$, luego de (3.1) se obtiene

$$u(t) = W(t-\tilde{t})u(\tilde{t}) - \frac{1}{2}\int_{\tilde{t}}^{t} W(t-t')\{\partial_x(u_x^2)(t')\}dt',$$

ahora por el lema (1.1) se tiene

$$\begin{aligned}
\|u(t)-u(\tilde{t})\|_{H^s} &\leq \|W(t-\tilde{t})u(\tilde{t}) - u(\tilde{t})\|_{H^s} \\
&+ c\Big\|\int_{\tilde{t}}^{t} W(t-t')\{\psi_{\Delta t}^2(t'-\tilde{t})\partial_x(u_x^2)(t')\}dt'\Big\|_{H^s} \\
&\leq \|W(t-\tilde{t})u(\tilde{t}) - u(\tilde{t})\|_{H^s} + c\|\psi_{\Delta t}(\cdot - \tilde{t})\partial_x(u_x^2)\|_{X^{s,b-1}} \\
&\leq \|W(t-\tilde{t})u(\tilde{t}) - u(\tilde{t})\|_{H^s} + c(\Delta t)^{\frac{b'-b}{8(1-b)}}\|\partial_x(u_x^2)\|_{X^{s,b'-1}} \\
&\leq \|W(t-\tilde{t})u(\tilde{t}) - u(\tilde{t})\|_{H^s} + c(\Delta t)^{\frac{b'-b}{8(1-b)}}\|u\|_{X^{s,b'}}^2 = o(1)
\end{aligned}$$

Dado que $\Delta t \to 0$, se obtiene la propiedad de persistencia.

La unicidad y la dependencia continua respecto al dato inicial se demuestran usando el mismo tipo de argumentos siendo rutinarios dentro de la literatura y por brevedad se omiten.

Bibliografía

[1] J. Bourgain, *Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations*, Geometric and Functional Anal., 3(1993), 107–156, 209–262.

[2] J. P. Boyd, *Weakly non-local solitons for capillary-gravity waves: fifth degree Korteweg-de Vries equation*, Physica D, 48(1991), 129–146.

[3] S. B. Cui, D. G. Deng, S. P. Tao, *Global existence of solutions for the Cauchy Problem of the Kawahara equation with L^2 initial data*, Acta Math. Sinica, English Series, 22(2006), 1457–1466.

[4] S. B. Cui, S. P. Tao, *Local and global existence of solutions to initial value problems of nonlinear Kaup-Kupershmidt equations*, Acta Math. Sinica, English Series, 21(2005), 881–892.

[5] A. T. Ilichev, A. V. Marchenko, *Propagation of long nonlinear waves in a ponderable fluid beneath an ice sheet*, Izv. Akad. Nauk SSSR Meckh Zhidk. Gaza, (1989), 88–95.

[6] D. J. Kaup, *On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class* $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$, Stud. Appl. Math., 62(1980), 189–216.

[7] T. Kawahara, *Oscillatory solitary waves in dispersive media*, J. Phys. Soc. Japan, 33(1972), 260–264.

[8] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana U. Math. J., 40(1991), 33–69.

[9] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries* , J. Amer. Math. Soc., 4(1991), 323–347.

[10] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. J., 71(1993), 1–21.

[11] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *A bilinear estimative with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc., 9(1996), 573–603.

[12] B. A. Kupershmidt, *A super Korteweg-de Vries equations: an integrable system*, Physics Letters, A, 102(1984), 213–218.
[13] S. Kwon, *On the fifth order KdV equation: Local well-posedness and lack of uniform continuity of the solution map*, pre-impreso.

Recibido: Noviembre de 2007. Aceptado para publicación: Abril de 2008