Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XV No. 1 (2008), pp. 56–69

LÓGICAS Y CATEGORÍAS INTERMEDIAS

FANNY MILENA SANTAMARÍA RAMÍREZ (*)

RESUMEN. En el interior de cada topos existe una lógica intermedia natural definida por las clases de álgebras de Heyting y esas álgebras determinan cada lógica intermedia. La construcción de las alegorías de Freyd es la que materializa el puente entre lógicas intermedias y topos [F-S]. En este documento se expone la manera de encontrar el topos que modele una lógica intermedia, en particular, la modelización de la lógica de Gödel.

PALABRAS CLAVES. Lógica intermedia, álgebras de Heyting, alegorías de Freyd, topos.

2000 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 03B55.

ABSTRACT. Inside every topos, there is a natural intermediate logic defined by classes of Heyting algebras, and these algebras determined each intermediate logic. Freyd's free allegories are constructions related to the generic intermediate logic of the topos [F-S]. This document sets out a way to find intermediate logic topoi, specifically Gödel logic topos.

KEY WORDS AND PHRASES. Intermediate logic, Heyting algebras, Freyd's allegories, topos.

1. INTRODUCCIÓN

En el axioma del tercio excluso $(p \vee \neg p)$ difieren la lógica clásica $Clas_L$ e intuicionista Int_L, y se tiene la inclusión estricta, $Int_L \subset Clas_L$. Una lógica intermedia $\mathcal{L}$ construida sobre un lenguaje L contiene por definición los axiomas de Int_L, pero no contiene un axioma equivalente al tercio excluso, es decir $Int_L \subset \mathcal{L} \subset Clas_L$. Una alegoría es una categoría en la que los morfismos se observan no como funciones sino como relaciones. Existen correspondencias interesantes entre alegorías y categorías intermedias (entre regulares y topos). A su vez cada categoría intermedia da lugar a una lógica intermedia. En particular, la lógica de topos está ligada a las familias de álgebras de Heyting en

(*) Fanny Milena Santamaría Ramírez. E-mail: fmsantamariar@unal.edu.co.

el interior del topos [McL], así como las álgebras de Boole lo están a la lógica clásica. La construcción de las alegorías de Freyd es la que materializa el puente entre lógicas intermedias y topos [F-S]. El encontrar el topos que modele una lógica intermedia, y en particular, la modelización de la lógica de Gödel, es lo que se expondrá en este artículo.

2. Lógicas intermedias

Una lógica intermedia $\mathcal{L}$ construida sobre un lenguaje L es una lógica cerrada para modus ponens y substitución tal que $Int_L \subset \mathcal{L} \subset Clas_L$. Definiremos las lógicas Int_L y $Clas_L$ usando modelos de Kripke con la intención de caracterizar las lógicas intermedias mediante familias de marcos de Kripke.

Una manera usual de definir una lógica es a partir de un lenguaje L, un conjunto de fórmulas $Form_L$, una familia de modelos y una relación $\models$ entre modelos y fórmulas. La lógica será el conjunto de fórmulas que todos los modelos de la familia verifican. Que un modelo M verifique una fórmula ϕ significa que la pareja (M, ϕ) está en la relación $\models$. En el caso de la lógica intuicionista la familia será la que forman todos los modelos de Kripke. Los modelos de Kripke amplian el espectro de los modelos clásicos, dado que incluyen un tiempo que los dota de memoria.

Para definir un modelo de Kripke necesitamos un lenguaje L y un conjunto no vacío ordenado $F := \langle W, R\rangle$. Un lenguaje L contiene un conjunto infinito enumerable $\mathcal{V}$ de variables proposicionales, el conjunto de conectivos $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, una constante proposicional $\perp$ que representa la contradicción, y un conjunto de fórmulas definidas por inducción usando a los conectivos, con fórmulas atómicas los elementos de $\mathcal{V} \cup \{\perp\}$.

El modelo de Kripke $M = \langle F, V\rangle$ consta de un conjunto ordenado F y de una función de valuación $V : \mathcal{V} \rightarrow Up_R(W)$, donde los elementos de $Up_R(W)$ son los subconjuntos cerrados hacia derecha del conjunto ordenado F. En la definición de la relación $\models$ se observa que el tiempo del modelo es el conjunto ordenado y la memoria es la valuación. Como el modelo incluye al tiempo en F decimos que cada elemento de W es un instante del modelo, por lo tanto la relación $M \models \phi$ se tiene si se verifica en cada instante del modelo, es decir, si $(M, x) \models \phi$ para todo $x \in W$. Entonces definimos por inducción la relación $(M, x) \models \phi$ para cada instante x de un modelo $M = \langle F, V\rangle$ como sigue:

$(M,x) \not\models \bot$		
$(M,x) \models p$	sii	$x \in V(p)$
$(M,x) \models \phi \wedge \psi$	sii	$(M,x) \models \phi$ y $(M,x) \models \psi$
$(M,x) \models \phi \vee \psi$	sii	$(M,x) \models \phi$ o $(M,x) \models \psi$
$(M,x) \models \phi \to \psi$	sii	para toda $y \in W$ tal que xRy $(M,y) \models \phi$ implica $(M,y) \models \psi$
$(M,x) \models \neg\phi$	sii	para toda $y \in W$ tal que xRy, se cumple que $(M,y) \not\models \phi$

Como $V(p) \in Up_R(W)$, si en el instante x se verifica $(M,x) \models p$ entonces en un instante posterior y (xRy) también se verifica $(M,y) \models p$. Luego, es así como la valuación V otorga memoria al modelo.

La lógica clásica es el conjunto de fórmulas verificadas por los modelos de Kripke que solo tienen un instante, es decir F es un punto reflexivo. Por lo tanto, si en un modelo de Kripke tenemos más de un instante, es posible que en un instante se verifique p y en otro no, es decir que el modelo no satisfaga $p \vee \neg p$. Los axiomas de Int_L son los mismos de $Clas_L$ excepto $p \vee \neg p$, sin embargo existe más de una lógica intermedia en realidad, infinitas que se obtienen agregando un axioma a Int_L que no es equivalente al tercio excluso.

Ejemplo 1. La lógica de Gödel (LC) se obtiene de cerrar el conjunto $Int_L \cup \{(p \to q) \vee (q \to p)\}$ por Modus ponens y substitución. LC es una lógica intermedia pues existen marcos de Kripke que la verifican que no satisfacen $Clas_L$ y otros que no satisfacen Int_L. Existe un modelo de Kripke basado en un orden que contiene solo dos puntos reflexivos que verifica LC y no verifica a $Clas_L$; y existe un modelo de Kripke basado en un orden de tres elementos con un mínimo y dos elementos no comparables que no verifica LC.

Ejemplo 2. La lógica de Jankov (KC) se obtiene cerrando para modus ponens y substitución el conjunto $Int_L \cup \{\neg p \vee \neg\neg p\}$. El orden lineal de 2 elementos refuta a $Clas_L$ y verifica a KC. El orden lineal de 2 elementos junto con un punto reflexivo refuta a KC. Por lo tanto KC es una lógica intermedia. KC es diferente de LC porque el orden $\langle W, R\rangle$ tal que $W = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ y $R = \{(x_0,x_0),(x_0,x_1),(x_0,x_2)(x_0,x_3),(x_2,x_3),(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3)\}$, satisface a KC y refuta a LC.

La familia de todas las lógicas intermedias resulta ser un retículo completo y denso [B], donde el inf es la intersección de lógicas y el sup se obtiene al hacer la unión y cerrar para las reglas de inferencia [C-Z].

Es natural preguntarse qué tipos de órdenes verifican una lógica intermedia y preguntarse si éstos caracterizan a la lógica. Es decir, la idea es encontrar qué órdenes son los que siempre verifican las fórmulas de la lógica, donde 'siempre' significa cualquier modelo que se construya sobre el orden. Decimos $F \models \phi$ si para cualquier valuación V sobre F el modelo $M = \langle F, V \rangle$ satisface ϕ. Los órdenes F en este contexto son llamados *marcos de Kripke*. Así Int_L es la lógica satisfecha por todos los marcos de Kripke y $Clas_L$ la satisfecha por el marco que sólo tiene un punto reflexivo.

Surge así una nueva pregunta:¿Toda lógica intermedia es caracterizada por una familia de marcos de Kripke? La respuesta no es sencilla pero se puede responder que es caracterizable por familias de álgebras de Heyting y que todos los marcos de Kripke corresponden a álgebras de Heyting.

Las lógicas pueden caracterizarse por modelos definidos sobre álgebras. Para el lenguaje L cuyos símbolos lógicos corresponden al conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$, una $L-$álgebra $\mathcal{A}$ es un conjunto A sobre el que se definen tres operaciones binarias $\wedge, \vee, \rightarrow$ y una operación $\perp$ de aridad 0. Para variables $p_1, p_2, ..., p_n$ sobre A, una fórmula $\phi(p_1, ..., p_n)$ se construye por inducción a partir de las variables y la constante $\perp$, usando las operaciones del álgebra. Un modelo sobre la $L-$álgebra es una pareja $\langle \mathcal{A}, \top \rangle$ con $\top$ el elemento de A que se obtiene de $\top := (\perp \rightarrow \perp)$. Para definir la relación $\models$ es necesario definir las valuaciones. Una valuación es una función $V : \mathcal{V} \rightarrow A$ donde $\mathcal{V}$ es el conjunto de variables sobre A y la función verifica la igualdad $V(\phi(p_1, ..., p_n)) = \phi(V(p_1), ..., V(p_n))$. Por lo tanto, definimos $\langle \mathcal{A}, \top \rangle \models \phi$ si y sólo si para toda valuación V sobre A se cumple $V(\phi) = \top$. En adelante escribiremos $\mathcal{A} \models \phi$ en lugar de $\langle \mathcal{A}, \top \rangle \models \phi$.

Ejemplo 3. Para el álgebra $\mathcal{A} := \langle \{V, F\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \perp \rangle$ con las operaciones definidas por las tablas de verdad de la lógica clásica, se tiene $\mathcal{A} \models Clas_L$.

Proposición 4. *Para toda lógica intermedia $\mathcal{L}$ y toda fórmula ϕ del lenguaje L, $\phi \in \mathcal{L}$ si y sólo si $\mathcal{A} \models \phi$ para toda álgebra de Heyting $\mathcal{A}$ que verifica a $\mathcal{L}$.*

Entonces las álgebras de Heyting caracterizan a las lógicas intermedias. La prueba de este hecho se puede consultar en [C-Z] capítulo 7.

La caracterización por marcos de Kripke que buscamos requiere una correspondencia entre los marcos y las álgebras de Heyting.

Definición 5. Para un marco de Kripke $F = \langle W, R \rangle$ definimos el álgebra dual F^+ sobre el conjunto $Up_R(W)$, tal que $F^+ = \langle Up_R(W), \cap, \cup, \Rightarrow, \emptyset \rangle$, y el operador $\Rightarrow$ se define como sigue:

$$U \Rightarrow V := \{x \in W : x{\uparrow_R} \cap U \subseteq V\}, \text{ donde } x{\uparrow_R} := \{y \in W : xRy\}.$$

El álgebra dual de todo marco de Kripke resulta ser un álgebra de Heyting (Véase [C-Z] teorema 7.20). Sin embargo, esto no garantiza que si una lógica intermedia es caracterizada por una familia de álgebras de Heyting, podamos decir que los respectivos marcos de Kripke también la caracterizan. Primero, es necesario establecer la relación entre las fórmulas que verifica un marco y las que verifica su álgebra dual, y, segundo, definir una construcción inversa al dual de un marco de Kripke.

Proposición 6. *Para todo marco de Kripke F y toda fórmula ϕ, $F \models \phi$ si y sólo si $F^+ \models \phi$.*

Este resultado es posible debido a que las valuaciones sobre los marcos de Kripke corresponden a las valuaciones sobre las álgebras. Específicamente, si V es una valuación sobre F entonces $V^+(\phi) = \{x : (\langle F, V\rangle, x) \models \phi\}$ es una valuación sobre F^+, la que llamaremos valuación dual. Además, toda valuación sobre F^+ es una valuación dual. La demostración requiere además de este resultado una prueba inductiva sobre la fórmula ϕ.

A pesar de la correspondencia entre las valuaciones, la construcción dual no nos garantiza que toda álgebra de Heyting corresponda a un marco de Kripke.

Proposición 7. *Toda álgebra de Heyting completa es isomorfa al dual de un marco de Kripke.*

Requerimos para la demostración el *sup* de un conjunto que no necesariamente es finito, así que el álgebra debe ser completa o debe tener un *sup* para cada conjunto $X \in Up_R(W)$. Para detalles de la demostración véase [C-Z] teorema 7.30.

Aunque la caracterización por álgebras de Heyting no parece darnos una caracterización por marcos de Kripke, si existe un modelo de Kripke que caracteriza a toda lógica intermedia y es llamado el *modelo canónico* de la lógica intermedia (véase [C-Z] capítulo 5). Sin embargo, el obtener una caracterización por marcos de Kripke podría brindarnos una referencia de las caracteristicas del topos de una lógica intermedia. Por lo tanto, lo más natural sería buscar una caracterización de las álgebras de Heyting que caracterizan la lógica. De ahí se tendrá una caracterización de los marcos de Kripke que verifican la lógica, aunque éstos no puedan separarla.
Lo anterior no significa que no existan lógicas intermedias caracterizadas por marcos de Kripke y un ejemplo es la lógica LC.

Ejemplo 8. La lógica intermedia LC es caracterizada por las familia de órdenes lineales finitos.

Puede probarse que los marcos de Kripke *fuertemente conexos* caracterizan a LC, pero seleccionar dentro de éstos a los órdenes lineales es un trabajo que requiere un método más sofisticado llamado *filtración*. Para detalles de esta caracterización véase [C-Z] capítulo 5. La prueba de la caracterización por marcos fuertemente conexos sólo requiere la definición: un marco de Kripke es fuertemente conexo si todo par de elementos con un antecesor en común es comparable.

3. Alegorías libres

Freyd construye las alegorías con el objeto de obtener una axiomatización de las categorías en las que se observa a los morfismos no como funciones sino como relaciones. El paradigma de estas categorías es la categoría $Rel(\mathcal{C})$ que se obtiene de una categoría regular $\mathcal{C}$ construyendo relaciones a partir de sus morfismos. El lector que requiera detalles de la construcción $Rel(\mathcal{C})$ puede consultar [S] ejemplo 79. Al construir la alegoría libre para una teoría dada no sólo obtiene una construcción categórica para una lógica, sino también una categoría sumergible fiel y plenamente en una categoría de la forma $Rel(\mathcal{C})$ [F-S]. Lo que significa que obtiene un ejemplo de alegoría aún más representativo que el paradigma sobre el que se axiomatizó.

Dado que para la construcción de alegoría libre que expondremos más adelante se verifica el siguiente teorema, definiremos alegoría de potencia en lugar de sólo definir alegoría puesto que nuestro interés es obtener un topos canónico para una lógica.

Proposición 9. *Si la alegoría libre A_T es una alegoría de potencia, entonces obtendremos un topos al aplicar las construcciones $Map, Split$ y Cor a A_T* [F-S].

Expondremos entonces las definiciones que aparecen en el enunciado de esta proposición que es la herramienta final para encontrar el topos que buscamos. La herramienta principal es la alegoría libre y hacia la construcción de ésta se enfoca la presente sección.

3.1. Alegoría de potencia.

Definición 10. Una alegoría es una categoría que adicional a la operación binaria de composición tiene otras operaciones sobre los morfismos. La alegoría de potencia es una alegoría que tiene operaciones adicionales a las de una alegoría. A continuación listamos las operaciones y sus propiedades diferenciando las que la alegoría de potencia tiene de más.

Para un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ tenemos las operaciones unarias:

Alegoría:		**Alegoría de potencia**:	
(Dominio)	$Dom\ f := 1_A$	(Cero)	$A \xrightarrow{0_f} B$
(Rango)	$Ran\ f := 1_B$	(Pertenencia inversa)	$\bullet \xrightarrow{\ni_f} B$
(Recíproco)	$B \xrightarrow{f^o} A$		

Para f y g morfismos tenemos las operaciones binarias y parciales:

Alegoría:

$A \xrightarrow{f \cap g} \bullet,$ interseción para morfismos con $Dom\ f = Dom\ g$

Alegoría de potencia:

$A \xrightarrow{f \cup g} B,$ unión para morfismos con $Dom\ f = Dom\ g$ y $Ran\ f = Ran\ g$

$\xrightarrow{f/g} Dom\ g,$ división para morfismos con $Ran\ f = Ran\ g$.

Las propiedades de estas operaciones son:

> **Alegoría**: Las operaciones $\cap, \cup$ conforman un retículo distributivo. La composición se distribuye en la unión, y aunque no se distribuye en la intersección se tiene una de las contenencias $j \circ (f \cap g) \subset (j \circ f) \cap (j \circ g)$. El recíproco es idempotente y preserva la composición, la unión y la intersección. Y finalmente, se tiene también una propiedad de modularidad $fi \cap k \subset f(i \cap f^o k)$.
> **Alegoría de potencia**: 0_f es el neutro para la unión y preserva las operaciones de composición y recíproco. La división es análoga a lo que sería un inverso para la composición: $h \subset f/g$ si y sólo si $gh \subset f$. Por último, la pertenencia inversa verifica un par de propiedades que al traducirse al interior de una alegoría libre enuncian los axiomas conjuntistas de compresión y extensión.

Para detalles, véase [F-S] o [S].

La contenencia que aparece en la definición de alegoría no es la conjuntista sino la definida por la intersección, como en un retículo.

3.2. Lógica de orden superior. Para una teoría T escrita en el lenguaje de una *lógica de orden superior* es posible construir una alegoría A_T que sea de potencia [F-S]. Para este caso definiremos la lógica no por sus modelos sino por sus reglas de inferencia. Una lógica de orden superior consta de un conjunto de tipos Σ, un conjunto infinito de variables $\mathcal{V}$, un conjunto de predicados $\mathcal{P}$, los conectivos $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, y los cuantificadores $\forall, \exists$. Dentro del conjunto de predicados tenemos a los predicados de aridad cero $\perp$ y $\top$ (contradicción y verdad), y los predicados binarios $\in_\sigma$ y $=_\sigma$ para cada $\sigma \in \Sigma$. Existe una correspondencia entre tipos y variables, y entre palabras finitas de tipos y predicados. A cada tipo le corresponde una familia infinita de variables y cada variable tiene un tipo. A cada predicado le corresponde una palabra finita de tipos de longitud igual a su aridad. Para un predicado P al que le corresponde una palabra finita $\sigma_1 ... \sigma_n$ de tipos, solo se puede enunciar $P(x_1, ..., x_n)$ si x_i corresponde al tipo σ_i. En el caso de los predicados $\in_\sigma$ y $=_\sigma$ la palabra correspondiente es $\sigma\sigma$. La lógica tal como se enunció antes corresponde al caso particular en el que sólo se tiene un tipo en Σ.

En una lógica de orden superior existe una relación binaria $\rightharpoonup$ sobre el conjunto de las fórmulas, llamada aserción y una teoría es un conjunto de aserciones $A \rightharpoonup B$. En cuanto a las reglas de inferencia todas éstas enuncian las propiedades de esta relación [F-S]. La relación es un preorden con la disyunción como sup, la conjunción como inf, un máximo $\top$, un mínimo $\bot$, y con $\rightarrow$ como operación de residuación. Los cuantificadores universal y existencial aparecen como un ínfimo y un máximo de la familia de fórmulas que se puede obtener al hacer substitución en la fórmula cuantificada. Además la substitución preserva el orden. Enunciaremos aquí solo los axiomas que involucran al predicado de pertenencia $\in_\sigma$:

$$(\in=) \qquad \forall x(\ (x \in_\sigma y) \leftrightarrow (x \in_\sigma y')\ ) \rightharpoonup (y = y')$$

$$(\in \exists) \qquad \top \rightharpoonup \exists y \forall x ((x \in_\sigma y) \leftrightarrow A),\ \text{siempre que } y \text{ no sea libre en } A$$

Deducción. Decimos que $A \rightharpoonup B$ se infiere de T, simbólicamente $T \vdash (A \rightharpoonup B)$, si y sólo si $A \rightharpoonup B$ se obtiene de aplicar finitas reglas de inferencia a aserciones de T; decimos también que $A \equiv B$ si A y B tienen las mismas variables libres y si se tienen $A \rightharpoonup B$ y $B \rightharpoonup A$.

Semántica. Definimos una *semántica funcional primitiva*: el universo es una familia de conjuntos $\{S_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$; las instanciaciones de variables libres de tipo σ en una fórmula se hacen sólo con elementos de S_σ. Para cada predicado P de tipo $\sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_n$, se define una función $\hat{P} : S_{\sigma_1} \times ... \times S_{\sigma_n} \rightarrow \{0, 1\}$; en particular, se fuerza $\hat{\bot} = 0, \hat{\top} = 1$, $(a \hat{=}_\sigma b) = 1$ si y sólo si $a = b$, para $a, b \in S_\sigma$. Siguiendo ahora con las fórmulas, sus interpretaciones se definen recursivamente mediante:

$$\begin{aligned}
(A \wedge B)^\wedge &= min\{\hat{A}, \hat{B}\}\\
(A \vee B)^\wedge &= max\{\hat{A}, \hat{B}\}\\
(A \to B)^\wedge &= 0 \text{ si y sólo si } \hat{A} = 1 \text{ y } \hat{B} = 0\\
(\forall x A)^\wedge &= min\{\hat{A}(a) : a \in S_\sigma, x \text{ de tipo } \sigma\}\\
(\exists x A)^\wedge &= max\{\hat{A}(a) : a \in S_\sigma, x \text{ de tipo } \sigma\}.
\end{aligned}$$

Una fórmula A es *válida* si $\hat{A} = 1$ para toda instancia de las variables que aparecen libres en A. Además, una aserción $A \rightharpoonup B$ es *válida* en este modelo si y sólo si $\hat{A} \leq \hat{B}$ para toda instancia de las variables libres en A y B.

3.3. Definición de Alegoría libre de Freyd. Para una teoría T en una lógica de orden superior definimos la relación $\equiv_T$ sobre el conjunto de las fórmulas de la lógica como $\phi(y) \equiv_T \phi(y')$ si y sólo si $T \vdash \phi(y) \equiv \phi(y')$. Esta relación es una relación de equivalencia y cada clase de equivalencia es llamada *fórmula derivada*.

La alegoría libre A_T es una categoría cuyos objetos son las palabras finitas de tipos. Un morfismo de una palabra α a una palabra β es una fórmula derivada que corresponde a la palabra de tipos $\alpha\beta$. Definimos a continuación las operaciones de la alegoría de potencia, usando los siguientes morfismos:

$$\alpha \xrightarrow{R(u,v)} \beta \xrightarrow{S(v,w)} \gamma \qquad \alpha \xrightarrow{T(u,v)} \beta \qquad \gamma \xrightarrow{Q(t,v)} \beta$$

Operaciones Unarias	Dominio	$Dom\ R(u,v) := \bigwedge(u = u)\alpha \xrightarrow{Dom\ R} \alpha$
	Rango	$Ran\ R(u,v) := \bigwedge(v = v)\beta \xrightarrow{Ran\ R} \beta$
	Recíproco	$R(u,v)^o := R(v,u)\beta \xrightarrow{R^o} \alpha$
	Pertenencia	$\ni_R := (\in_\beta)^o\beta \xrightarrow{\ni_R} \beta$
	Cero	$0_R := \bigvee[(u \neq u) \wedge (v \neq v)]\alpha \xrightarrow{0_R} \beta$
Operaciones Binarias	Composición	$S \circ R := \exists\bar{x}[R(u,\bar{x}) \wedge S(\bar{x},w)]\alpha \xrightarrow{S \circ R} \gamma$
	Intersección	$R \cap T := R(u,v) \wedge T(u,v)\alpha \xrightarrow{R \cap T} \beta$
	Unión	$R \cup T := R(u,v) \vee T(u,v)\alpha \xrightarrow{R \cup T} \beta$
	División	$T/Q := \forall z(Q(t,z) \to R(u,z))\alpha \xrightarrow{T/Q} \gamma$

Las propiedades de la alegoría de potencia se verifican gracias a las reglas de inferencia de la lógica de orden superior. Para consultar los detalles de la prueba véase [S].

Son muchos los detalles que falta exponer para poder concluir que el topos que se obtiene en la proposición 9 a partir de A_T es un modelo de la teoría de T. La idea aquí es mostrar que, módulo éstos resultados que se pueden encontrar en [F-S], podemos describir el topos que modele una lógica intermedia $\mathcal{L}$ tan solo definiendo una lógica de orden superior en la que sea posible enunciar los axiomas de $\mathcal{L}$. Entonces, enunciamos los axiomas de la lógica intermedia $\mathcal{L}$ como una teoría T y construimos A_T. El siguiente es un resultado concluyente de [F-S] que nos conduce a afirmar lo anterior.

Proposición 11. *En una lógica de orden superior se verifica el teorema de completitud.* $T \vDash_{\mathcal{S}} P$ *si y sólo si* $T \vdash P$*, con* $\mathcal{S}$ *una semántica funcional* [F-S].

3.4. Categorías $Map, Split$ **y** Cor**.** En el interior de una alegoría $\mathcal{A}$ podemos encontrar una gran variedad de morfismos. Las construcciones a continuación se obtienen creando nuevas categorías a partir de $\mathcal{A}$ escogiendo algunos morfismos particulares.

Definición 12.
Un morfismo $A \xrightarrow{f} A$ en $\mathcal{A}$ es *correflexivo* si $f \subset 1_A$. La categoría $Cor(\mathcal{A})$ es la subcategoría formada por los mofismos correflexivos de $\mathcal{A}$.
Un morfismo $A \xrightarrow{f} A$ en $\mathcal{A}$ es una *aplicación* si es entero ($1 \subset f^o f$) y simple ($ff^o \subset 1$). $Map(\mathcal{A})$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$.

Todo morfismo correflexivo resulta ser un morfismo idempotente. Por eso es posible construir la siguiente categoría a partir de la subcategoría $Cor(\mathcal{A})$.

Definición 13. Si $\mathcal{E}$ es una familia de morfismos idempotentes en $\mathcal{A}$, $Split(\mathcal{E})$ es la categoría tal que:

1. Los objetos de la categoría son los morfismos en $\mathcal{E}$.
2. Un morfismo $f \xrightarrow{h} g$ para $F \xrightarrow{f} F$ y $G \xrightarrow{g} G$ objetos de $Split(\mathcal{E})$, es un morfismo $F \xrightarrow{h} G$ en $\mathcal{A}$ tal que $hf = h = gh$.

4. Una lógica de orden superior para la Lógica de Gödel

El objetivo entonces es encontrar una lógica de orden superior en la que sea posible enuciar los axiomas de LC. La caracterización de LC por medio de órdenes lineales finitos nos indica cómo construir esta lógica: el conjunto de los números naturales contiene un representante de cada orden lineal finito, luego es natural comenzar por el conjunto de tipos $\Sigma = \omega$. Se intentaron varias formas de definir una función llamada *tipo extendido* que permitiera garantizar todos los axiomas de la lógica de orden superior. Este tipo extendido generaliza la noción de semántica funcional. Las variables son escogidas pensando en un conjunto ordenado infinito enumerable que, junto con el tipo extendido, logren que los predicados de pertenencia identifiquen ese orden. Sin embargo, no fue posible garantizar el axioma de separación en todos los casos.

En esta sección exponemos los dos intentos más destacados realizados para definir esta lógica.

4.1. Variables $(\omega + 1) \times (\omega + 1)$**.** La idea principal de esta definición es que las relaciones de pertenencia en la lógica ($\in_\sigma$) reproduzcan el orden de los naturales. Es decir, la variables deben estar 'ordenadas' por los predicados de pertenencia módulo el tipo extendido. Entonces se asigna a cada tipo de $\Sigma = \omega$ una copia de los naturales como su conjunto de variables correspondientes.

Σ			$\mathcal{V}$			
ω	0_ω	1_ω	2_ω	3_ω	...	ω_ω
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
1	0_1	1_1	2_1	3_1	...	ω_1
0	0_0	1_0	2_0	3_0	...	ω_0

La variables ω_i son necesarias para garantizar el axioma de separación en los casos atómicos donde la variable del cuantificador no aparece libre en la fórmula a separar.

Para las aserciones que definen un preorden sobre las fórmulas también buscamos que representen el orden de los naturales, módulo la equivalencia $\equiv$. Entonces el tipo extendido a partir del cual definiremos la validez de una aserción es una función $\# : Form_L \to \omega + 1$ tal que:

$$\#A = \begin{cases} 0, & \text{si } LC \vdash (\bot \leftrightarrow A) \\ \omega, & \text{si } LC \vdash (\top \leftrightarrow A) \end{cases} \qquad \#(n_i \in_{ij} m_j) = \begin{cases} j, & n \in m \\ 0, & n \notin m \end{cases}$$

La identidad de la izquierda garantiza los axiomas de LC, y la de la derecha que cada predicado $\in_\sigma$ indique el orden de los naturales sobre las variables de tipo σ. Las identidades para los predicados son:

$$\#(n_i =_i m_i) = 0, \quad m \neq n \qquad \#(P((n_1)_i ... (n_k)_i)) = i \text{ con } P \in \mathcal{P}_i$$

Y para el caso inductivo:

$\#(A \wedge B) = Min\{\#A, \#B\}$ $\qquad$ $\#\forall x A = Min\{\#A[x/y] : y \in \mathcal{V}\}$

$\#(A \vee B) = Max\{\#A, \#B\}$ $\qquad$ $\#\exists x A = Sup\{\#A[x/y] : y \in \mathcal{V}\}$

$\#(A \to B) = Sup\{\#D : \#(A \wedge D) \leq \#B\}$

Las substituciones en las fórmulas cuantificadas son las que se pueden hacer en diferente orden o simultáneamente [S]. Además, sobre estas substituciones decimos que la aserción $A \rightharpoonup B$ es válida cuando $\#A[\bar{x}/\bar{y}] \leq \#B[\bar{x}/\bar{y}]$.

Para estas definiciones se cumplen los axiomas de la lógica de orden superior, excepto el axioma de separación para algunas fórmulas atómicas y para varios casos inductivos. Las obstrucción principal en el caso atómico es la ausencia de los conjuntos unitarios para separar una igualdad. Y en el caso inductivo al suponer que podemos separar las fórmulas A y B por variables n_i y m_j respectivamente, la tricotomía del orden de los naturales diversifica los casos para la fórmula compuesta. Por lo tanto parece imposible empatar los dos casos de los predicados de pertenencia $\in_\sigma$ con la diversidad de casos de las fórmulas compuestas.

4.2. Conjuntos unitarios como variables. Del intento anterior surge la idea de definir las variables como conjuntos unitarios. Aquí nos desprendemos de las variables en los naturales para usar los conjuntos unitarios, con la intención de lograr que la función de tipo extendido # tome el valor ω en el consecuente de la aserción del axioma $(\in \exists)$ que incluye a la fórmula A, axioma que para la definición anterior falla en la igualdad. Vimos que cuando A es una igualdad necesitamos a los conjuntos unitarios entre las variables, así que el conjunto de variables $\mathcal{V}$ será $\{\{^k x_i\} : i \in \omega,\ k \in \omega + 1\}$, donde $\{^0 x_i\} = x_i,\ \{^1 x_i\} = \{x_i\},\ \{^2 x_i\} = \{\{x_i\}\}$, y así sucesivamente para $k < \omega$. En el caso de $\{^\omega x_i\}$ el superíndice no puede representar una cantidad ω de corchetes, y se entiende sólo como superíndice. Por lo tanto generalizamos esta idea colocando doble subíndice, y el conjunto de variables es de nuevo una familia de ω cadenas, cada una con un mínimo x_i^0 y un máximo x_i^ω. Para simplificar la notación escribiremos x_i^k en lugar de $\{^k x_i\}$. Por lo tanto definimos como sigue:

Σ			$\mathcal{V}$		
ω	$\{^\omega x_0\}$	$\{^\omega x_1\}$	$\{^\omega x_2\}$	$\{^\omega x_3\}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
2	$\{\{x_0\}\}$	$\{\{x_1\}\}$	$\{\{x_2\}\}$	$\{\{x_3\}\}$	...
1	$\{x_0\}$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	...
0	x_0	x_1	x_2	x_3	...

La definición del tipo extendido asignará el orden de las variables que corresponde a la pertenencia del elemento al conjunto unitario.

$$\#A = \begin{cases} 0, & \text{si } LC \vdash (\bot \leftrightarrow A) \\ \omega, & \text{si } LC \vdash (\top \leftrightarrow A) \end{cases} \qquad \#(x_i^k \in_{kl} x_j^l) = \begin{cases} l, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Para los predicados restantes la definición es análoga a la anterior

$$\#(x_i^k =_k x_j^k) = 0, \text{ si } i \neq j \qquad \#P(x_1^k ... x_n^k) = k \text{ con } P \in \mathcal{P}_i$$

El caso inductivo se define de la misma manera como en el caso anterior.

Con esta definición muchas de las relaciones que definían los predicados de pertenencia entre las variables desaparecen. Se creería entonces que ésto evitaría la diversificación de los casos para el paso inductivo de la demostración. Sin embargo, la diversificación aumenta y esto impide de nuevo que se verifique el axioma de separación, aunque en el caso atómico solo falle para los predicados P.

Observando el comportamiento de la función de tipo extendido en los casos en que el axioma de separación falla, podemos pensar que una primera idea intuitiva para corregir las obstrucciones encontradas, podría ser incluir nuevos predicados $\in_{ij}$ para las parejas de subíndices no considerados $i \geq j$ que no expresen pertenencia, sino la negación de $\in_{ji}$. Esperamos en el futuro poder modificar alguna de nuestras definiciones inductivas intermedias que parecen estar obstruyendo la prueba.

Referencias

[B] N. Bezhanishvili, *Lattices of intermediate and cylindric modal logics.* Tesis doctoral, 2006. (www.illc.uva.nl/Publications/Dissertations/DS-2006-02.text.pdf)

[Be] J. Bell, *Toposes and Local Set Theories An Introduction*, Oxford : Clarendon Press, 1988.

[C-Z] A. Chagrov & M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, Oxford : Clarendon Press, 1997.

[D] B. Davey & H. Priestley, *Introduction to lattices and order,* Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[F-S] P. Freyd & A. Scedrov, *Categories, Allegories,* Amsterdam : North Holland, 1990.

[J] P. Johnstone, *Stone spaces,* Cambridge : Cambridge University Press,1986.

[L] J. Lambek & Scott P. J., *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

[M] S. McLane & L. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic*, New York : Springer-Verlag, 1994.

[Mc] S. McLane, *Categories for the Working Mathematician*, New York : Springer-Verlag, 1971.

[McL] C. McLarty, *Elementary categories, Elementary toposes*, Oxford : Oxford science publications, 2001.

[S] F. Santamaría, *Lógicas y Categorías Intermedias*. Tesis de maestría en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2008.

Recibido: Febrero de 2008. Aceptado para publicación: Mayo de 2008