*Boletín de Matemáticas*
Nueva Serie, Volumen XV No. 2 (2008), pp. 84–91

# ECUACIÓN HOMOGÉNEA DE BOLTZMANN CON TÉRMINO DE FUERZA

RAFAEL GALEANO ANDRADES (*)
PEDRO ORTEGA PALENCIA (**)

RESUMEN. Se prueba un teorema de existencia y unicidad local para la ecuación homogénea de Boltzmann con término de fuerza integrable con respecto al tiempo.

PALABRAS CLAVES. Ecuación homogénea de Boltzmann, teorema del punto fijo de Banach, término de fuerza.

2000 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 35Q75, 82-02

ABSTRACT. We prove an existence theorem and local uniqueness for the homogeneus Boltzmann Equation with an force of term integrable with regard to the time.

KEY WORDS AND PHRASES. Homogeneus Boltzmann equation, Banach fixed point Theorem, force term.

## 1. INTRODUCCIÓN

La ecuación espacialmente homogénea de Boltzmann sin término fuerza es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,v) = Q(f,f)(t,v) \text{ sobre } (0,+\infty)\times\mathbb{R}^3 \\ f(0,v) = f_0(v) \text{ sobre } \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $f(0,v)$ es una función no negativa, la cual describe la evolución en el tiempo inicial de la distribución de las partículas esfericas, que se mueven con

(*) Rafael Galeano Andrades, Instituto de Matematicas, Universidad de Cartagena, Cartagena, Colombia. E-mail: rgaleanoa@unicartagena.edu.co

(**) Pedro Ortega Palencia, Instituto de Matematicas, Universidad de Cartagena, Cartagena, Colombia. E-mail: portegap@unicartagena.edu.co

Este artículo es un resultado del proyecto de investigación "Ecuaciones de Evolución de Tipo Cinético", financiado por la Universidad de Cartagena.

velocidad $v$. El lado derecho $Q(f,f)$, es llamado *operador de colisión* y viene dado por:

$$Q(f,f)(t,v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (f^{'} f_1^{'} - f f_1) B(\theta; |v-u|) dw du \tag{1.2}$$

aquí $f = f(v)$, $f_1 = f(u)$, $f^{'} = f(v^{'})$ y $f_1^{'} = f(u^{'})$ donde $v^{'}$ y $u^{'}$ son las velocidades después de la colisión elástica de dos partículas , $v$ y $u$ las velocidades antes del encuentro y $S^2 = \{w \in R^3 \backslash |w| = 1\}$. $Q$ puede ser escrito como $Q = Q_g - Q_l$ donde

$$Q_g(f,f)(t,v) = \sigma \int_{\mathbb{S}^2_+} \int_{R^3} w.(v-u) f(t,v^{'}) f(t,u^{'}) dw du \tag{1.3}$$

y

$$Q_l(f,f)(t,v) = \pi \sigma f(t,v) \int_{R^3} |v-u| f(t,u) du \tag{1.4}$$

Siendo $\sigma$ una constante proporcional al área de la esfera.
Sea
(1.5)

$$Q^*(f,g)(t,v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|w|=1} q[f(v^{'})g(u^{'}) + f(u^{'})g(v^{'}) - f(u)g(v) - f(v)g(u)] dw du$$

$Q^*$ es simétrico y $Q^*(f,f) = Q(f,f)$.Ver [4].

Una parametrización de estas velocidades es:

$$v^{'} = \frac{v+u}{2} + \frac{|v-u|}{2} w \tag{1.6}$$

$$u^{'} = \frac{v+u}{2} - \frac{|v-u|}{2} w$$

donde $w$ es un vector unitario sobre la esfera $S^2$. En (1.2), $\theta$ es el ángulo entre $v^{'} - u^{'}$ y $u - v$.
Una parametrización diferente está dada por

$$v^{'} = v + ((u-v) \cdot \Omega)\Omega \tag{1.7}$$

$$v_1^{'} = u - ((u-v) \cdot \Omega)\Omega$$

con esta parametrización, el operador de colisión toma la forma (1.2) con $dw$ reemplazado por $d\Omega$ exepto que ahora el Kernel $B$ toma la forma $2B(\theta, |v - u|) cos\theta$.
La forma precisa del Kernel $B$ depende de las propiedades físicas del gas que es el objeto de estudio. Aquí consideramos el caso "Potencial Fuerte":

$$B(\theta; |v - v_1|) = b(\theta)|v-u|^{\beta}, \text{ con } \beta \in (0,2] \tag{1.8}$$

en esta caso $b$ es continuo en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, además asumimos que $b \in L^1((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$.

La ecuación homogénea de Boltzmann con término fuerza que consideraremos es

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,v) + F(t,x,v) \cdot \nabla_v f(t,v) = Q(f,f)(t,v) \text{en } (0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \\ f(0,v) = f_0(v) \text{ sobre } \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.9}
$$

donde $F : (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se supone integrable con respecto al tiempo.

Se define el espacio $L^1_p = \{f : ||f||_{1,p} < \infty\}$ siendo

$$
||f||_{1,p} = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{\frac{p}{2}} |f(\xi)| d\xi \,,
$$

este espacio es de Banach; ver [4].

Una referencia general para la ecuación de Boltzmann es Cercignani [3] ó Cercignani, Illner, Pulvirenti [4], en donde se encuentran aún más referencias y muchos detalles sobre el desarrollo de la teoría matemática. La pregunta de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Boltzmann (1.1) fué primero dirigida por Carlemann [2] y la $L^1$-teoría fué desarrollada por Arkeryd [1] y Elmroth [7] los cuales probaron que todos los momentos que inicialmente son acotados, permanecen acotados uniformemente en el tiempo. Desvilletes [5] probó que si algún momento del dato inicial de orden $s > 2$ es acotado, entonces todos los momentos de la solución son acotados para cualquier valor positivo. Este resultado fué extendido por Wennberg [15, 16, 17] el cual probó que el resultado dado por Desvilletes [5] es también verdadero cuando solamente la energía del dato inicial es acotada y para cualquier sección *Cross* general, también sin la hipótesis de *Cuttoff* angular. Mischler y Wennberg [13] probaron un teorema de existencia y unicidad con dato inicial en $L^1_2(\mathbb{R}^3)$.

Para la ecuación de Boltzmann no homogénea con término fuerza, tenemos resultados recientemente demostrados por Galeano y Pérez [8], Galeano [9], Galeano, Orozco y Vásquez [10, 11] cuando las ecuaciones no son homogéneas. Especialmente para la ecuación (1.9) no conocemos resultados. Este artículo es una extensión de los resultados mencionados anteriormente a la ecuación homogénea de Boltzmann con término de fuerza donde este término es integrable con respecto al tiempo.

Aquí demostraremos el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.** *Sean* $f_0(v) \in L_p^1$*, el conjunto* $M = \{f \in L_p^1 : ||f||_p \leq R\}$*, supongamos la existencia de un* $R$ *y* $T$ *tales que* $R < \frac{1}{4c(p)T}$*, donde* $c(p)$ *es una constante y con* $F$ *independiente de f, e integrable con respecto al tiempo, entonces existe una única solución local de (1.9)*

Este artículo lo dividimos en cuatro lemas y la demostración del teorema.

## 2. Desarrollo

Se define

$$f^{\#}(t,v) = f(t, v + \int_0^t F(\tau, x, v)d\tau) \tag{2.1}$$

entonces

$$\frac{d}{dt} f^{\#}(t,v) = f_t + F \cdot \nabla_v f = Q(f,f)(t, v + \int_0^t F d\tau) = Q^{\#}(f,f)(t,v)\,,$$

por lo tanto

$$f^{\#}(t,v) = f^{\#}(0,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)(s,v)ds \tag{2.2}$$

**Lema 2.1.**

$$Q^{\#}(f,f)(t,v) = Q(f^{\#}, f^{\#})(t,v)$$

*Demostración.* Sabemos que $Q(f,f) = Q_g(f,f) - Q_l(f,f)$ por tanto

$$\begin{aligned} Q_g^{\#}(f,f)(t,v) &= Q_g(f,f)(t, v + \int_0^t F d\tau) \\ &= \sigma \int_{S_+^2} \int_{\mathbb{R}^3} w \cdot (v-u) f(t, v' + \int_0^t F d\tau) f(t, u' + \int_0^t F d\tau) dw du \\ &= \sigma \int_{S_+^2} \int_{\mathbb{R}^3} w \cdot (v-u) f^{\#}(t, v') f^{\#}(t, u') dw du \\ &= Q_g(f^{\#}, f^{\#})(t,v) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Q_l^{\#}(f,f)(t,v) &= Q_l(f,f)(t, v + \int_0^t F d\tau) \\ &= \pi\sigma f(t, v + \int_0^t F d\tau) \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f(t, u + \int_0^t F d\tau) du \\ &= \pi\sigma f^{\#}(t,v) \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f^{\#}(t,u) du \\ &= Q_l(f^{\#}, f^{\#})(t,v) \end{aligned}$$

□

por lo tanto la igualdad (2.2) puede escribirse como

$$f^{\#}(t,v) = f_0(v) + \int_0^t Q(f^{\#}, f^{\#})(s,v)ds\,. \tag{2.3}$$

**Lema 2.2** (Desigualdad de Povzner)**.** *Supóngase $p \geq 2$, $f$, $g \in L^1_p$ y $f \geq 0$, $g \geq 0$, entonces tenemos que existe $c(p) > 0$,tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+|v|^2)^{\frac{p}{2}} |Q(f,g)|dv \leq c(p)\{||f||_{1,p}||g||_{1,2} + ||g||_{1,p}||f||_{1,2}\}$$

*Demostración.* Ver [4, pag.188] □

**Lema 2.3.** $Q^*(f, f-g)(t,v) = Q^*(f,f)(t,v) - Q^*(f,g)(t,v)$

*Demostración.*

$$Q^*(f,f-g)(t,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{|w|=1} q[f(v')(f-g)(u') + f(u')(f-g)(v') \\ - f(u)(f-g)(v) - f(v)(f-g)(u)]dwdu$$

luego

$$\begin{aligned} Q^*(f,f-g)(t,v) = \\ &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{|w|=1} q[f(v')f(u') + f(u')f(v') - f(u)f(v) - f(v)f(u)]dwdu \\ &- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{|w|=1} [f(v')g(u') + f(u')g(v') - f(u)g(v) - f(v)g(u)]dwdu \\ &= Q^*(f,f)(t,v) - Q^*(f,g)(t,v). \end{aligned}$$

□

**Lema 2.4.** $||f||_{1,2} \leq ||f||_{1,p}, \;\; p \geq 2, \quad f \geq 0$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} ||f||_{1,2} &= \int_{\mathbb{R}^3} (1+|v|^2)|f(v)|dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} (1+|v|^2)^{\frac{p}{2}}|f(v)|dv \\ &= ||f||_{1,p} \end{aligned}$$

□

*Demostración del teorema 1.1.* De (2.3) tenemos que

$$|f^{\#}(t,v)| \leq |f_0(v)| + \int_0^t |Q(f^{\#}, f^{\#})|(s,v)ds,$$

luego

$$(1+|v|^2)^{\frac{p}{2}}|f^{\#}(t,v)| \leq (1+|v|^2)^{\frac{p}{2}}|f_0(v)| + \int_0^t (1+|v|^2)^{\frac{p}{2}}|Q(f^{\#},f^{\#})|(s,v)ds$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|v|^2)^{\frac{p}{2}}|f^{\#}(t,v)|dv \leq & \int_{\mathbb{R}^3}(1+|v|^2)^{\frac{p}{2}}|f_0(v)|dv \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3}(1+|v|^2)^{\frac{p}{2}}|Q(f^{\#},f^{\#})|(s,v)dvds,\end{aligned}$$

lo cual implica

$$||f^{\#}(t,.)||_{1,p} \leq ||f_0||_{1,p} + \int_0^t c(p)\{||f^{\#}||_{1,p}||f^{\#}||_{1,2} + ||f^{\#}||_{1,p}||f^{\#}||_{1,2}\}ds$$

si se define el operador

$$\begin{aligned}\tau :& M \longrightarrow L^1_{1,p} \\ & f^{\#} \longrightarrow \tau(f^{\#}) = f_0(v) + \int_0^t Q^*(f^{\#},f^{\#})(s,v)ds,\end{aligned}$$

entonces por los cálculos anteriores tenemos,

$$||\tau(f^{\#})||_{1,p} \leq ||f_0(v)||_{1,p} + 2Tc(p)||f^{\#}||^2_{1,p},$$

por tanto si $||f_0(v)||_{1,p} \leq \frac{R}{2}$ y $||f^{\#}||_{1,p} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{Tc(p)}}$, entonces

$$||\tau(f^{\#})||_{1,p} \leq \frac{R}{2} + 2Tc(p)||f^{\#}||^2_{1,p} \leq \frac{R}{2} + 2Tc(p)\frac{1}{4}\frac{R}{Tc(p)} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R,$$

es decir $\tau$ envía $M$ en $M$, ahora sean $f, g$ en M, entonces

$$||\tau(f)-\tau(g)||_{1,p} \leq \int_0^t [Q^*(f^\#, f^\#)(s,v) - Q^*(g^\#, g^\#)(s,v)]ds$$
$$= \int_0^t [Q^*(f^\#, f^\#)(s,v) - Q^*(f^\#, g^\#)(s,v) + Q^*(f^\#, g^\#)(s,v) - Q^*(g^\#, g^\#)(s,v)]ds$$
$$= \int_0^t |Q^*(f^\#, f^\# - g^\#)(s,v) + Q^*(f^\# - g^\#, g^\#)(s,v)|ds$$
$$= \int_0^t |Q^*(f^\#, f^\# - g^\#)|(s,v)ds + \int_0^t |Q^*(f^\# - g^\#, g^\#)|(s,v)|ds$$
$$\leq Tc(p)[||f^\#||_{1,p}||f^\# - g^\#||_{1,2} + ||f^\#||_{1,2}||f^\# - g^\#||_{1,p}]$$
$$+ Tc(p)[||f^\# - g^\#||_{1,p}||g^\#||_{1,2} + ||f^\# - g^\#||_{1,2}||g^\#||_{1,p}]$$
$$\leq Tc(p)[2||f^\#||_{1,p}||f^\# - g^\#||_{1,p} + 2||f^\# - g^\#||_{1,p}||g^\#||_{1,p}]$$
$$\leq 2Tc(p)||f^\# - g^\#||_{1,p}(||f^\#||_{1,p} + ||g^\#||_{1,p})$$
$$\leq 2Tc(p)[\sqrt{\frac{R}{Tc(p)}}||f^\# - g^\#||_{1,p}$$

así, $\tau$ es una contracción. Aplicando el teorema del punto fijo de Banach se deduce el teorema. □

## Referencias


[1] Arkeryd *On the Boltzmann equation*, Arch.Rational Mech.Anal. **34**, (1972).

[2] Carlemann T. *Probleme Mathematiques dans la theoríe Cinetique des Gaz*, Almquist et Wiksell, Uppsala, (1957).

[3] Cercignani C. *The Theory and Application of the Boltzmann equation*, Springer, New York, (1988).

[4] Cercignani C., Illner R. and Pulvirenti M. *The Mathematical Theory of dilute gases*, Springer, New York, (1994).

[5] Desvillettes L. *Some Applications of the Method of Moments for the Homogeneous Boltzmann and Kac equation*, Arch. Rational Mech.Anal. **123, No.4**, (1993).

[6] Dolbeault, Jeon. *An introduction to kinetic equations : The Vaslov-Poisson system and the Boltzmannn equations. Discrete and contineous dinamical systems.* **vol 8, No.2**. Abril de 2002, pag 361-380.

[7] Elmroth T. *Global Boundedness of Moments of Solution of the Boltzmann equation for forces of infinite range*, Arch. Rational Mech.Ana., **82**, 1–2, (1983).

[8] Galeano R. and Pérez H. *Problema de Cauchy para la ecuación de Enskog no lineal con término fuerza*, Foro-Red-Mat, UNAM-Mexico, **013**, (2003).

[9] Galeano R. *The Enskog equation with the term force, near the vacuum*, Revista Ciencias e Ingeniería al día, Universidad de Cartagena, **1**, 50–59, (2003).

[10] Galeano R., Orozco B. and Vásquez O. *Ecuación Relativistica de Boltzmann cerca al vacio*, Boletin de matematicas de la Sociedad Cubana de matematicas y Computacion, **5, No.1**, (2007)pp 53-61.

[11] Galeano R., Orozco B. and Vásquez O. *The Relativistic Enskog equation near the vacuum*, Electronic Journal of Differential Equations, Proc. of Conference 13, (2005).

[12] Gamba I.M,Panferov V, Villani C. *On the Boltzmann Equation for diffusively excited granular media.*, **44, No.3**, (2003).
[13] Mischler S. and Wennberg *On the Spatially Homogeneous Boltzmann equation*, Ann Inst, Henry Poincaré, **16, No.4**, (1999).
[14] Ukai S, Yang T and Zhao H *Global Solutions to the Boltzmann equations with external forces. Analisis an Aplications.* . **vol3, No.2**,( abril de 2005), pag 157-194.
[15] Wennberg B. *On Moments and Uniqueness for solutions to the space homogeneous Boltzmann equation*, Transport Theory Stat. Phys., **24, No.4**,(1994).
[16] Wennberg B. *Entropy dissipation and Moment production for the Boltzmann equation*, Journal Phys. Statist., (1988).
[17] Wennberg B. *The Povzner inequality and Moments in the Boltzmann equation*, Rendiconti del Circulo Matemático di Palermo, ser II, Suppl. **45**, (1996).

Recibido: Noviembre de 2006. Aceptado para publicación: Noviembre de 2007