SOLUCIÓN DE JUEGOS COOPERATIVOS N-PERSONALES BASADA EN LÓGICA DIFUSA COMPENSATORIA

Erick González[1]* y Rafael Espín[2]**

*Instituto Superior de Ciencias y Tecnologías Aplicadas. La Habana, Cuba.
** Centro de Estudios de Técnicas de Dirección. CUJAE, La Habana, Cuba.

RESUMEN

Las soluciones clásicas de juegos cooperativos n-personales han sido criticadas en la literatura, mientras que sus variantes difusas, según la Teoría de Juegos Cooperativos Difusos no superan estas críticas. Ninguna aprovecha el conocimiento existente en el campo profesional en que se aplican. Existe una solución basada en la Lógica Difusa que aprovecha el conocimiento sobre el regateo partiendo de proposiciones expresadas en el lenguaje natural y modeladas a través de predicados cuyas conectivas son las de la llamada Lógica Probabilística. Su limitación está en que los valores de verdad de estos predicados no pueden ser interpretados de manera semántica. Para superar este problema se propone una solución que utiliza un nuevo sistema multivalente llamado Lógica Compensatoria.

ABSTRACT

Classic solutions of n-person cooperative games have been criticized in literature, while their fuzzy variant, according to the Theory of Fuzzy Cooperative Games don't overcome these critics. They don't take advantage of the knowledge in the professional field where they are applied. In literature exists a solution based on fuzzy logic that takes advantage of the knowledge about bargaining, starting from propositions expressed in natural language and modelled with predicates whose conectives are those of a logic called Probabilistic Logic. The limitation of this model is that truth values of these predicates cannot be interpreted semantically. To overcome this problem, a solution that uses a new multivalued system, called Compensatory Logic, is proposed.

KEY WORDS: Fuzzy Logic, solution of n-person cooperative game

MSC: 94D05

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de Juegos Cooperativos n-personales tiene entre las soluciones más importantes de un juego, al Núcleo y al Valor de Shapley [Thomas(1984)], sin embargo, en la literatura existen críticas, en relación con el cumplimiento de ciertos criterios de ‘racionalidad’, en el contexto de la Teoría de la Decisión [French(1986)].

Abundan en la literatura ejemplos de juegos cooperativos cuyo Núcleo, que es un conjunto de soluciones del juego, no contiene ningún elemento o contiene una gran cantidad de ellos y por tanto o no existe solución del juego o hay tantas que es difícil escoger una. Por su parte, el Valor de Shapley, que es una función que cumple cuatro axiomas de ‘racionalidad’, es criticado precisamente por la falta de ‘racionalidad’ del axioma de aditividad [Thomas(1984)]. Para encontrar un análisis crítico de estas soluciones y otras véase [Espín(2000)].

Otro enfoque de la Teoría de Juegos Cooperativos es la Teoría de Juegos Cooperativos Difusos [Mares (2001)], que generaliza haciendo uso de la Teoría de Conjuntos Difusos, las soluciones clásicas de

[1] erickgc@instec.cu

[2] espin@ind.cujae.edu.cu

juegos cooperativos. Ello facilita la aplicación de esta teoría en condiciones de vaguedad e incertidumbre, pero mantiene las limitaciones de las soluciones deterministas.

Todos estos enfoques de búsqueda de solución se pueden aplicar a cualquier tipo de juego cooperativo n-personal, sin tener en cuenta el campo profesional en el cuál se emplean y por tanto no se puede asegurar que estas soluciones coincidan con las dadas por un experto en la rama del conocimiento que se estudia.

En la literatura aparece un modelo que propone una solución difusa de juego n-personal producto del regateo entre los jugadores. En él, además de proponerse la repartición de las ganancias entre los jugadores de cada coalición, se le asigna a cada coalición un valor de verdad que indica la factibilidad de lograr un acuerdo entre los jugadores de la misma [Espín (2000)], [Espín y otros (2007)].

El regateo es el proceso correspondiente a la dimensión distributiva del proceso negociador en el cual cada una de sus partes intenta obtener la mayor parte posible para sí [Bazerman y Neal (1992)].

En este artículo se entenderá el término ‘negociación’ como la acción de buscar un acuerdo sobre un asunto que se llamará ‘negocio’. Los ‘negociadores’ son las instituciones o partes en la negociación.

La fortaleza de este modelo está en que parte de proposiciones extraídas de la literatura no matemática de regateo y modela matemáticamente mediante la Lógica Difusa Probabilística el regateo de los jugadores.

Los operadores de la Lógica Difusa Probabilística son ejemplos clásicos de operadores de la lógica difusa [Jang (1997)]. El hecho de partir de proposiciones reales de la experiencia en el regateo hace de este modelo más exacto en sus resultados que si se hubiera partido de las soluciones clásicas. Por otra parte, en él se aprovechan las posibilidades que da la lógica difusa para modelar proposiciones sacadas del lenguaje natural y los conocimientos obtenidos de los expertos.

“El cerebro humano interpreta la información imprecisa e incompleta que recibe de los órganos sensoriales. La Teoría de Conjuntos Difusos provee de un cálculo sistemático para lidiar lingüísticamente con tal información y desarrolla cálculos numéricos con el uso de etiquetas lingüísticas estipuladas por funciones de pertenencia. Más aún, una selección de reglas difusas si-entonces es la clave para un sistema difuso de inferencias que puede modelar de manera efectiva la experticia humana en una aplicación específica” [Jang (1997)].

Este modelo también puede ser interpretado como modelo de decisión, según la Teoría de la Decisión [French (1986)] porque cada jugador debe decidir cuál es la coalición donde va a regatear. Con este enfoque, las funciones de pertenencia de los predicados del modelo también pueden ser interpretadas como funciones de decisión.

“El estudio de la construcción formal de un sistema lógico considerado por sí mismo, debe ser completado con la consideración de las relaciones que tienen lugar entre este sistema y aquellos dominios de objetos informales que puedan constituir su representación, ‘modelo’ o ‘interpretación’. En otras palabras, es esencial aclarar el contenido que puede ser expresado y se expresa en un sistema formal dado. Esta tarea caracteriza el círculo de problemas que se plantean en la ‘semántica lógica’ ”[Bueno(1972)].

Los operadores de la Lógica Probabilística constituyen funciones ordinales de acuerdo a la Teoría de la Medición contenida en la Teoría de la Decisión [French (1986)]. Esto implica que los resultados difusos obtenidos sólo tienen sentido si se comparan entre ellos, pero no tienen valor semántico en sí mismos. Esto provoca, por ejemplo, que el valor de verdad de la factibilidad de llegar a un acuerdo dentro de una coalición, no tiene sentido a menos que se compare con los valores de verdad de la factibilidad de otras coaliciones.

El objetivo de este artículo es el de proponer una solución de juego cooperativo n-personal cuyos predicados lógicos tienen valores de verdad que pueden ser interpretados de manera semántica y así obtener una solución del juego que brinde más información que la anterior.

Una manera de lograr este objetivo es la creación de dos modelos que utilizan la Lógica Difusa Compensatoria [Espín (2006)] y no la Lógica Difusa Probabilística. La Lógica Difusa Compensatoria es un nuevo sistema lógico que tiene como operador de conjunción a la media geométrica de valores de verdad y como operador de disyunción a su dual.

Los operadores de la Lógica Difusa Compensatoria modelan mejor el pensamiento humano que los de la Lógica Difusa Probabilística, según resultados reportados en la literatura [Mizumoto (1989)]. Además de la continuidad, los operadores compensatorios cumplen con la idempotencia. Ésta última provee a la Lógica Difusa Compensatoria de la propiedad de cardinalidad de las funciones obtenidas a partir de las conectivas de los predicados lógicos, según la Teoría de la Medición [French (1986)], lo que permite una interpretación semántica de los valores de verdad que se obtengan.

En este artículo se comenzará por dar algunas nociones de lógica difusa, sus principales conceptos y las ventajas que se pueden obtener de esta teoría. Más adelante se hará una descripción del Modelo Probabilístico ya obtenido y se desarrollarán a continuación los Modelos Compensatorios, junto con algunas nociones de la Lógica Compensatoria. Luego se explicarán los resultados, la descripción de la obtención de los parámetros de los modelos, el algoritmo utilizado para los cálculos y la aplicación de los resultados en dos ejemplos.

Más adelante se explicará el comportamiento del algoritmo en cuanto a convergencia y unicidad en los ejemplos corridos y según los parámetros estimados y se finaliza con cinco tablas que muestran algunos resultados numéricos utilizados en el artículo.

2. NOCIONES DE LÓGICA DIFUSA

La lógica difusa es una lógica multivalente basada en el concepto de conjunto difuso [Zadeh(1965)] donde toda proposición toma valores de verdad en el intervalo $[0\ 1]$. Si una proposición toma valor de verdad 0 es absolutamente falsa y si toma valor de verdad 1 es absolutamente verdadera. El valor de verdad 0.5 significa que la proposición no es ni verdadera ni falsa. Mientras más se acerque a 0 ó a 1 el valor de verdad de una proposición, ella se considerará más falsa o más verdadera, respectivamente. Ésta es la manera en que se puede caracterizar la semántica de la lógica difusa.

Si X es una colección de objetos denotados genéricamente por x, entonces un conjunto difuso A se define como el conjunto de pares ordenados: $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, donde $\mu_A(x)$ se llama ‘función de pertenencia’ y X se conoce por ‘universo de discurso’ o ‘universo’. La función de pertenencia le asigna a cada valor de x un valor de verdad en el intervalo $[0\ 1]$. La función de pertenencia utilizada es una elección subjetiva que responde a criterios del sujeto que modela.

La variable lingüística se define por cinco elementos: $(x, T(x), X, G, M)$, donde x es el nombre de la variable, T(x) es el conjunto de términos de x, o sea, el conjunto de valores o términos lingüísticos, X es el universo de discurso, G es la regla sintáctica que genera los elementos en T(x) y M es una regla semántica que le asocia a cada valor lingüístico A su significado M(A), donde M(A) denota un conjunto difuso en X. El concepto de variable lingüística permite crear modelos matemáticos a partir de proposiciones creadas mediante el lenguaje natural y las experiencias e ideas de expertos en el tema que se quiere modelar [Zadeh(1975)].

También existe el concepto de modificador lingüístico que se emplea cuando el valor lingüístico está precedido por adverbios como: 'muy', 'bastante' y 'demasiado'. Es usual elevar los valores de la función de pertenencia del valor lingüístico a un exponente que es 2 si el modificador es 'muy', a 0.5 si es 'bastante' ó a 3 si es 'demasiado'.

Para modelar frases del lenguaje natural compuestas por otras más simples que se enlazan por las conectivas lógicas: 'no P', 'P y Q', 'P o Q', 'si P entonces Q', 'P si y solo si Q', se utilizan operadores definidos sobre los valores de verdad que toman las proposiciones P y Q.

El operador de negación más utilizado se define por: $u(\neg p) = 1 - u(p)$ y las conectivas lógicas 'y', 'o' deben de cumplir con ciertos axiomas llamados de t-norma para la conjunción (conectiva 'y') y de t-conorma para la disyunción (conectiva 'o') [Jang (1997)].

No obstante la aceptación de las definiciones de t-norma y t-conorma como universales, resultados empíricos han demostrado que los operadores de conjunción y disyunción definidos de esa manera son menos apropiados para modelar el pensamiento humano que los operadores compensatorios entre los que se encuentra la media geométrica de los valores de verdad de n variables:

$c(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ [Mizumoto(1989)].

3. MODELO DIFUSO PROBABILÍSTICO DE JUEGO COOPERATIVO N-PERSONAL.

El modelo difuso basado en la Lógica Probabilística [Espín(2000)], [Espín(2007)] responde a las siguientes proposiciones extraídas de la literatura especializada en el tema [Bazerman y Neale(1992)], [Fisher y Ury (1983)], [Raiffa (1982)]:

1. Un negociador tiene capacidad de regateo si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- El aporte de la institución que representa al negocio en discusión es importante.
- Tiene alternativas ventajosas y posibles si no se obtiene un acuerdo, o en su lugar el aporte de la institución que representa es muy importante.

2. Cualquier incremento en el aporte de una de las partes al negocio, o el acrecentamiento del beneficio que reportarían sus alternativas al mismo produce un incremento en su capacidad de regateo.

3. El beneficio que obtiene cada parte es igual a la cantidad que puede obtener sin la cooperación de las partes restantes más otra aproximadamente proporcional a su capacidad de regateo.

4. Un acuerdo es posible si y solo si todas las partes son importantes para el negocio y el beneficio que cada cual recibe es importante para cada cual.

Sea $\mathrm{N} = \{1,2,\cdots,\mathrm{n}\}$ un conjunto de jugadores que representarán a las instituciones y $\mathrm{P}(\mathrm{N})$ el conjunto potencia de N. La función característica v del juego n-personal cumple los siguientes axiomas:

i. $\mathrm{v}(\varnothing) = 0$

ii. $\mathrm{v}(\mathrm{S} \cup \mathrm{T}) \geq \mathrm{v}(\mathrm{S}) + \mathrm{v}(\mathrm{T})$

Donde S y T son subconjuntos disjuntos de N.

El Índice de Buen Acuerdo (IBA) se obtiene según la fórmula siguiente:

$$X(i,C) = \begin{cases} \mathrm{v}(\{i\}) + \dfrac{r(i,C)}{\sum_{j\in C} r(j,C)} \left[\mathrm{v}(C) - \sum_{j\in C} \mathrm{v}(\{j\}) \right] & si \;\; i \in C. \\ 0 & si \;\; i \notin C. \end{cases} \tag{1}$$

Donde $\mathrm{X}(\mathrm{i},\mathrm{C})$ es una función real definida sobre $(\mathrm{N},\mathrm{P}(\mathrm{N}))$ y $\mathrm{r}(\mathrm{i},\mathrm{C}) \in [0\;1]$ representa el predicado: ‘el jugador i tiene capacidad de regateo en el marco de negociación C’ [Espín(2007)]. Cada marco de negociación se representa por una coalición.

La solución del juego se define como:

$$S = \left\{ \left(X(1,C_j), X(2,C_j), \cdots, X(n,C_j);\, f(C_j) \right) :\, j = 1,2,\cdots, card(\mathrm{P}(N)) \right\} \tag{2}$$

S es el conjunto de vectores que tienen como n primeras componentes a los valores del IBA que alcanza una coalición para los diferentes jugadores. La componente n+1 se calcula por $\mathrm{f}(\mathrm{C}_{\mathrm{j}})$, que es una función real con imagen en $[0\;1]$ que representa el valor de verdad que alcanza la variable lingüística: ‘factibilidad de alcanzar un acuerdo en el marco de negociación C_{j}’ para su valor lingüístico: ‘la factibilidad de alcanzar un acuerdo en el marco de negociación C_{j} es alta’.

La Lógica Probabilística define la conjunción, disyunción y negación respectivamente como:

- $\mathrm{u}(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) = \mathrm{u}(\mathrm{p})\mathrm{u}(\mathrm{q})$
- $\mathrm{u}(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) = \mathrm{u}(\mathrm{p}) + \mathrm{u}(\mathrm{q}) - \mathrm{u}(\mathrm{p})\mathrm{u}(\mathrm{q})$
- $\mathrm{u}(\neg \mathrm{p}) = 1 - \mathrm{u}(\mathrm{p})$

En la Lógica Probabilística la conjunción es una t-norma y la disyunción es una t-conorma [Jang(1997)].

Con estos operadores y teniendo en cuenta las proposiciones que definen la capacidad de regateo de un negociador se llega a la fórmula siguiente:

$$r(i,C) = p(i,C) \wedge (a(i,C) \vee p^2(i,C)) \tag{3}$$

La variable lingüística que se utiliza en la fórmula es ‘capacidad de regateo’ y el valor lingüístico que se mide es ‘capacidad de regateo alta’.

$p(i,C)$ representa la importancia que tiene el jugador i para el marco de negociación C. En $p^2(i,C)$ se utiliza el modificador lingüístico cuadrado que modela el efecto de la palabra ‘ muy ’, es decir, $p^2(i,C)$ representa la proposición: ‘i es muy importante para el marco de negociación C’. Por su parte, $a(i,C)$ representa: ‘existen alternativas posibles y ventajosas del jugador i fuera del marco de negociación C’.

Para calcular $a(i,C)$ se necesita la fórmula:

$$f(B) = \bigwedge_{j\in B} (p(j,B) \wedge q(j,B)) \tag{4}$$

Donde $q(j,B)$ representa la proposición: ‘ el marco C es importante para el jugador i’, y $f(B)$ modela la factibilidad de llegar a un acuerdo en el marco de negociación B.

Si $s(i,C,D)$ corresponde a la proposición: ‘ i es más importante para el marco C que para el D’, entonces $a(i,C)$ se puede calcular por la fórmula:

$$a(i,C) = \underset{B\neq C, B\supset\{i\}}{V} \left(s(i,B,C) \wedge f(B)\right) \tag{5}$$

.

El cálculo de los IBA se realiza de manera recurrente por la ecuación:

$$X = g(X) \tag{6}$$

donde: $X = [X(i,C)]$ es una matriz con los elementos $X(i,C)$.

Se puede calcular además el Índice de Conveniencia de Contrapartes 1 (ICC1) con ayuda de la fórmula:

$$D_v(i,C) = q_v(i,C) \wedge f_v(C) \tag{7}$$

Éste representa la conveniencia de la coalición C para el jugador i en el juego v.

El Índice de Conveniencia de Contrapartes 2 (ICC 2) se calcula por la fórmula:

$$d_v(i,C) = D_v(i,C) \wedge \left\{ \neg q_v^2(i,C) \Rightarrow \left\{ \forall_{C\in\beta} \exists_{\substack{S\subset\beta \\ S\neq\{C\}}} D_{v_\beta}(C,S) \right\} \right\}$$

$$= D_v(i,C) \wedge \left\{ q_v^2(i,C) \vee \left\{ \wedge_{C\in\beta} \vee_{\substack{S\subset\beta \\ S\neq\{C\}}} D_{v_\beta}(C,S) \right\} \right\} \qquad (8)$$

Éste tiene el mismo significado que el ICC1, pero tiene en cuenta que se pueden formar coaliciones que regateen con otras coaliciones como si ellas fueran jugadores independientes.

Más detalles del modelo se pueden encontrar en [Espín(2000)] y [Espín(2007)].

4. MODELOS COMPENSATORIOS DE JUEGO COOPERATIVO N-PERSONAL.

En el problema que se trata no solamente se desea obtener una solución para el juego, también se desea obtener un criterio para que cada jugador escoja una coalición, que debe de ser aquella en la cual el jugador tenga mayor capacidad de regateo. Esto permite analizar el problema desde la perspectiva de la Teoría de la Decisión.

La Lógica Compensatoria cuenta con operadores de conjunción, disyunción, negación entre otros que cumplen con los requerimientos de la Lógica Difusa y además con requerimientos de la Teoría de la Decisión [Espín(2006)]. Estas propiedades hacen que la utilización de la Lógica Compensatoria sea adecuada para resolver el problema que se trata, porque por una parte permite modelar matemáticamente la experiencia de regateo de los expertos en el lenguaje natural y por otra permite decidir a cada jugador cuál es la coalición más conveniente para él.

La Lógica Compensatoria tiene como operadores a funciones n-arias $op:[0\,1]^n \rightarrow [0\,1]$ en el caso de la conjunción y la disyunción, y la unaria $n:[0\,1]\rightarrow[0\,1]$ para la negación, éstas se definen respectivamente como:

- $c\,(u(p_1),u(p_2),\cdots,u(p_n)) = \sqrt[n]{u(p_1)u(p_2)\cdots u(p_n)}$
- $d\,(u(p_1),u(p_2),\cdots,u(p_n)) = 1-\sqrt[n]{(1-u(p_1))(1-u(p_2))\cdots(1-u(p_n))}$
- $n(u(p)) = 1-u(p)$

Como se indicó anteriormente el operador conjunción definido aquí y el operador disyunción, dual del anterior, forman parte de una familia de operadores llamada de operadores compensatorios. Ellos no cumplen con todos los axiomas de t-norma y t-conorma, pero son más adecuados para modelar el pensamiento humano.

Un axioma de la Teoría de la Decisión es la continuidad de las funciones de decisión. Por la continuidad de los operadores lógicos de la Lógica Difusa Compensatoria se puede asegurar que cualquier cambio en el valor de verdad de una variable que forma parte de un predicado lógico, influye en el valor de verdad de ese predicado.

Por otra parte, según la Teoría de la Medición, los valores de verdad obtenidos de la Lógica Probabilística son sólo ordinales, es decir, la comparación entre los objetos de estudio sólo tiene sentido si se comparan entre sí sus valores de verdad, pero a estos resultados no se les puede dar una interpretación semántica intrínseca.

En el caso de la Lógica Difusa Compensatoria, las funciones que calculan los valores de verdad de un predicado lógico, son cardinales [French (1986)] y por tanto sí tienen una interpretación semántica. Esto se debe a que los operadores de conjunción y disyunción de la Lógica Difusa Compensatoria cumplen con la propiedad de ser idempotentes, o sea: $c\,(x, x, \cdots, x) = x$ y $d\,(x, x, \cdots, x) = x$.

Por sus propiedades, los operadores compensatorios no tienen en cuenta que mientras mayor sea la cantidad de jugadores en una coalición menor será la posibilidad de acuerdo en ella, algo que era natural en la Lógica Difusa Probabilística.

Para resolver esto se sustituyó la cuarta proposición del modelo anterior por la proposición:

4. Un acuerdo es posible si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:
4.1. Todas las partes son importantes para el negocio y el beneficio que cada cual recibe es importante para cada cual.
4.2 La cantidad de partes asociadas al acuerdo no es grande.

Para incorporar la proposición 4.2 al modelo se identifican las partes asociadas al acuerdo con la cantidad de jugadores dentro de cada coalición. La variable lingüística en este caso es: ‘cantidad de jugadores’ y de ella el valor lingüístico que interesa es: ‘cantidad grande de jugadores’. El conjunto universo X es el conjunto de los números naturales y a x se le asocia una función de pertenencia sigmoidal $\mathrm{sig}(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-\alpha(x-\gamma)}}$ [Jang(1997)].

Esta elección se debe a que la función sigmoidal es no decreciente, o sea, mientras mayor sea la cantidad de jugadores en la coalición mayor será el valor de verdad de la proposición ‘La cantidad de partes asociadas al acuerdo es grande’.

La función $\mathrm{sig}(x)$ depende del número de jugadores de la coalición y se calcula según tres parámetros: $\beta, \gamma \in \{1,2,...\}$ y $\mu \in (0.5\ \ 1)$, tal que: $J(\beta) = \mu$ y $J(\gamma) = 0.5$. Esto significa que si una coalición tiene un número β de jugadores, entonces el valor de verdad que toma la proposición ‘la coalición tiene un número grande de jugadores’ es ‘más verdadero que falso’ o mayor que 0.5. La segunda significa que si una coalición tiene un número γ de jugadores, entonces la proposición anterior alcanza un valor de verdad de ‘tan verdadero como falso’. El parámetro α viene dado por la fórmula:

$$\alpha = \frac{\ln(\mu) - \ln(1-\mu)}{\gamma - \beta} \tag{9}$$

.
La proposición 4.2 indica que la cantidad de jugadores no es grande y por tanto su función de pertenencia sería $J(x) = 1 - \mathrm{sig}(x)$ o lo que es lo mismo

$$J(card(B)) = 1 - \frac{1}{1+e^{-\alpha(card(B)-\gamma)}} \qquad (10)$$

si card(B) indica el número de jugadores que existe en la coalición B.

Para expresar en los modelos la modificación de la proposición 4, se sustituye la fórmula (4) por la fórmula siguiente:

$$f(B) = (\bigwedge_{j\in B} (p(j,B) \wedge q(j,B))) \wedge J(card(B)) \qquad (11)$$

El desarrollo explícito de cada una de estas fórmulas y las siguientes haría muy engorroso el desarrollo de este artículo debido a lo complicadas que son éstas y sin embargo no aportarían elementos adicionales. De todas formas se desarrollará la fórmula (11) de manera ilustrativa, que quedaría explícitamente:

$$f(B) = \sqrt{\left(\sqrt[card(B)]{\prod_{j\in B} \sqrt{p(j,B).q(j,B)}} \right) \cdot J(card(B))} \qquad (11a)$$

Las demás fórmulas del Modelo Probabilístico (MP) se mantienen invariables en el nuevo modelo compensatorio, al cual llamaremos Modelo Compensatorio I (MCI).

En este artículo se propone otro modelo llamado Modelo Compensatorio II (MCII), que es una variante del I y en donde la fórmula (1) se sustituye por:

$$X(i,C) = \begin{cases} \mathrm{v}(\{i\}) + \dfrac{r^2(i,C)}{\sum_{j\in C} r^2(j,C)} \left[\mathrm{v}(C) - \sum_{j\in C} \mathrm{v}(\{j\}) \right] & si \;\; i \in C. \\ 0 & si \;\; i \notin C. \end{cases} \qquad (12)$$

Esta fórmula permite calcular un IBA en caso que los jugadores tengan mucha capacidad de regateo.

En ambos casos la solución del juego cooperativo n-personal sigue calculándose mediante la fórmula:

$$S = \left\{ \left(X(1,C_j), X(2,C_j), \cdots, X(n,C_j);\ f(C_j) \right) :\ j = 1,2,\cdots, card(\mathrm{P}(N)) \right\} \qquad (13)$$

que conserva el significado del MP, con la diferencia que en estos dos casos se hacen los cálculos sustituyendo los operadores probabilísticos por los operadores compensatorios. También se sustituyen las demás fórmulas para el cálculo del IBA y la función $\mathrm{f}(\mathrm{C}_j)$.

5. RESULTADOS.

Para obtener el IBA se programó en MATLAB un algoritmo de cálculo de punto fijo sobre el operador g según la fórmula (6), donde la incógnita es una matriz. El algoritmo sigue los pasos siguientes:

1. Se obtiene una matriz inicial X_0 de orden $n x(2^n - 1)$, donde n es el número de jugadores, con valores obtenidos aleatoriamente según la función de MATLAB *rand*, que es un generador de números aleatorios con distribución uniforme. X_0 se toma como valor inicial del IBA.

2. Se utiliza el último IBA obtenido y se calculan los coeficientes intermedios siguiendo las fórmulas de: $q(i, C)$, $p(i, C)$, $f(B)$ según (4), $s(i, C, D)$ y $a(i, C)$ según (5).

3. Se obtiene una matriz X a partir de la fórmula (1) si se trata del MP o el MCI y a partir de la fórmula (12) si se trata del MCII. Ésta se toma como nuevo valor del IBA. Se guarda el valor anterior del IBA con el nombre de Xant. Se comparan X y Xant según la fórmula $e = \|X - Xant\|$ utilizando la función *norm* de MATLAB.

4. Si e $< 10^{-6}$, entonces se toma a X como valor final del IBA. Si no, se va al paso 2.

El IBA del MP se considera el valor que mide el resultado final del regateo. Esto se debe a que éste fue validado experimentalmente, tanto en los parámetros utilizados como por la validación estadística de su formulación con ayuda de los criterios dados por expertos [Espín (2000)].

Teniendo en cuenta lo anterior, se estimaron los parámetros de los modelos compensatorios como aquellos que minimizan la norma de la diferencia entre el IBA de los modelos compensatorios con esos parámetros y el IBA del MP. Para ello se siguieron los siguientes pasos:

1. Se generaron aleatoriamente 200 casos de combinaciones posibles de los parámetros β, γ y μ con $\beta \in \{1,2,...,8\}$, $\gamma \in \{2,3,...,9\}$ y $\mu \in (0.5\ \ 1)$ tal que $\beta < \gamma$.

2. Se escogieron dos juegos, uno de 3 jugadores y otro de 5 jugadores. Se les calculó el IBA del MP.

3. Se les calculó a cada juego el IBA del MCI y del MCII por cada una de las combinaciones de parámetros β, γ y μ. Se tuvo en cuenta la fórmula (11) y el algoritmo explicado en párrafos anteriores para el cálculo del IBA.

4. Cada IBA de los modelos compensatorios, calculado para una combinación específica de parámetros, se comparó con el resultado similar del MP mediante el cálculo del máximo de los errores relativos entre los resultados para el MCI o el MCII y para el MP. Los resultados se muestran en la Tabla 1.

	Mejores combinaciones de parámetros obtenidos por cada modelo para el cálculo del juego de:	
Modelo	**3 jugadores**	**5 jugadores**
Compensatorio I	$\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu \approx 0.99$ error: 0.0840	$\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu \approx 0.99$ error: 0.2438
Compensatorio II	$\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu \approx 0.99$ error: 0.0206	$\beta = 8$, $\gamma = 9$, $\mu \approx 0.99$ error: 0.0417 $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu \approx 0.99$ error: 0.3547

Tabla 1 Estimación de la combinación de parámetros óptimos utilizados en los Modelos Compensatorios

Más adelante se calcularon los errores relativos de los Modelos Compensatorios con respecto al MP en un juego de 7 jugadores generado aleatoriamente y se obtuvieron los resultados mostrados en la Tabla 2.

Modelo	**Juego de 7 jugadores**
Compensatorio I	Con $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu = 0.99$.Error: 0.0752
Compensatorio II	Con $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu = 0.99$. Error: 0.1659 Con $\beta = 8$, $\gamma = 9$, $\mu = 0.99$. Error: 0.0401.

Tabla 2 Errores de los modelos para un juego de 7 jugadores con la combinación de parámetros obtenidos anteriormente

Como se puede apreciar en las Tablas 1 y 2, el MCII fue más exacto que el MCI con respecto al MP, según los ejemplos calculados. El MCI tiene como parámetros óptimos a $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu = 0.99$ independientemente del número de jugadores, mientras que en el MCII el número de jugadores influye en los parámetros β y γ : $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu = 0.99$, si son 3 jugadores y $\beta = 8$, $\gamma = 9$, $\mu = 0.99$ si son más de 5 jugadores. Los resultados del IBA obtenidos para los ejemplos utilizados de 3 y 5 jugadores se muestran en las Tablas 3, 4 a., 4b.

En el juego cuya ecuación característica toma los valores: v({1}) = 30; v({2}) = 22; v({3}) = 5; v({1,2}) = 59; v({1,3}) = 45; v({2,3}) = 39; v({1,2,3}) = 77, tal que la solución real de la negociación fue (37.69; 29.02;10.29) según Raiffa [Espín (2007)] y que modela una negociación entre 3 compañías escandinavas de cemento se obtuvieron los resultados que aparecen en la Tabla 3.

Un ejemplo con 5 jugadores obtenido de [Thomas (1984)], llamado Consejo de Seguridad de la ONU Lilliput es el siguiente:

v({1,2,3}) = v({1,2,4}) = v({1,2,5}) = v ({1,2,3,4}) = v ({1,2,3,5}) = v({1,2,4,5}) = v({1,2,3,4,5}) = 1 y v (S) = 0 para cualquier otro $S \subset N$. Los resultados se muestran en las Tablas 4 a. y 4 b.

Jugadores	**{1,2}**	**{1,3}**	**{2,3}**	**{1,2,3}**
Modelo Probabilístico				
$f(C_j)$	0.1411	0.1302	0.1293	0.0533
1	33.8017	36.397	0	37.9314
2	25.1983	0	29.1821	28.9974
3	0	8.603	9.8179	10.0713
Modelo Compensatorio I para $\beta = 1$, $\gamma = 2$ y $\mu = 0.99$				
$f(C_j)$	0.5536	0.5481	0.5476	0.0783
1	33.6357	35.6135	0	37.1917
2	25.3643	0	28.5047	28.8137
3	0	9.3865	10.4953	10.9946
Modelo Compensatorio II para $\beta = 1$, $\gamma = 2$ y $\mu = 0.99$				
$f(C_j)$	0.5536	0.5480	0.5476	0.0783
1	33.7696	36.2018	0	37.7071
2	25.2304	0	28.9946	28.9251
3	0	8.7982	10.0054	10.3678

Tabla 3. IBA para el juego de 3 jugadores obtenido según los Modelos Probabilístico y Compensatorios I y II. Factibilidad de realizarse la negociación en el marco de las coaliciones.

Jugadores	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,2,5}
Modelo Probabilístico			
f(C_j)	0.2662	0.2662	0.2662
1	0.3344	0.3344	0.3344
2	0.3344	0.3344	0.3344
3	0.3311	0	0
4	0	0.3311	0
5	0	0	0.3311
Modelo Compensatorio I para β = 1, γ = 2 y μ = 0.99			
f(C_j)	0.2832	0.2832	0.2832
1	0.3335	0.3335	0.3335
2	0.3335	0.3335	0.3335
3	0.3330	0	0
4	0	0.3330	0
5	0	0	0.3330
Modelo Compensatorio II para β = 1, γ = 2 y μ = 0.99			
f(C_j)	0.2832	0.2832	0.2832
1	0.3337	0.3337	0.3337
2	0.3337	0.3337	0.3337
3	0.3326	0	0
4	0	0.3326	0
5	0	0	0.3326
Modelo Compensatorio II para β = 8, γ = 9 y μ = 0.99			
f(C_j)	0.8956	0.8956	0.8956
1	0.3345	0.3345	0.3345
2	0.3345	0.3345	0.3345
3	0.3309	0	0
4	0	0.3309	0
5	0	0	0.3309

Tabla 4 a. IBA para el juego de 5 jugadores obtenido según los Modelos Probabilístico y Compensatorios I y II. Coaliciones con menos de 4 jugadores. Para el resto de las coaliciones posibles con menos de 4 jugadores se obtuvieron submatrices nulas. . Factibilidad de realizarse la negociación en el marco de las coaliciones.

La manera de interpretar los resultados de las tablas 3, 4a y 4b se ilustrará con el ejemplo expuesto en la tabla 3. Según estos resultados la solución del juego para el MP contiene a los vectores:

$(33.8017, 25.1983, 0; 0.1411)$, $(36.397, 0, 8.603; 0.1302)$, $(0, 29.1821, 9.8179; 0.1293)$ y $(37.9314, 28.9974, 10.0713; 0.0533)$

en el caso de coaliciones con 2 o más jugadores. Esto significa que según la ganancia que se obtiene por coalición, ésta se reparte entre los tres jugadores en las cantidades mostradas en las tres primeras componentes de cada vector. Por ejemplo, para la coalición formada por los tres jugadores, la ganancia total que se obtiene se reparte en: 37.9314 para el primer jugador, 28.9974 para el segundo y 10.0713 para el tercero, con una factibilidad de 0.0533 de llegar a un acuerdo. Nótese que la suma de las ganancias repartidas entre los jugadores es igual a la ganancia total que se puede obtener en cada coalición, en este caso es igual a 77.

Las soluciones equivalentes del MCI mostrado en la tabla son:

$(33.6357, 25.3643, 0; 0.5536)$, $(35.6135, 0, 9.3865; 0.5481)$,
$(0, 28.5047, 10.4953; 0.5476)$ y $(37.1917, 28.8137, 10.9946; 0.0783)$.

En este modelo se puede afirmar que la proposición:‘la factibilidad de llegar a un acuerdo en el marco de negociación formado por las tres instituciones es alta’ tiene un valor de verdad de 0.0783, que se interpreta como ‘casi falsa’, porque en la Lógica Compensatoria el valor de verdad tiene significación semántica en sí mismo.

En el MP para la misma afirmación tan solo se puede determinar que tiene valor de verdad 0.0533, lo que no significa precisamente que sea ‘casi falso’ y por tanto este valor es útil sólo si se compara con el resto de los valores de verdad, en este caso el único resultado válido es que en la coalición formada por los tres jugadores es donde se alcanza una menor probabilidad de alcanzar un acuerdo comparado con el resto de las coaliciones.

Jugadores	**{1,2,3,4}**	**{1,2,3,5}**	**{1,2,4,5}**	**{1,2,3,4,5}**
Modelo Probabilístico				
f(Cj)	0.0342	0.0342	0.0342	0.0087
1	0.3910	0.3910	0.3910	0.3511
2	0.3910	0.3910	0.3910	0.3511
3	0.1090	0.1090	0	0.0992
4	0.1090	0	0.1090	0.0992
5	0	0.1090	0.1090	0.0992
Modelo Compensatorio I para $\beta = 1$, $\gamma = 2$ y $\mu = 0.99$				
f(C_j)	0.0895	0.0895	0.0895	0.0292
1	0.3491	0.3491	0.3491	0.3025
2	0.3491	0.3491	0.3491	0.3025
3	0.1509	0.1509	0	0.1316
4	0.1509	0	0.1509	0.1316
5	0	0.1509	0.1509	0.1316
Modelo Compensatorio II para $\beta = 1$, $\gamma = 2$ y $\mu = 0.99$				
f(C_j)	0.0894	0.0894	0.0894	0.0292
1	0.4196	0.4196	0.4196	0.3876
2	0.4196	0.4196	0.4196	0.3876
3	0.0804	0.0804	0	0.0749
4	0.0804	0	0.0804	0.0749
5	0	0.0804	0.0804	0.0749
Modelo Compensatorio II para $\beta = 8$, $\gamma = 9$ y $\mu = 0.99$				
f(C_j)	0.8097	0.8097	0.8097	0.7887
1	0.3949	0.3949	0.3949	0.3571
2	0.3949	0.3949	0.3949	0.3571
3	0.1051	0.1051	0	0.0953
4	0.1051	0	0.1051	0.0953
5	0	0.1051	0.1051	0.0953

Tabla 4 b. IBA para el juego de 5 jugadores obtenido según los Modelos Probabilístico y Compensatorios I y II. Coaliciones con más de 3 jugadores. Para el resto de las coaliciones posibles con más de 3 jugadores se obtuvieron submatrices nulas. . Factibilidad de realizarse la negociación en el marco de las coaliciones.

Nótese además, que en los resultados del MCI se obtuvo de la proposición ‘un marco de negociación tiene una cantidad grande de instituciones’ una función de pertenencia sigmoidal con $\beta = 1$, $\gamma = 2$ y $\mu \approx 0.99$. Esto significa que la proposición analizada tiene un valor de verdad de 0.01 si se trata de un marco de negociación de un jugador, o sea que es ‘casi falsa’ y alcanza un valor de verdad de 0.5, ‘tan verdadera como falsa’, si se tiene un marco de negociación de 2 jugadores.

En la Tabla 5 se puede apreciar que para la institución 1, por ejemplo, el valor de verdad de la proposición: ‘El marco de negociación donde negocian las instituciones 1 y 3 es adecuado para la institución 1’ tiene valor de verdad de 0.0825 en el MP, y de 0.5543 para el MCI. En ambos éste es el mejor valor obtenido y entonces se le recomendaría al jugador 1 que negociara con la institución 3. Además, en el caso del MCI, se puede afirmar que esta proposición es ‘más verdadera que falsa’, puesto que es mayor a 0.5, mientras que en MP no se puede afirmar nada sobre el valor de verdad obtenido.

Jugadores	**{1,2}**	**{1,3}**	**{2,3}**	**{1,2,3}**
Modelo Probabilístico				
1	0.0741	0.0825	0	0.0284
2	0.0735	0	0.0708	0.0279
3	0	0.0788	0.0688	0.0275
Modelo Compensatorio I con $\beta = 1$, $\gamma = 2$ y $\mu = 0.99$				
1	0.5386	0.5543	0	0.3679
2	0.5377	0	0.5452	0.3665
3	0	0.5487	0.5420	0.3652

Tabla 5. Comparación de los valores del ICC1 de los modelos Probabilístico y Compensatorio I.

6. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES. CONVERGENCIA DE LOS ALGORITMOS.

El algoritmo descrito para el cálculo del IBA no se creó solamente para obtener los resultados numéricos mencionados, sino también para tomarlo como algoritmo de cálculo del IBA en cualquier ejemplo y para la validación de la existencia y la unicidad de la solución de cualquier juego cooperativo.

Para una cantidad mínima de 3 corridas por problema, por cada combinación de parámetros β, γ y μ, se han obtenido los mismos resultados para los mismos parámetros y en la totalidad de los casos corridos el algoritmo ha convergido. Según la fórmula (2) estos resultados para el IBA son válidos igualmente para la solución del juego.

7. CONCLUSIONES

Este artículo propone una solución de juego cooperativo n-personal que se basa en la Lógica Difusa Compensatoria. Esta solución parte de un modelo difuso anterior y mantiene sus ventajas, como es la mayor exactitud a la realidad del regateo, porque parte de proposiciones dadas por expertos sacadas de la literatura no matemática sobre el tema y expresadas en lenguaje natural.

Los índices que describen aspectos del regateo dan como resultado valores de verdad que pueden ser interpretados semánticamente en los MCI y MCII, a diferencia del MP. Esto trae como consecuencia una mayor expresividad de los resultados obtenidos en los MCI y MCII, en comparación con el MP, incluyendo a la función $f(C_j)$ que forma parte de la solución propuesta para el juego.

Se obtuvieron, además, tres índices cuantitativos para medir la negociación como son el IBA, el ICC1 y el ICC2 heredados del modelo anterior, pero en los nuevos modelos los ICC también adquieren un significado semántico.

Los nuevos modelos dependen de tres parámetros, que se calcularon comparando con el IBA del MP. Estos tres parámetros tienen relación con el valor lingüístico 'cantidad grande de jugadores', que fue modelado utilizando la función sigmoidal como función de pertenencia.

Después de generar 200 tríos de parámetros e introducir cada uno de ellos a tres ejemplos, uno de 3 jugadores, otro de 5 y otro de 7 y luego comparar con el IBA del MP, se obtuvo: El MCI tuvo como mejores parámetros a $\beta=1$, $\gamma=2$ y $\mu=0.99$ el MCII tuvo a $\beta=1$, $\gamma=2$ y $\mu=0.99$ para el caso de 3 jugadores y $\beta=8$, $\gamma=9$ y $\mu=0.99$ para el caso de 7 jugadores.

El algoritmo de punto fijo utilizado convergió en todos los casos corridos y después de tres corridas como mínimo por caso siempre convergió al mismo valor.

RECEIVED OCTOBER 2008
REVISED JULY 2009

REFERENCIAS

[1] BAZERMAN, M. y M. NEALE. (1992): **Negotiating Rationally**. The Free Press, New York.

[2] BUENO, E. (1972): **Lógica Modal. Una introducción a la Teoría de las Modalidades**. Cuadernos H, Serie Lógica y Metodología de la Ciencia. Universidad de la Habana.

[3] ESPÍN, R. (2000): **Índices cuantitativos para la Toma de Decisiones en el Proceso de Concertación de un negocio**, Tesis Doctoral, CUJAE, La Habana, Cuba.

[4] ESPIN, R., FERNÁNDEZ, E., MAZCORRO, G., MARX-GOMEZ J. y. LECICH, M.I (2006): Compensatory Logic: A fuzzy normative model for decision making**. Investigación Operacional.** 27, 188-197.

[5] ESPÍN R.; FERNÁNDEZ, E.; MAZCORRO, G. y LECICH, M. I. (2007):A fuzzy approach to cooperative n-person games**. European Journal of Operational Research**. 176, 1735-1751.

[6] FISHER, R.; y URY, W. (1983). **Getting to Yes Negotiation Agreement Without Giving**. Penguin Books, New York.

[7] FRENCH, S. (1986). **Decision Theory: An Introduction to de Mathematics of Rationality**. Halsted Press, New York.

[8] JANG, J-S. R.; SUN, C-T y MIZUTANI, E. (1997). **Neuro-fuzzy and soft computing: a computational approach to learning and machine intelligence**, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River.

[9] MARES, M. (2001): **Fuzzy Cooperative Games. Cooperation with vague expectations**. Physica-Verlag, New York.

[10] MIZUMOTO, M. (1989): Pictorial Representations of Fuzzy Conectives: Part II. Cases of Compensatory Operators and Self-Dual Operators. **Fuzzy Sets and Systems**. 32, 45-79.

[11] RAIFFA, H. (1982): **The Art and Science of Negotiation**. Harvard University Press, London.

[12] THOMAS, L. C. (1984): **Games, Theory and Applications/** John Wiley, New York.

[13] ZADEH, L.A.,(1965): Fuzzy Sets. **Information and Control**. 8, 338-353.
[14] ZADEH, L.A.,(1975). The concept of Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I. **Information Sciences**. 8, 199-249.