ALVAREZ A. 2009. Algunos Apartes Históricos Del Cálculo. Revista Sigma, 9 (2). Pág. 17-24 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/articulosIX2/3.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen IX Nº 2(2009), páginas 17-24

Algunos Apartes Históricos Del Cálculo

Abel Alvarez[1]

Abstract. This article is informative and the aim is to talk about some historical aspects of the development of calculus. The calculation baseline is in four problems that arose in the seventeenth century, solved largely by Fermat and Descartes. However, this work served as motivation for Newton and Leibniz in the development of calculus with nuances of each author. These techniques can identify new and diverse applications to science, but it also showed inconsistency in their mathematical foundation, which led to mathematicians as Euler, Bernoulli, Lagrange, among others, to try to overcome the diculties concerning the development of the denition of derivative.

Keywords. Derivate, line, area, maximun.

Resumen. Este artículo es divulgativo y lo que se pretende es hablar de algunos aspectos historicos de la evolución del cálculo. El inicio del estudio del cálculo radica en cuatro problemas que se presentaron en el siglo XVII, solucionados en gran parte, por Fermat y Descartes. No obstante, estos trabajos sirvieron como motivación para Newton y Leibniz en la formulación del cálculo con matices propios de cada autor. Estas técnicas permitieron encontrar nuevas y diversas aplicaciones a las ciencias, pero a la vez, mostraron inconsistencia en su fundamentación matemática, lo cual condujo a matemáticos como Euler, los Bernoulli, Lagrange, entre otros, a tratar de superar las dificultades referentes al desarrollo de la definición de derivada.

Palabras Clave. Derivada, linea, área, máximo.

1. Introducción

El cálculo es una de las más grandes invenciones al interior de la matemática; su génesis yace, principalmente, en cuatro problemas que ocupaban la mente de los científicos y matemáticos del siglo XVII, que pueden sintetisarze como:

1. Dada la posición de una partícula en función del tiempo, obtener la velocidad y/o aceleración instantáneas y dada la función de la velocidad o aceleración de una partícula, obtener la posición o su velocidad (respectivamente).

2. Obtener la recta tangente a una curva en un punto de ella.

3. Hallar puntos máximos y mínimos locales de una curva.

[1] Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

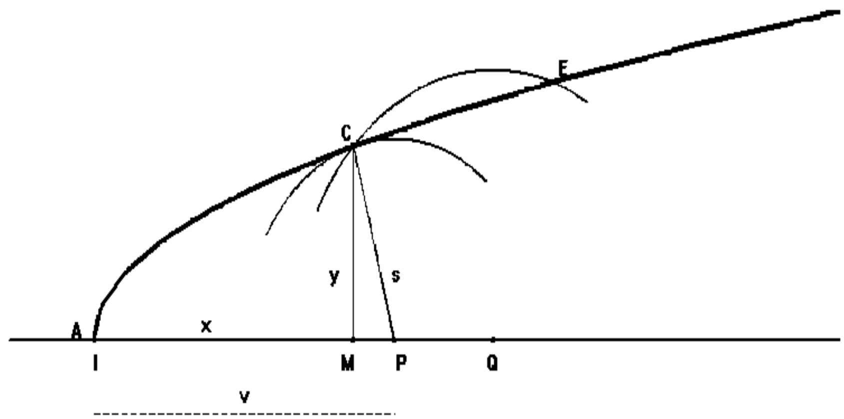

Figura 1: Construcción de rectas normales por el método de Descartes.

4. Encontrar longitudes de una curva, áreas acotadas por curvas y volúmenes acotados por superficies.

1.1. Primer Problema

El primer problema fue tratado por diversos académicos en el siglo XVII quienes buscaban obtener la velocidad instantánea de un cuerpo conociendo su posición (en función del tiempo). La solución de este problema presentaba diferentes dificultades. Una de ellas era que, al calcular la velocidad instantánea, no se podía realizar de la misma forma que la velocidad media, porque en un instante dado, la distancia recorrida y el tiempo empleado son igual a cero. De esta forma su "velocidad instantánea" sería igual a 0/0, lo cual no tiene sentido matemático que además contradice los principios físicos de los objetos en movimiento, pues ellos en un instante desarrollan velocidad. De manera análoga se razonaba acerca de la aceleración instantánea.

1.2. Segundo Problema

Este fue abordado por diversos matemáticos y científicos en el período de 1630 a 1660, heredado de la geometría pura. Consistía en hallar la recta tangente a una curva en un punto dado.
En la búsqueda de su solución surgieron diversos métodos con diferencias considerables, quizás por sus diversas aplicaciones científicas. Una de ellas se encuentra en la óptica al estudiar el fenómeno de refracción de la luz, ya que para calcular el ángulo de incidencia con el cual un rayo de luz atraviesa el lente, se debe tener en cuenta la recta normal a la curva engendrada por un corte a la superficie del lente en dicho punto. El problema se traduce en hallar la recta tangente a la superficie, debido a que esta es perpendicular a la recta normal.
Esta aplicación fue estudiada principalmente por Descartes, Fermat, Huygens y Newton.
René Descartes (1596-1650) en 1637, con el propósito de solucionar el problema del lente, ideó un método para determinar la normal a una curva en un punto dado. Este consiste en

que dada una curva algebraica ACE, por ejemplo en $y = \sqrt{x}$ (ver 1) , se debe encontrar la recta normal a la curva en el punto C. Para ello, se toma CP como la solución del problema donde M es el pie de la perpendicular a la recta AP trazada desde C. En la figura , se ilustra
Notación *$AM = x$ indica que la medida del segmento AM se denotará por x; en lo que resta del presente capítulo se mantendrá la consideración indistinta entre segmento y medida del segmento.*
A continuación se traza la circunferencia con centro en P que pasa por C siendo s el radio de esta circunferencia, $AM = x$, $CM = y$ y $AP = v$. Luego se toma un punto Q de la recta AP diferente de P. Así la circunferencia con centro en Q y radio $CQ = s_Q$ corta a la curva ACE en los puntos C y E, con lo cual la circunferencia con centro en P y radio s está dada por la ecuación

$$y^2 + (v - x)^2 = s^2$$

y la circunferencia con centro en Q y radio s_Q por

$$y^2 + (v_Q - x)^2 = s_Q^2 \qquad \text{donde } v_Q = AQ. \tag{1}$$

Al tomar $y = f(x)$ la ecuación 1 se convierte en

$$(f(x))^2 + (v_Q - x)^2 - s_Q^2 = 0. \tag{2}$$

Ya que esta ecuación tiene dos raíces distintas, Descartes razonaba que, "*cuando más se aproximen uno al otro, C y E, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final cuando los dos puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales, es decir, cuando la circunferencia que pasa por C toque a la curva en el punto C sin cortarla* [2]" , concluyendo que cuando la ecuación

$$(f(x))^2 + (v - x)^2 - s^2 = 0 \tag{3}$$

tenga dos raíces iguales a x_0, la recta CP será normal a la curva ACE en el punto C.
Sustituyendo $f(x)$ por $\sqrt{x}$, la ecuación (3) toma la forma

$$x + (v - x)^2 - s^2 = 0 \tag{4}$$

por tanto

$$x_0 = \frac{2v - 1 \pm \sqrt{(1 - 2v)^2 - 4(v^2 - s^2)}}{2}$$

y como 4 tiene dos raíces iguales, entonces

$$x_0 = \frac{2v - 1}{2}$$

luego

$$v = \frac{2x_0 + 1}{2}$$

donde x_0 es la distancia desde el punto A hasta M.
La arbitrariedad del punto C se tradujo al punto M y con la distancia de A hasta M se determinó la distancia de A hasta P, con cual los puntos C y P determinan la recta normal a la curva ACE en el punto C.
En este método se aprecia una fina combinación entre lo geométrico y lo algebraico, sin embargo, no es muy eficaz ya que hay casos en los que la ecuación, determinada por la suposición de un solo corte entre la curva y la circunferencia, conduce a una ecuación cuya resolución no es inmediata.

[2] Descartes Discours de la methode...la dioprique 1637, citado por GRATTAN-GUINNESS, I.,*Del cálculo a la teoría de conjuntos, una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1984. pág 30

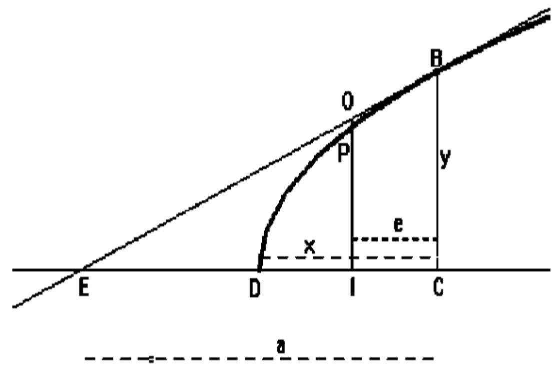

Figura 2: Construcción de rectas tangentes según el método de Fermat.

Otro académico que estudió el problema fue Pierre de Fermat (1601-1665), quién lo abordó a partir del trabajo realizado por él mismo titulado *Metudos ade disquiredam maximan et miniman* (1636), en donde presentó una generalización de un método para hallar máximos y mínimos de una curva algebraica. Dicho método lo sintetiza en la siguiente regla (Grattan[3]):

- Sea A un término relacionado con el problema.
- La cantidad máxima o mínima está expresada en términos que contienen sólo potencias de A.
- Se sustituye A por $A+E$, y el máximo o mínimo queda entonces expresado en términos de potencias de A y E.
- Las dos expresiones de máximo o mínimo se hacen "adiguales", lo que significa que "sean tan aproximadamente iguales como sea posible".
- Los términos comunes se eliminan.
- Se dividen los términos por una misma potencia de E de manera que al menos uno de los términos resultantes no contenga a E.
- Se ignoran los términos que aún contengan a E.
- Los restos se hacen iguales.

Fermat extendió este método para hallar máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad y la ley de los senos de la refracción. Se mostrará a continuación un ejemplo del uso de este método en la determinación de la recta tangente a una parábola en un punto dado.
Considérese la recta tangente a la curva $\sqrt{x}$ en el punto B (figura 2) y O un punto arbitrario de la recta tangente. Se construyen los segmentos BC e IO perpendiculares a la recta DC y así $BC = y$, $IC = e$, $DC = x$ y P el punto de intersección de IO con la parábola.

[3]GRATTAN-GUINNESS, I.,*Del cálculo a la teoría de conjuntos, una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1984.pág 38

Ahora, la recta tangente a la curva en el punto B debe cortar a la recta DC en algún punto, llámese a este E, con lo cual $EC = a$.

Fermat logra mostrar la ubicación del punto E a partir de la distancia DC, es decir, el valor de a en términos de x.
Teniendo en cuenta la desigualdad $IO > IP$, y las igualdades

$$DI = (IP)^2 \qquad \text{y} \qquad DC = (CB)^2$$

se obtiene

$$\frac{DC}{DI} = \frac{(CB)^2}{(IP)^2} > \frac{(CB)^2}{(IO)^2}$$

Por la semejanza entre los triángulos EIO y ECB se tiene que

$$\frac{(CB)^2}{(IO)^2} = \frac{(EC)^2}{(EI)^2}$$

por tanto

$$\frac{DC}{DI} > \frac{(EC)^2}{(EI)^2}$$

sustituyendo DC, EC e IC, por x, a y e respectivamente, se obtiene

$$\frac{x}{x-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

es decir

$$xa^2 + xe^2 - 2xae > xa^2 - a^2e.$$

Atendiendo al método de Fermat, se sustituye esta desigualdad por una adigualdad y eliminando términos semejantes (*paso iv y v del método de máximos y mínimos*) para obtener

$$xe^2 - 2xae \sim -a^2e$$

ahora se divide por e ambos miembros de la adigualdad (*paso vi*)

$$xe - 2xa \sim -a^2$$

se ignoran los términos que contengan e y se cambia la adigualdad por la igualdad (*pasos vii y viii*) logrando que

$$a = 2x$$

Esto era lo que se pretendía, expresar a en términos de x.

Aunque este método era más aplicable que el de Descartes, tenía inconvenientes en la fundamentación matemática, ya que la cantidad e en algunos momentos Fermat la considera diferente de cero (hasta el paso *vi*), y en el paso *vii* la hace igual a cero. No obstante este método es un vestigio del cálculo actual.

Por último, se debe mencionar a Isaac Barrow (1630-1677), quien también proporcionó un método para obtener tangentes a una curva en su trabajo *Lectiones geometricae* (1669). Él contribuyó en gran medida a la teoría del cálculo y este legado fue adquirido por Newton.

Varios matemáticos de la época estudiaron este problema y con ello prepararon el camino hacia la generalización de estos métodos que posteriormente fue realizada por Newton y Leibniz en la creación del cálculo.

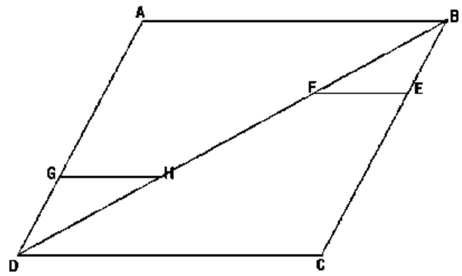

Figura 3: Método de Cavalieri para hallar el área de un paralelogramo.

1.2.1. Tercer problema

Este consistía en hallar máximos y mínimos locales de una curva. Inicialmente, fue tratado por Kepler en 1615, al estudiar la forma que deberían tener los toneles de vino. En su trabajo *Stereometria Doliorum*, demostró que el cubo es el paralelepípedo recto con base cuadrada de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera y notó que para valores particulares cercanos al máximo, el cambio en el volumen generado por una variación constante en las dimensiones del paralelepípedo presentaba un crecimiento menor.

Fermat en su obra *Methodus as Disquirendam maximan et miniman* daba un método al que ya se hizo referencia en el problema de las tangentes y que posteriormente fue modificado por Barrow.

1.2.2. Cuarto problema

Éste giraba en torno al cálculo de la longitud de una curva, áreas acotadas por curvas y volúmenes acotados por superficies.

Desde la antigua Grecia fue tratado mediante el método de exhaución por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. Con el propósito de encontrar otro método, en 1635 Bonaventura Cavalieri, consideraba el área de una figura como un número indefinido de rectas paralelas y equidistantes y el volumen como un número indefinido de áreas planas, paralelas y equidistantes. Estos elementos los denominaba indivisibles, lo cual plasmó en su trabajo *La Geometría indivisibilus Continourum Nova quandam Ratione Promota* (Geometría superior mediante un método bastante desconocido, los indivisibles de los continuos). Posteriormente, en su trabajo *Exercitationes Geometricae Sex* (1647), afirmó que un área o un volumen está constituido por infinitos indivisibles, lo que puede explicarse como sigue:

Dado un paralelogramo $ABCD$ (ver figura 3), se pretende mostrar que los triángulos ABD y BCD tienen la misma área. Para ello se considera un punto G sobre el segmento AD y un punto E sobre BC tal que $GD \cong BE$, y los segmentos GH y FE paralelos a AB. Por lo tanto los triángulos ABD y BCD están constituidos por igual número de segmentos congruentes, como lo son GH y FE, lo cual indica que tienen la misma área. Con este método Cavalieri obtuvo diferentes resultados y entre ellos se destaca (en la notación actual):

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Para valores enteros positivos de n menores que 10. No obstante, su método era enteramente geométrico.

El método de los indivisibles también es atribuido a Roberval, sin embargo, su trabajo presentaba una considerable diferencia con el propuesto por Cavalieri, ya que el primero creía en la infinita indivisibilidad de las líneas, superficies y volúmenes; a este método lo llamó el de *las infinidades*.

Como puede verse, las propuestas de Cavalieri y Roverval se fundamentaban en la geometría, en contraste a ello figuran las de Fermat y Pascal. Fermat en 1638, en una carta a Mersenne, le explica el método de la cuadratura[*] aritmética para hallar el área encerrada bajo la espiral de Galileo. Pascal (1623-1662) en su tratado Postetatun Numericarum Summa (suma de potencias numéricas) explicó que sus resultados referentes a las sumas

$$\sum_{i=0}^{m}(A+id)^n$$

con A, d y n números naturales, se podían aplicar para hallar el área bajo las curvas utilizando demostraciones por inducción completa. Además estableció reglas para determinar los coeficientes binomiales. De manera análoga, Wallis de forma independiente en su trabajo *Arithmetica infinitorum* (Aritmetica de los infinitos) recurre a la aritmética para resolver problemas de esta índole y fue el que más aportes hizo a la integración por estos métodos.

[*] El término cuadratura hace referencia al área limitada por una curva, el eje de las abscisas y una recta paralela al eje de las ordenadas.

Referencias

[1] APOSTOL, Tom, *Calculus*, Vol. 1, Ed. Reverté. Bogotá 1988.

[2] BOYER, Carl, *The history of the calculus and its conceptual development*,Dover publications. New York.

[3] GRATTAN-GUINNESS, I.,*Del cálculo a la teoría de conjuntos, una introducción histórica.* Madrid: Alianza Editorial S.A., 1984.

[4] KLINE Morris,*El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Volumen I, Madrid:Alianza Editorial S.A., 1992

[5] KLINE Morris,*El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Volumen II, Madrid:Alianza Editorial S.A., 1992

[6] KLINE Morris,*El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Volumen III, Madrid:Alianza Editorial S.A., 1992

e-mail: abelalv@gmail.com