Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165
Volumen 5, número 9, junio de 2009, páginas 45–54

Algunas integrales indefinidas que contienen a la función hipergeométrica generalizada

Algumas integrais indefinidas que contêm a função hipergeométrica generalizada

Some indefined integrals containing to the generalized hypergeometric function

Jaime Castillo–Pérez[1] y Leda Galué[2]

Recepción: 12-nov-2008/Modificación: 14-may-2009/Aceptación: 14-may-2009
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

En 1999 Nina Virchenko consideró la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ con un conjunto de fórmulas de recurrencia y de diferenciación. En este trabajo se evalúan algunas integrales indefinidas que contienen a la función hipergeométrica generalizada y algunos casos paticulares.

Palabras claves: función hipergeométrica generalizada, relaciones de recurrencia, integrales indefinidas.

Resumo

Em 1999, Nina Virchenko considerado um generalização da função hipergeométrica Gauss ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ com um conjunto de fórmulas recorrência e

[1] MSc en Matemática aplicada, jacas68@yahoo.es, profesor, GIMA, Universidad de la Guajira, Riohacha–Colombia.
[2] PhD, ledagalue@hotmail.com, profesor jubilado, CIMA, Universidad del Zulia, Maracaibo–Venezuela.

diferenciação. Este trabalho avalia algumas integrais indefinidas que contém a função hipergeométrica generalizada e alguns casos especiais.

Palavras chaves: função hipergeométrica generalizada, relações de recorrência, integrais indefinidas.

Abstract

In 1999 Nina Virchenko have considered the τ-generalization of Gauss hypergeometric function ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ with a set of recurrence relations and differentiation formulas. In this paper is obtained some indefined integrals associated with the generalized hypergeometric function and some particular cases.

Key words: generalized hypergeometric function, recurrence relations, indefined integrals.

1 Introducción

Un gran número de funciones especiales pueden ser representadas en términos de series hipergeométricas y series hipergeométricas confluentes. Las series hipergeométricas en una y varias variables, aparecen naturalmente en una variedad de problemas en matemática aplicada, estadística, investigación de operaciones, física teórica y ciencias de la ingeniería [1, 2, 3]. Mathai y Saxena [3, 4] presentaron varias aplicaciones de las series hipergeométricas en una y varias variables en la solución de problemas de estadística y ciencias físicas. Kalla y colaboradores [5] usan funciones hipergeométricas para estudiar nuevas funciones de probabilidad que generalizan las existentes.

En 1999 N. Virchenko [6] consideró una generalización de la serie hipergeométrica de Gauss de la forma

$$ {}_2R_1^{\tau}(z) = {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!} \,, \qquad (1) $$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots; |z| < 1$.

Si $\tau = 1$ en (1),

$$ {}_2R_1(a, b; c; 1; z) = {}_2F_1(a, b; c; z), \quad c \neq 0, -1, -2, \ldots; |z| < 1\,. $$

Esta función tiene la representación integral

$$
{}_2R_1(a,b;c;\tau;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt^{\tau})^{-a}dt\,,
$$

$$
\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0\,.
$$

Posteriormente, en el 2008, J. Castillo [7, 8] presentó la representación para la función ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$

$$
\begin{aligned}
{}_2R_1(a,b;c;\tau;z)&=\frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)}\times\\
&\quad {}_2F_1(a,\frac{k+b}{\tau};\frac{k+b}{\tau}+1;z)\,, \qquad (2)\\
&\quad \tau>0,\ \mathrm{Re}\,(c)>\mathrm{Re}\,(b)>0\,.
\end{aligned}
$$

En este trabajo se evalúan algunas integrales indefinidas que contienen a la función hipergeométrica generalizada, las cuales generalizan a las existentes.

2 Algunas integrales indefinidas que contienen a la función ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$

En la actualidad se tienen muchos resultados que involucran a la función hipergeométrica de Gauss, entre los cuales están las integrales indefinidas asociadas a dicha función, éstas han sido calculadas por diversos investigadores, por ejemplo [9, págs. 44–45]:

$$
\begin{aligned}
&\int x^n{}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a, & b\\ c; & x\end{array}\right)dx=\\
&n!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}(c-k)_k\,x^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,(a-k)_k\,(b-k)_k}{}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a-k, & b-k\\ c-k; & x\end{array}\right). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\int x^{a-n-2}{}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a, & b\\ c; & x\end{array}\right)dx=
$$

$$n!x^{a-n-1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(n-k+1)!\,(a-k)_k}\,{}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a-k, & b \\ c; & x \end{array}\right). \tag{4}$$

$$\int (1-x)^n\,{}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a, & b \\ c; & x \end{array}\right)dx =$$
$$n!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(c-k)_k\,(1-x)^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,(a-k)_k\,(b-k)_k}\,{}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a-k, & b-k \\ c-k; & x \end{array}\right). \tag{5}$$

$$\int x^{a-n-2}\,(1-x)^n\,{}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a, & b \\ c; & x \end{array}\right)dx =$$
$$n!x^{a-n-1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(1-x)^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,(a-k)_k}\,{}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a-k, & b \\ c; & x \end{array}\right). \tag{6}$$

3 Algunas integrales indefinidas que involucran a la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss

En esta sección se presentan tres casos diferentes de integrales indefinidas que involucran a la función ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$, también se presentan los casos particulares asociados a los mismos. Además, se usa con frecuencia (2), lo que facilita obtener las condiciones de validez de cada integral.

3.1 Integrales de la forma $\int z^\alpha\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz$

3.1.1 Calcular la integral $I=\int z^n\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz$. De acuerdo con (2)

$$I=\frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)}\ {}_2F_1\left(a,\frac{k+b}{\tau};\frac{k+b}{\tau}+1;z\right)dz\,,$$

$$\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0\,.$$

Teniendo en cuenta la convergencia absolula de la serie, se intercambia la suma con la integral y se obtiene

$$I=\frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)}\int z^n\ {}_2F_1(a,\frac{k+b}{\tau};\frac{k+b}{\tau}+1;z)dz\,.$$

Usando (3) para evaluar la integral,

$$\begin{aligned}I=&\frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)}\times\\ &n!\sum_{j=1}^{n+1}\frac{(-1)^{j+1}\left(\frac{k+b}{\tau}+1-j\right)_j\ z^{n-j+1}}{(n-j+1)!\,(a-j)_j\left(\frac{k+b}{\tau}-j\right)_j}\times\\ &{}_2F_1(a-j,\frac{k+b}{\tau}-j;\frac{k+b}{\tau}+1-j;z)\,.\end{aligned}$$

Este resultado aplicando nuevamente (2) equivale a

$$\begin{aligned}\int z^n\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz=n!\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{(-1)^{j+1}\,\Gamma(b-\tau j)\,z^{n-j+1}}{(n-j+1)!\,(a-j)_j\,\Gamma(c-\tau j)}\times\\ {}_2R_1(a-j,b-\tau j;c-\tau j;\tau;z)\,,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0,\ \ c-\tau j\neq 0,-1,-2,\ldots;|z|<1\,.$$

Si $\tau=1$ y $n=0$ en (7), se obtienen respectivamente (3) y

$$\int {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-\tau)}{(a-1)\,\Gamma(b)\Gamma(c-\tau)}{}_2R_1(a-1,b-\tau;c-\tau;\tau;z)\,,\tag{8}$$

$$\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0,\ \ c-\tau\neq 0,-1,-2,\ldots;|z|<1\,.$$

Si $\tau=1$ en (8), se obtiene el resultado conocido [9, pág. 44, No. (1.15.1.5)].

3.1.2 Calcular la integral $I=\int z^{a-n-2}\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz$. De (2) se tiene

$$I=\frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)}\times$$

$$\int z^{a-n-2}\ {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau}+1; z\right) dz\,,$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0\,,$$

donde se ha intercambiado el orden de la integral y la sumatoria.

Usando (4) para evaluar la integral, y aplicando (2)

$$\int z^{a-n-2}\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz =$$

$$n!z^{a-n-1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{(n-j+1)!\,(a-j)_j}\ {}_2R_1(a-j,b;c;\tau;z)\,, \quad (9)$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0,\ c \neq 0,-1,-2,\ldots;|z|<1\,.$$

Si $\tau = 1$ y $n = 0$ en (9), se obtienen respectivamente (4) y

$$\int z^{a-2}\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz = \frac{z^{a-1}}{(a-1)}{}_2R_1(a-1,b;c;\tau;z)\,. \quad (10)$$

Si $\tau = 1$ en (10), se tiene un resultado conocido [9, pág. 44, No. (1.15.1.6)].

3.1.3 Calcular $I = \int z^{c-1}{}_2R_1(a,b;c;\tau;z^\tau)dz$. Usando la expansión en serie de la función ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z^\tau)$ se tiene

$$I = \int \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,\Gamma(b+k\tau)}{\Gamma(c+k\tau)}\frac{z^{\tau k+c-1}}{k!}dz\,.$$

Teniendo en cuenta la convergencia absolula de la serie, se intercambia la suma con la integral, y desarrollando se obtiene

$$I = z^c\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,\Gamma(b+k\tau)}{\Gamma(c+1+k\tau)}\frac{z^{\tau k}}{k!}\,,$$

de donde

$$\int z^{c-1}\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z^\tau)dz = \frac{z^c}{c}\ {}_2R_1(a,b;c+1;\tau;z^\tau)\,, \quad (11)$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq -1, -2, \ldots$, $|z^\tau| < 1$.

Si $\tau = 1$ en (11), se obtiene el resultado conocido [9, pág. 44, No. (1.15.1.7)].

3.1.4 Calcular $I = \int z^{c+n-1}\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z^\tau)dz$ Usando la fórmula generalizada de integración por partes

$$\int f^{(n)}(x)\, g(x)\, dx = f^{(n-1)}(x)\, g(x) - f^{(n-2)}(x)\, g'(x) + f^{(n-3)}(x)\, g''(x) -$$
$$\cdots + (-1)^n \int f(x)\, g^{(n)}(x)\, dx$$

y el resultado (11) se obtiene

$$I = \frac{z^{n+c}}{c}\ {}_2R_1(a,b;c+1;\tau;z^\tau) - \frac{nz^{n+c}}{c\,(c+1)}\ {}_2R_1(a,b;c+2;\tau;z^\tau) + \cdots +$$
$$\frac{(-1)^n\, n\,(n-1)\ldots 2{,}1}{c\,(c+1)\ldots(c+n-1)\,(c+n)} z^{n+c}\ {}_2R_1(a,b;c+n+1;\tau;z^\tau)\,,$$

esto es,

$$\int z^{c+n-1}\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z^\tau)dz = n!z^{n+c}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{(-1)^{j+1}}{(n-j+1)!\,(c)_j}{}_2R_1(a,b;c+j;\tau;z^\tau)\,, \tag{12}$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq -1, -2, \ldots ; |z^\tau| < 1$.

Si $\tau = 1$ en (12), se obtiene [9, pág 44, No. (1.15.1.4)].

3.2 Integrales de la forma $\int (1-z)^n\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz$

Por analogía con el cálculo de 3.1.1

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)}\times$$
$$\int (1-z)^n\ {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau}+1; z\right) dz\,,$$
$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0\,,$$

y en virtud de (5),

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} n!\times$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\left(\frac{k+b}{\tau}+1-j\right)_j (1-z)^{n-j+1}}{(n-j+1)!\,(a-j)_j \left(\frac{k+b}{\tau}-j\right)_j} \times {}_2F_1(a-j, \frac{k+b}{\tau}-j; \frac{k+b}{\tau}+1-j; z)\,.$$

En virtud de (2) se obtiene

$$\int (1-z)^n \ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz = n!\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\Gamma(b-j\tau)\,(1-z)^{n-j+1}}{(n-j+1)!\,(a-j)_j\,\Gamma(c-j\tau)} \times$$

$$ {}_2R_1(a-j, b-j\tau; c-j\tau; \tau; z)\,, \tag{13}$$

$$\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0,\ c-\tau j \neq 0, -1, -2, \ldots; |z| < 1\,.$$

Si $\tau = 1$ en (13), se tiene [9, pág. 44, No. (1.15.2.3)].

3.3 Integrales de la forma $I = \int z^{\alpha} (1-z)^{\beta}\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz$

3.3.1 Calcular $I = \int z^{a-n-2} (1-z)^n\ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)dz$. De (2)

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times$$

$$\int z^{a-n-2} (1-z)^n\ {}_2F_1(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau}+1; z)dz\,, \tag{14}$$

$$\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0\,,$$

y usando (5) en (14) se obtiene

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} n! z^{a-n-1} \times$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{(1-z)^{n-j+1}}{(n-j+1)!\,(a-j)_j}\ {}_2F_1\left(a-j, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau}+1; z\right),$$

el cual, de (2), equivale a

$$I = n! z^{a-n-1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(1-z)^{n-j+1}}{(n-j+1)!\,(a-j)_j}\ {}_2R_1(a-j, b; c; \tau; z)\,, \tag{15}$$

$$\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0,\ c \neq 0, -1, -2, \ldots; |z| < 1\,.$$

Si $\tau = 1$ en (15), se obtiene (6).

3.3.2 Calcular $I = \int z^{c-1}(1-z)^n \; {}_2R_1(a,b;c;\tau;z^\tau)dz$. Usando la fórmula generalizada de integración por partes, del resultado 3.1.4 y de (11), se obtiene

$$I = \frac{z^c}{c}(1-z)^n \; {}_2R_1(a,b;c+1;\tau;z^\tau) + \frac{nz^{c+1}}{c\,(c+1)}(1-z)^{n-1} \; {}_2R_1(a,b;c+2;\tau;z^\tau) +$$
$$\cdots + \frac{n\,(n-1)\ldots 2{,}1 \; z^{c+n}}{c\,(c+1)\ldots(c+n-1)\,(c+n)} \; {}_2R_1(a,b;c+n+1;\tau;z^\tau)\,,$$

esto es,

$$\int z^{c-1}(1-z)^n \; {}_2R_1(a,b;c;\tau;z^\tau)dz = n!\,(1-z)^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{z^{c+j-1}\,(1-z)^{-j}}{(n-j+1)!\,(c)_j}\times$$
$${}_2R_1(a,b;c+j;\tau;z^\tau)\,, \tag{16}$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq -1, -2, \ldots; |z^\tau| < 1$.

Para $\tau = 1$ en (16) se tiene

$$\int z^{c-1}(1-z)^n \; {}_2F_1(a,b;c;z)dz = n!\,(1-z)^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{z^{c+j-1}\,(1-z)^{-j}}{(n-j+1)!\,(c)_j}\times$$
$${}_2F_1(a,b;c+j;z)$$

$$c \neq -1, -2, \ldots; |z| < 1\,.$$

que es un resultado conocido [9, pág 45, No. (1.15.3.5)]

4 Conclusiones

1. Es posible obtener fórmulas computables para las integrales indefinidas asociadas con la función hipergeométrica generalizada.

2. Los resultados que se obtuvieron generalizan a los existentes en la bibliogafía especializada.

3. Además de la integrales presentadas en la sección 2, existen otras relacionadas con cada caso; sólo que no es fácil encontrar una forma computable para la dichas integrales

Referencias

[1] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy. *Special Functions*, ISBN 0–521–62321–9. New York: Cambridge University Press, 1, 1999. Referenciado en 46

[2] James B. Seaborn. *Hypergeometric functions and their applications*, ISBN 0–387–97558–6. NewYork: Springer–Verlag, 1991. Referenciado en 46

[3] A. M. Mathai and R. K. Saxena. *Generalized hypergeometric functions with applications in Statistics and physical Sciences*, ISBN 0–387–06482. NewYork: Springer–Verlag, 1970. Referenciado en 46

[4] A. M. Mathai and R. K. Saxena. *Generalized hypergeometric functions with applications in Statistics and physical Sciences*, ISBN 978–3540064824. NewYork: Springer–Verlag, 1973. Referenciado en 46

[5] Y. Ben Nakhi and S. L. Kalla. *A generalized beta functions and associated probability density*. International journal of mathematics and mathematics sciences, ISSN 0161–1712, **30**(8), 467–478 (2002). Referenciado en 46

[6] N. Virchenko. *On some generalizations of the functions of hypergeometric type.* Fractional Calculus and Applied Analysis, ISSN 1311–0454, **2**(3), 233–244 (1999). Referenciado en 46

[7] Jaime Castillo. *Algunas integrales impropias con límites de integración infinitos que involucran a la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss.* Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165, **3**(5), 67–85 (2007). Referenciado en 47

[8] Jaime Castillo. *Algunas integrales que involucran a la función hipergeométrica generalizada*. Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165, **4**(7), 7–22 (2008). Referenciado en 47

[9] Anatolii Platonovich Prudnikov, Yurii Aleksandrovich Brychkov and Oleg Igorevich Marichev. *Integrals and Series: more special functions*, ISBN 978–2881246821. New York: Gordon and Breach Science Publishers, **3**, 1992. Referenciado en 47, 49, 50, 51, 52, 53