Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XI No. 1 (2004), pp. 4–18

SINGULARIDADES, RAMIFICACIÓN Y CONTINUIDAD: UN ENCUENTRO ENTRE RIEMANN, BEETHOVEN Y NOVALIS

FERNANDO ZALAMEA (*)

A la memoria del Maestro
Jairo Charris Castañeda

Resumen. Estudiamos la conjunción uno/múltiple y la dialéctica continuo/discontinuo en el tejido matemático, musical y filosófico, centrándonos en tres obras específicas: los *Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de variable compleja* de Riemann (1851), el *Cuarteto en do sostenido menor op. 131* de Beethoven (1826), y *Los Discípulos de Sais* de Novalis (1798). Algunas técnicas propias del romanticismo para integrar lo singular dentro de un entorno más liso y fluido –abierto a una conectividad global de la naturaleza y la cultura– se ponen así en evidencia.

La figura de Jairo Charris quedará perdurablemente asociada a la *pasión* por la verdad, una verdad nítida y cristalina indistintamente de pasajeros disfraces y coloridos. En una época en la que descreemos fácilmente de lo verdadero, lo universal, lo alto y lo magnífico, la convicción del Profesor Charris por el valor siempre vivo de la matemática, por la armonía estética de la arquitectónica cultural y por el coraje ético del individuo en medio de entornos laxos y desorientados, seguirán siendo siempre, para todos los que tuvimos la fortuna de conocerle, un ejemplo de fortaleza y honradez intelectual. Recordando una tarde memorable en que Jairo Charris entrelazó su fascinación por la variable compleja, por el último Beethoven y por un cosmos unitario, quisiéramos aquí poder rendir homenaje a su pasión matemática, musical y filosófica. En estas páginas nos extenderemos sobre esa unión brevemente intuida, y, a través de un análisis detallado de los *Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de variable compleja* de Riemann (1851), del *Cuarteto*

(*) Fernando Zalamea. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
E-mail: fernandozalamea@ yahoo.com Web: www.matematicas.unal.edu.co/∼fzalamea.

en do sostenido menor op. 131 de Beethoven (1826) y de *Los Discípulos de Sais* de Novalis (1798) –así como a través de su posterior síntesis–, intentaremos demostrar que esa confluencia no es tan casual como podría parecer en primera instancia, y que se debe, en buena medida, a un mismo tenor unitario y dialéctico, propio de ciertas tendencias genéricas del romanticismo alemán elaboradas en la primera mitad del siglo XIX y escondidas detrás de diversas concreciones en la matemática, en la música o en la filosofía.

1. Las superficies de Riemann

En su tesis doctoral, *Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de variable compleja* [Riemann 1851], el joven matemático alemán, a la sazón con 26 años, marca un giro determinante en la concepción moderna del análisis matemático, al introducir consideraciones cualitativas globales –geométricas y topológicas– que complementan el manejo de cálculos cuantitativos locales. Coincidiendo con el enfoque estructural iniciado por Galois al tratar las ecuaciones algebraicas mediante jerarquías de subgrupos asociados, la tesis de Riemann opta por una matemática *estructural y cualitativa* que subyace hondamente en la imparable eclosión de la matemática en la primera mitad del siglo XX (Hilbert, Noether, escuela polaca, Bourbaki, etc.)[1]. Varias ideas y técnicas fundamentales se introducen en la tesis: caracterización geométrica de las funciones holomorfas (vía las que luego se llamarán ecuaciones de Cauchy-Riemann), "superficies superpuestas" (que luego se llamarán superficies de Riemann[2]), puntos de ramificación como singularidades especiales, vaivén entre análisis global sobre la superficie y expansiones locales en series

[1]Sin embargo, debe observarse que la recepción directa de la tesis de Riemann fue más que tibia. El reporte de Gauss sobre la tesis (defendida en Göttingen) sólo puede considerarse como diplomático: según Gauss, el trabajo es "prudente y conciso, y, en algunos lugares, incluso elegante" (ver [Laugwitz 1999, p. 118]). Aunque la tesis fue publicada en la primera edición de las obras [Riemann 1876], pocas veces se mencionó antes de 1890 (ver [Laugwitz 1999, p. 121]).

[2]En términos simples, la idea básica detrás de una superficie de Riemann consiste en representar una relación algebraica multivalente *r(z,w) = 0* entre una variable compleja z (en el dominio de la relación) y una variable compleja w (en el codominio de la relación) gracias a un recubrimiento del plano complejo z por una pila de planos, ondulados y holomórficamente "pegados", que representan los distintos valores posibles de w para valores dados de z. Si para un valor z_0 determinado la ecuación $r(z_0, w) = 0$ tiene n raíces, aparecen entonces n planos ondulados (= "hojas" de la superficie de Riemann) que recubren al plano z en una vecindad de z_0. Para algunos valores excepcionales de z(= "puntos de ramificación"), las hojas se unen al coincidir las raíces, y las expansiones locales de w se comportan como potencias *fraccionarias* de z (correspondiendo a las resoluciones algebraicas de la relación). Mediante las representaciones de las relaciones $w = z^{n/m}$ se clasifican entonces todas las superficies de Riemann usuales (compactas y orientadas). En vez de trabajar con el plano complejo z usual, es más cómodo hacerlo con el plano proyectivo (añadiendo un punto en el infinito), y, en ese caso, la superficie de Riemann de $w = z^{1/2}$ es homeomorfa a una esfera, mientras que la superficie de Riemann de $w = z^{3/2}$ es homeomorfa a un toro. Para una introducción

de potencias, teoremas generales de representación conforme. En esta sección, nos concentraremos en la emergencia de las superficies de Riemann y en el tratamiento dado a los puntos de ramificación en la tesis [Riemann 1851], interesándonos así sobre todo en la *precisa creatividad matemática* que responde en ese momento a la dialéctica genérica de *cómo pegar continuamente lo múltiple en lo uno*. Al final de la sección, veremos cómo esa emergencia creativa se consolida en un subsiguiente curso dado por Riemann sobre variable compleja [Riemann 1855/56], al igual que en su célebre artículo sobre las integrales abelianas [Riemann 1857].

Las superficies de Riemann aparecen en el §V de la tesis doctoral [Riemann 1851]. Riemann estratifica el dominio de definición de una relación algebraica $r(z,w) = 0$ entre dos variables complejas z,w, incluyendo varias copias superpuestas del dominio de z, de tal manera que los eventuales valores múltiples $(z, w_1),\ldots,(z,w_n)$ satisfechos en la relación puedan entenderse como valores únicos $(z^{(1)}, w_1), ..., (z^{(n)}, w_n)$ cuando se recorren las distintas copias $z^{(i)}$ superpuestas del dominio:

> En las consideraciones siguientes, limitaremos la variación de las magnitudes x, y a un dominio finito, y, como lugar del punto O [de coordenadas x, y], no consideraremos ya al plano A [plano x, y] en sí mismo, sino una superficie T que recubra al plano. Escogemos este modo de representación, donde no resulta nada chocante hablar de superficies superpuestas, con tal de poder admitir que el lugar del punto O pueda recubrir varias veces la misma parte del plano. [Riemann 1851, p. 6]

Las "superficies superpuestas" se entroncan unas con otras cuando la multivalencia se reduce, es decir, cuando algunas raíces de la ecuación $r(z,w) = 0$ coinciden. Diversos circuitos permiten ir contando los "acordes" de porciones de superficie [Riemann 1851, p. 7]. En el caso en que un móvil "vuelve después de m circuitos sobre la misma porción de superficie, y su camino se limita a m partes de superficies superpuestas que se reúnen en un punto único [...], ese punto lo denominaremos punto de ramificación de orden $m-1$ de la superficie T" [Riemann 1851, p. 8 (en la terminología actual el orden es m)]. Los puntos de ramificación, raíces múltiples de la relación algebraica $r(z,w) = 0$, adquieren así un fino estatuto geométrico, como lugares de tránsito entre las hojas de la superficie de Riemann.

En el §XIV de la tesis, Riemann muestra que el carácter singular de los puntos de ramificación (cuyas expresiones *meromorfas* locales incluyen términos de la forma $z^{-n/m}$) puede obviarse desde el punto de vista global de las "superficies superpuestas", y demuestra cómo el tránsito geométrico en los puntos

moderna (accesible y completa) a las superficies de Riemann, véase [Fulton 1995, parte X ("Superficies de Riemann"), pp. 261-311].

de ramificación resulta *holomorfo* desde esa perspectiva global [Riemann 1851, pp. 32-33] (de hecho, una parametrización adecuada alrededor de los puntos de ramificación asegura que lo "coincidente" se "pegue": términos de Riemann). El acorde continuo así conseguido, partiendo de singularidades locales, constituye una profunda inversión matemática. La fluidez y la lisura obtenidas gracias a una estructura geométrica y topológica que *invierte* una aparente debilidad en fortaleza constituyen una notable consecución técnica dentro de los pares dialécticos uno/múltiple y continuo/discontinuo. Las superficies de Riemann concretan así uno de los mayores sueños de la filosofía griega: por un lado, lo *múltiple* (relación) se torna *uno* (superficie); por otro lado, el *tránsito continuo* entre lo uno y lo múltiple se controla con precisión (puntos de ramificación).

Después de su somera introducción en los *Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de variable compleja*, las superficies de Riemann aparecen ya más desarrolladas en el primer curso de variable compleja dictado por Riemann en Göttingen [Riemann 1855/56]. Los apuntes manuscritos del curso incluyen algunos hermosos gráficos en los que el tránsito por ciertos circuitos se conecta con el orden de los puntos de ramificación de algunas funciones hiperelípticas y en los que una integración a lo largo de esos circuitos proporciona los periodos de las integrales abelianas asociadas [Gray 1997, p. 59]:

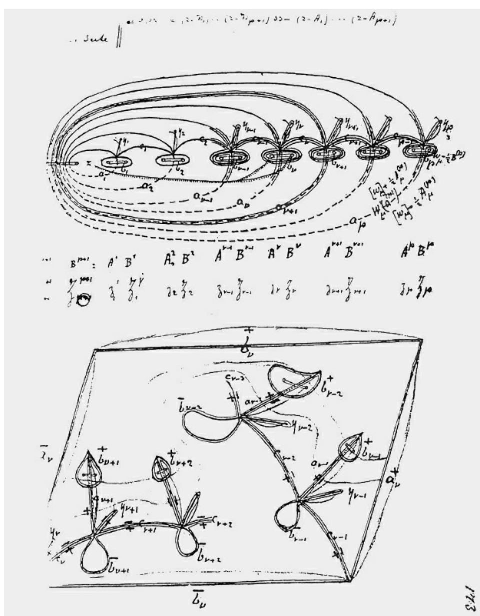

FIGURA 1
Circuitos en secciones de superficies de Riemann [Riemann 1855/56, pp. 172-173]

Un año después, en la memoria sobre la *Teoría de funciones abelianas* [Riemann 1857] que haría públicas las concepciones de Riemann, las "superficies superpuestas" adquieren su descripción geométrica definitiva:

> Alrededor de un punto de ramificación de la función, una hoja de la superficie se prolongará en otra hoja, de tal manera que, en la vecindad de ese punto, la superficie pueda ser vista como un helicoide cuyo eje es perpendicular al plano de los (x, y) en ese punto y cuyo paso de rosca es infinitamente pequeño. Pero cuando la función, después de que z haya descrito varios giros alrededor del valor de ramificación, vuelva a tomar su valor inicial, deberá entonces suponerse que la hoja superior de la superficie concuerde con la hoja inferior pasando a través de las demás hojas. La función multiforme admite, en cada punto de una superficie que represente así su modo de ramificación, *un solo* valor determinado, y puede entonces verse como una función perfectamente determinada del lugar de un punto sobre la superficie. [Riemann 1857, pp. 92-93 (cursivas de Riemann)]

La *Teoría de funciones abelianas* extiende las primeras intuiciones de Riemann sobre sus superficies (tesis) y sus diagramas de flujo (cursos)[3]. La memoria trata sobre las integrales abelianas ($\int \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$, $P(t)$ polinomio) y sus funciones inversas (funciones elípticas). Entre las muchas concepciones de Riemann, resaltamos cuatro estrechamente ligadas a los temas dialécticos –uno/múltiple, continuo/discontinuo– que aquí nos conciernen: (a) caracterización de las integrales abelianas mediante sus puntos de *discontinuidad* [Riemann 1857, p. 109]; (b) clasificación estructural de las integrales abelianas, entendidas en su conjunto como una *multiplicidad* lineal [Riemann 1857, p. 115]; (c) *univalencia* de las funciones elípticas al considerarlas sobre una superficie de Riemann (superando así el problema encontrado por Jacobi ante la multivalencia de las inversas) [Riemann 1857, p. 133]; (d) resolución de la inversión de las integrales abelianas mediante funciones Θ generalizadas (series en la *frontera* entre lo discreto y lo continuo) [Riemann 1857, p. 142].

Desde entonces, el camino abierto por los trabajos de Riemann en la conceptualización de ciertos problemas de la teoría de números, *a través de los mixtos algebraico-geométrico-topológicos de la variable compleja*, no parará ya más de explorarse, hasta llegar a esa plena vindicación de la herencia de Riemann y de Galois en que se constituye la prueba del teorema de Fermat (Wiles, 1994):

---

[3]Según el mismo Riemann, "con respecto al descubrimiento de ciertos resultados [...] fui conducido a ellos durante el otoño del año 1851 y el comienzo de 1852, al investigar la representación conforme de superficies múltiplemente conexas; pero, más tarde, me desvié de esa investigación por otro tema. No volví a retomar ese trabajo sino en la Pascua de 1855 y lo continué en las vacaciones de Pascua y de San Miguel del mismo año. El resto lo terminé hacia San Miguel de 1856" [Riemann 1857, p. 107].

un problema sobre curvas elípticas y formas modulares resuelto gracias a extenuantes enlaces en geometría algebraica y variable compleja, alrededor de las funciones zeta y de sus representaciones de Galois. En un texto póstumo, ya Riemann señalaba que entre un entorno de coordenadas discreto (tesis: "tiempo finito y elementos espaciales") y su complemento dialéctico (antítesis: "lo continuo") se encuentran los "sistemas de conceptos que yacen en la frontera de lo imaginable" (fragmentos del *Nachlass* citados en [Laugwitz 1999, p. 309]): asombrosa clarividencia de una unión que ha llevado realmente a la matemática contemporánea a las *fronteras de lo imaginable*.

2. El entramado sonoro de Beethoven

El *Cuarteto para cuerdas en do sostenido menor (op. 131)* de Beethoven puede verse tal vez como el paradigma mismo de lo múltiple convertido en ondulante unidad continua. Producto de la portentosa profusión creativa de los últimos años del compositor ("robos de aquí y de allá, pegados juntos", según un irónico Beethoven [Lonchampt 1987, p. 159]), el *Cuarteto en do sostenido menor* [Beethoven 1826a] eleva uno de los más prodigiosos monumentos imaginados por el hombre para resolver las dialécticas de lo uno y lo múltiple, lo continuo y lo discreto, lo sintético y lo analítico. Si todo en el cuarteto parece ser diferencia, división y diversidad –"robos de aquí y de allá": contrastantes tesituras de las cuerdas (ondulaciones graves, extensiones líricas, pizzicatos, murmullos, silencios), múltiples formas posibles (fuga, scherzo, recitativo, andante con variaciones, rondó), permanentes cambios de tiempo (*adagio ma non troppo*, *allegro molto vivace*, *andante cantabile*, *presto*, *molto poco adagio*, incluyendo nueve cambios de tiempo en el cuarto movimiento)–, todo en el cuarteto es también, *simultáneamente*, unidad, continuidad y síntesis: la ejecución ininterrumpida de sus siete movimientos, el equilibrio tonal alrededor del do sostenido menor, la permanente presencia de lazos de unión y de transición, la cohesión de temas y variaciones, el denso y elástico entramado de la composición. La "reluciente novedad" del cuarteto se mantiene perfectamente aún hoy en día, pues la obra –dentro de una meticulosa arquitectura con decenas de iteraciones, reflejos, inversiones, aceleraciones y desaceleraciones donde resurgen los temas y las formas después de su fulgurante presencia y de su pasajero olvido– combina y unifica las múltiples torsiones, oscilaciones y contradicciones que tensan la sensibilidad humana.

Una filigrana continua emerge en el *Cuarteto en do sostenido menor* a través de una pendularidad de aparentes discordancias que convergen en la unidad. Un descenso de voces puede converger en un centro tonal reducido a una nota compartida (I: 68-69 (violines), 74 (viola), 75 (cello); 83 (unidad))[4], o, más complejamente, una alternancia de descensos y ascensos *discretos* puede converger

[4]Las referencias del tipo $(Y : y)$ (número romano, número arábigo) remiten al movimiento Y (I-VII) y al compás y dentro de ese movimiento, remitiéndonos a la partitura [Beethoven

en un centro tonal *continuo* (IV: 100 (descenso), 105-107 (unidad); 134-140 (*crescendo* de trémolos), 141 (unidad)). A su vez, un diálogo lleno de reflejos y ecos entre las diversas voces tiende luego a unirse en una frase común (IV: 77 (primer violín), 79 (cello), 85 (segundo violín), 86 (cello); 97 (unidad)). Las transiciones (todo el movimiento III, por ejemplo) enlazan suavemente los contrapuntos[5], las corcheas, las notas largas, las modulaciones. El contraste *unitario* de lo continuo y lo discontinuo se siente también en la articulación de los movimientos de arco y los *pizzicatos* (IV: 142-144), en las alternancias de fondos sonoros uniformes y subsiguientes silencios (IV: 219-222 (fondo), 223 (silencio); 280-282 (fondo), 283 (silencio)) –donde la pausa realza la coherencia unitaria inmediatamente anterior o posterior al descanso–, o en la alternancia de *pianissimos* (II: 128-129), *sotto voces* (IV: 200), o el aéreo *sul ponticello* (V: 472) que abre la *coda* final, con bruscos cambios de tiempo y subsiguientes *fortissimos*. La *mutación permanente* que recorre así todos los compases del cuarteto alcanza la unidad gracias precisamente a su exacerbada contrastación dialéctica: una suerte de diferenciación de la diferenciación llevada al extremo recompone la integralidad[6], una variación incesante de lo múltiple recompone lo uno[7].

Wagner ofrece una lectura romántica del *Cuarteto op. 131* en la que emerge la "danza del mundo: felicidad plena, llanto doloroso, arrebato amoroso, delirio supremo, miseria, furia, voluptuosidad, sufrimiento; parece entonces que surjan

---

1826a] (obsérvese que hay ligeras discrepancias en la numeración de los compases entre algunas partituras).

[5]Según algunos teóricos de fines del siglo XVIII (Kollmann en 1796, por ejemplo), un contrapunto completo no sólo debía obtenerse con contraposiciones duales sino *cuatripartitas*, objeto por excelencia del cuarteto de cuerdas. Es notable que algunos de los avances contemporáneos más sofisticados de la *teoría matemática de la música* validen esas intuiciones ilustradas: según Mazzola, hay razones teóricas *de peso* para asegurar que el número mínimo de instrumentos de una familia de cuerdas para cubrir un espectro armónico y modular suficientemente complejo es *exactamente* cuatro. Véase [Mazzola 2002, pp. 995 (Kollmann), 1009 (teorema del cuarteto)].

[6]Es asombrosa la *actualidad* del *Cuarteto en do sostenido menor*, si se le escucha al lado de algunas ideas de Deleuze: "Mientras que la diferenciación [différentiation] determina la virtualidad de la Idea como problema, la diferenciación [différenciation] expresa la actualización de esa virtualidad y la constitución de sus soluciones (por integraciones locales). La diferenciación [différenciation] es como una segunda parte de la diferencia, y hay que formar la noción compleja de diferen*c*/*c*iación [différen*t*/*c*iation] para designar la integridad o la integralidad del objeto" [Deleuze 1968, p. 270]. "Así como hay una diferencia de la diferencia, que junta lo diferente, hay una diferenciación de la diferenciación, que integra y pega lo diferenciado" [Deleuze 1968, p. 281].

[7]Aquí también, los *ecos* del *Cuarteto op. 131* resuenan asombrosamente en el lenguaje y los conceptos contemporáneos. La comprensión de lo uno como variación incesante de lo múltiple es uno de los temas básicos de la teoría matemática de categorías, una idea recogida con sumo ingenio y coherencia y *extrapolada sistemáticamente a la música* en [Mazzola 2002]. Véase, en particular, su lectura de la forma del cuarteto de cuerdas a la luz del *lema de Yoneda*(!) [Mazzola 2002, p. 997].

relámpagos y retumben tempestades: y, dominando el todo, el músico inmenso que constriñe y doma todas las cosas, y, orgulloso y seguro de sí, las conduce, entre torbellinos y remolinos, al abismo" [Lonchampt 1987, p. 178]. Si hay una obra creativa inmensa, domada en el borde mismo del abismo, que fluctúa, se hunde y resurge de los remolinos, y que acordona plenamente lo liso *desde* lo singular, esa obra bien puede ser el *Cuarteto en do sostenido menor*. En efecto, el *control global* de la obra, anterior a sus desarrollos locales, se ha podido evidenciar gracias a la buena fortuna de contar con múltiples esbozos y apuntes manuscritos del cuarteto [1826b], que suman en extensión más del doble de la partitura final, y que ponen de manifiesto las meticulosas dialécticas subyacentes en la creatividad beethoveniana [Winter 1982, Cooper 1990].

FIGURA 2
Apuntes manuscritos de Beethoven para el *Cuarteto op. 131*
[Beethoven 1826b, p. 99]

Ya sea en la ubicación de la "mutación permanente" (siete variaciones del IV movimiento) en el centro mismo de los siete movimientos del conjunto –situación "dominada" desde los primeros *esquemas sinópticos* del cuarteto producidos por Beethoven [Cooper 1990, p. 106]–, ya sea en una permanente búsqueda contrapuesta de una compleja continuidad horizontal y una densa textura vertical –aprovechando varios tipos de *esquemas conceptuales* [Cooper 1990, p. 107]–, ya sea en la construcción previa de la tonalidad global del cuarteto, donde se indican los centros tonales de los movimientos desde el exterior, antes de internarse en ellos [Cooper 1990, p. 125], ya sea en una doble expansión y compresión del material local (plena dualidad del más y del menos) para ajustarse a las proporciones globales requeridas [Cooper 1990, pp. 127-129], ya sea en un alternar de desarrollos melódicos y contramelodías subyacentes [Cooper 1990, p. 163], los cuadernos de apuntes del cuarteto demuestran un riquísimo *vaivén* de conceptos y de materia sonora donde se ve cómo lo continuo y lo discreto, lo uno y lo múltiple, *viven* gracias a su misma oposición dialéctica.

3. El *topos* filosófico de Novalis

Los Discípulos de Sais (1798) de Novalis se sitúan en el entorno de sus años de estudio en la *Bergakademie* de Freiberg, el primer instituto europeo de minería. Bajo la influencia de Werner –fundador de la mineralogía y la geología sistemáticas– Novalis resurge después de la trágica muerte de su amada Sophie (19 de marzo de 1797), gracias a un meticuloso y apasionado estudio de las ciencias naturales, según el amplio espectro propuesto en la *Bergakademie* (matemáticas, física, química, minería, cristalografía, astronomía, medicina: campos sobre los que Novalis dejó valiosos cuadernos manuscritos). En el lindero del dolor y el amor, del "yo" y el mundo, de las dudas sobre el conocimiento y la fascinación por los misterios de la naturaleza, se sitúan *Los Discípulos de Sais* [Novalis 1798a], en un año novalisiano *milagroso*, en el que el poeta-filósofo bordea simultáneamente los abismos del alma humana y los confines mismos del cosmos (*Borrador general* [Novalis 1798/99]). Construyendo un $\tau o \pi o \sigma$ intermedio (*topos*: "lugar", "espacio", "ámbito de posibilidades") –abierto tanto a las ciencias, como a la poesía–, Novalis dirige su mirada filosófica hacia un fondo complejo de vida que se transforma continuamente y donde la visión se *invierte* allende las apariencias inmediatas: "viviré en las ciencias, en las visiones de un mundo invisible".

En *Los Discípulos de Sais*, Novalis construye un diálogo entre un Maestro y sus alumnos en peregrinación hacia Sais (la santa morada de Isis, Diosa madre de la mitología egipcia, identificada luego en el Renacimiento con la Artemisa de Éfeso, símbolo de la Naturaleza [Hadot 2004, pp. 19-20, 239-240]), con el objeto de acercarse a las "ruinas del idioma eterno" (65)[8] en que se escribe el mundo. En esa búsqueda, el "yo" se sitúa en una singular frontera entre interior y exterior, y, en una plena "dualidad" de opuestos que converge a la "unidad" (64), los mapas y las redes del alma y del universo se esclarecen entre sí, *invirtiendo* sus aparentes grados de complejidad: "el mundo exterior se torna transparente y, el interior, complejo y significativo" (52). Mediante una aten-

[8]Las referencias entre paréntesis ( ) en esta sección remiten a los números de páginas de la traducción al español de *Los Discípulos de Sais* [Novalis 1798a].

ción exacerbada a lo múltiple ("es preciso haber adquirido el hábito de pensar de mil maneras distintas" (53))[9], y mediante un incesante descubrimiento de reflejos plenos de lo universal en lo particular, Novalis postula una ubicua "continuidad de todo lo particular" (60) que desemboca en un penetrante canto a la "fluidez infinita" (58) del universo: "Nada es tan extraordinario como la gran homogeneidad y simultaneidad de la Naturaleza, la cual parece estar presente en todas partes y por entero" (58).

En los líquidos y en los fluidos, Novalis encuentra un medio poético y conceptual privilegiado para poder transmitir el *enlace continuo* de lo singular y lo regular. Ya sea en el "Océano" (59), en el "río" (57), en el "agua" (61), en las "sombrías olas" (44), en las "ondas" (52), en los "fluidos" (34), o en los "torbellinos" (40), Novalis inventa un ritmo y unas imágenes rápidas, siempre en movimiento, que se adaptan a la "transformación continua" (59) de la naturaleza. El poeta *complementa* la visión del científico, y, desde su experiencia singular, intuye una comunión plena con las regularidades que le envuelven. "Tan sólo los poetas tendrían que manejar los líquidos y hablar de ellos a la juventud" (62), exclama Novalis, invirtiendo una vez más nuestros supuestos habituales, y abriéndonos a una sorprendente "mecánica" abstracta de fluidos. Novalis postula la utilidad poética de "un agua más sublime que la de los mares y las fuentes [donde] se manifiesta el fluido original, tal como aparece en los metales líquidos" (61), y, gracias a sus ubicuas ósmosis, contaminaciones y traslados, consigue hacer emerger con fuerza la plausibilidad de un continuo global, allende las barreras locales, pues "únicamente el hombre que no piensa, el hombre sin imaginación, puede rechazar con desprecio las palabras ilegibles y soberbiamente unidas" (59).

Para Novalis, la poesía ayuda a *conocer*, y merece entenderse como un método *específico* en una progresiva develación de la verdad: "Historia – filosofía – y poesía – La primera procura – la segunda ordena y explica – / la tercera hace resaltar cada singularidad a través de un contraste buscado con la totalidad restante" [Novalis 1797, p. 320]. Los metódicos contrastes entre lo singular y el todo, propios de la poesía, se inscriben así dentro de una dialéctica donde van y vienen incesantemente fuerzas intermedias entre el más y el menos. Un diagrama de Novalis en un manuscrito del mismo año de *Los Discípulos de Sais* exhibe una *escala esférica* donde infinitos grados se traslapan, hasta "mostrar cómo los extremos coinciden y se traspasan entre sí" [Novalis 1798b, p. 72]:

[9] Recuérdese la "diferenciación de la diferenciación" según Deleuze (nota 6).

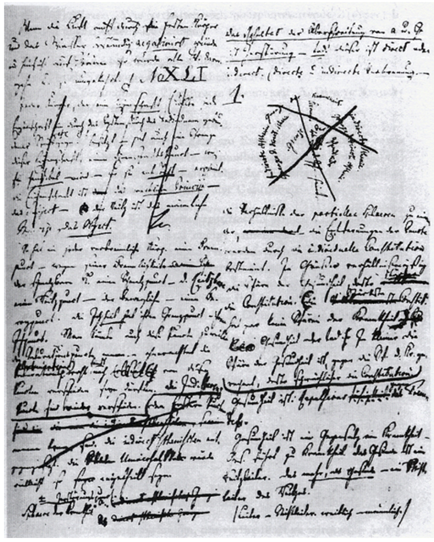

FIGURA 3
Fragmentos de física [Novalis 1798b, 1a]

El fragmento de Novalis evoca diferentes grados posibles entre los "límites de la enfermedad" y los "límites de la salud", a través de "puntos de movimiento", "puntos de saturación", y "± puntos de destrucción" [Novalis 1798b, pp. 71-72]. La preocupación por reconstruir el *flujo* de la vida ("movimiento") a partir de *quiebres* singulares ("saturación", "destrucción") puede verse como una concreción más de la dialéctica continuo/discontinuo, uno/múltiple que hemos venido explorando en estas páginas. Dentro del marco omniabarcador del *Borrador general* [Novalis 1798/99] –apuntes para una gigantesca enciclopedia del saber en los albores de la modernidad–, *Los Discípulos de Sais* y muchos manuscritos del año 1798 pueden entenderse como partes de un "fluido absolutamente elástico" [Novalis 1798/99, p. 88], sometido a un permanente proceso de "disolución" y "condensación" [Novalis 1798/99, p. 106], que rompe los dualismos y que presagia toda la topología algebraica moderna:

> *3ple polaridad – polaridades infinitómicas* – No simplemente concepción binomial, sino infinitomial. [Novalis 1798/99, p. 41]
>
> La ciencia no comienza por una antinomia – o un binomio – sino más bien por un *infinitomio*. [Novalis 1798/99, p. 217]

4. Singularidades, ramificación y continuidad

La comprensión del mundo, según Novalis, como entramado de "polaridades infinitómicas", allende lo trivialmente dual, nos acerca inmediatamente a los entramados de la variable compleja a la manera de Riemann y al entramado sonoro de Beethoven. La conciencia novalisiana de "grados infinitamente numerosos" en la realidad [Novalis 1798/99, p. 106] se refleja en la concepción riemanniana de sus superficies continuamente "superpuestas" y de sus graduales representaciones conformes, así como en la extensas transferencias y transiciones de la "mutación permanente" beethoveniana. Un *fondo infinitómico* común subyace en las tres aproximaciones: se trata de una *dialéctica permanentemente iterada*, gracias a la cual se supera una simple dualidad (o antinomia) inicial y se teje un compleja red de polaridades intermedias, que permite construir un *tránsito natural* entre lo múltiple y lo uno, lo discreto y lo continuo. Dentro de una "esfera puramente elástica" [Novalis 1798/99, p. 106], una suerte de *back-and-forth* gobierna los procesos creativos de Riemann, Beethoven y Novalis, un vaivén a la vez conceptual y material, ya sea en la traslación de métodos matemáticos entre áreas aparentemente diversas, ya sea en la iteración de contrastantes tesituras, formas y tiempos musicales, ya sea en la aleación de poesía, filosofía y ciencia.

El *back-and-forth* riemanniano, beethoveniano y novalisiano adquiere una gran precisión al conseguir entroncar –en matemáticas, música o filosofía– *una singularidad en un nivel dado con un entorno continuo en un nivel superior, mediante algún tipo de ramificación iterada*. Una sorprendente unidad subyace en ese tránsito entre fragmentos singulares y uniformes, conseguido gracias al ir y venir de un meticuloso tejer que enriquece progresivamente las fibras de su entramado. Ya sea en los puntos de ramificación de las superficies de Riemann –donde discurre el tránsito de holomorfo y lo meroformo–, ya sea en los centros tonales del *Cuarteto en do sostenido menor* de Beethoven –desde donde se disparan incesantes modulaciones y ecos, ascensos y descensos, aceleraciones y desaceleraciones–, ya sea en las metáforas de flujos y líquidos en *Los Discípulos de Sais* de Novalis –donde una contaminación universal reintegra lo múltiplemente diferenciado–, Riemann, Beethoven y Novalis descubren *lugares privilegiados* que permiten, por un lado, abarcar la diferencia y la multiplicidad, y, por otro lado, codificarlas plenamente en constructos unitarios.[10] Así como en los "instantes privilegiados" de Proust toda la complejidad del tiempo resurge gracias a una sensación única –capaz de invocar en su frágil unidad presente toda una visión pasada múltiplemente estratificada y aparentemente perdida–, en los "lugares privilegiados" de Riemann, Beethoven y Novalis parece querer cifrarse toda la complejidad del espacio y de sus incesantes deformaciones topológicas.

[10] Es interesante observar que las "superficies superpuestas" riemannianas pueden imaginarse en el germen del cambio de tonalidad, que aparece desde el inicio de la fuga del *Cuarteto op.131*. La descripción de ese *sforzando* como un punto de ramificación riemanniano, en el que se unen dos "hojas distintas" (diferencia discreta de un semitono) explica en parte el cambio "inevitable y asombroso" al que se enfrenta el oyente (según Charles Rosen, *The Classical Style*, Londres: Faber and Faber, 1997, p. 441). Debo esta observación a la gentileza de Andrés Villaveces.

Más allá de las precisas concreciones creativas en el doble tránsito de lo uno y lo múltiple, de lo continuo y lo discontinuo, que acercan a Riemann, Beethoven y Novalis, una *inclinación* común, propia de la época, subyace en el fondo de sus aproximaciomes. Cuando Riemann se guia en sus especulaciones más abstractas por ejemplos e intuiciones ligadas al movimiento de fluidos, cuando Beethoven entrelaza bosquejos horizontales melódicos y bosquejos verticales armónicos en una suerte de envolvente espiral donde fluye la obra, cuando Novalis intenta reconstruir el flujo universal haciendo "resaltar cada singularidad a través de un contraste buscado con la totalidad", cada uno de ellos se inserta a su modo en las tensiones dinámicas propugnadas por el Romanticismo. La Naturaleza se entiende como un equilibrio pendular de fuerzas, y, a la manera de Schelling (1799), "ésta busca la más general (o perfecta) proporción en la cual las acciones de lo individual pueden, sin forzarse, ser unidas" [Richards 2002, p. 297]. La búsqueda de una unión "perfecta" y bien proporcionada, *sin forzar* las singularidades aisladas, aparece subrayada en la Tesis de Riemann, donde muchos de los términos distinguidos tipográficamente por el mismo Riemann tienen que ver con la univalencia conseguida gracias a sus nuevas superficies (véase por ejemplo el §XIX: "uno" subrayado seis veces [Riemann 1851, pp. 44, 46]), pero resulta igualmente patente en el proceso compositivo de Beethoven (ajustes de proporciones en los "esquemas sintéticos" del *Cuarteto op. 131*), o en los objetivos mismos de Novalis ("síntesis de los individuos del espacio y del tiempo" [Novalis 1798/99, p. 53]).

El tránsito natural y *no forzado* entre lo singular y lo continuo gracias a ramificaciones iteradas puede verse así como una notable concreción técnica en obras tan diversas como los *Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de variable compleja* de Riemann, el *Cuarteto en do sostenido menor op. 131* de Beethoven, y *Los Discípulos de Sais* de Novalis. Nos gustaría creer que el bosquejo aquí evocado de una "verdad" unitaria común, cuya fuerza material puede llegar a concretarse allende pasajeros disfraces y coloridos, no habría disgustado del todo al Maestro Charris.

Referencias

[Beethoven 1826a] Beethoven, Ludwig van, *XIV^e quatuor à cordes op. 131 en ut# mineur*, París: Heugel et Cie.: 1951. Interpretaciones consultadas: Cuarteto Végh (1973) (CD: Audivis Valois 4400, 1987); Cuarteto Hagen (1999) (CD: Deutsche Grammophon 459 611-2, 1999, incluye CD-pluscore).

[Beethoven 1826b] Beethoven, Ludwig van, "Apuntes manuscritos para el Cuarteto op. 131" (Ms. Artaria 210), Archivo, Berlín: Staatsbibliothek Preussischer Kulturbesitz (análisis y fragmentos en [Johnson 1985]; *figura 2* en [Johnson 1985, p. 489]).

[Cooper 1990] Cooper, Barry, *Beethoven and the Creative Process*, Oxford: Oxford University Press, 1990.

[Deleuze 1968] Deleuze, Gilles, *Différence et repetition*, Paris: Presses Universitaires de France, 1968.

[Dyck 1960] Dyck, Martin, *Novalis and Mathematics*, Chapel Hill: The University of North Carolina Press, 1960 (reedición, New York: AMS Press, 1969).

[Fulton 1995] Fulton, William, *Algebraic Topology. A First Course*, New York: Springer, 1995.

[Gray 1997] Gray, Jeremy, "Riemann's Lecture Courses on Complex Function Theory", *The Mathematical Intelligencer* 19 (4) (1997), 58-62.

[Hadot 2004] Hadot, Pierre, *Le voile d'Isis. Essai sur l'histoire de l'idée de Nature*, Paris: Gallimard, 2004.

[Johnson 1985] Johnson, Douglas; Tyson, Alan; Winter, Robert, *The Beethoven Sketchbooks*, Berkeley: University of California Press, 1985.

[Laugwitz 1999] Laugwitz,Detlef, *Bernhard Riemann 1826-1866. Turning Points in the Conception of Mathematics*, Basel: Birkhäuser, 1999.

[Lonchampt 1987] Lonchampt, Jacques, *Les quatuors de Beethoven*, París: Fayard, 1987.

[Mazzola 2002] Mazzola, Guerino, *The Topos of Music. Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*, Basel: Birkhäuser, 2002.

[Novalis 1797] Novalis, "Estudios sobre Hemsterhuis" (traducción italiana: *Novalis, Opera Filosofica Volume I*, Torino: Einaudi, 1993).

[Novalis 1798a] Novalis, *Die Lehrlinge zu Sais* (traducción española: *Los discípulos en Sais* (ed. Félix de Azúa), Madrid: Hiperión, 1988; traducción italiana: *I discipoli di Sais* (ed. Alberto Reale), Milano: Bompiani, 2001; las páginas citadas remiten a la traducción española, completada con apuntes de la edición italiana).

[Novalis 1798b] Novalis, "Fragmentos de física" (Ms. XLI, *Freiberger naturwissenschaftlichen Studien*), Archivo, Frankfurt: Freies Deutsches Hochstift (análisis y fragmentos en [Samuel 1983]; *figura 3* en [Samuel 1983, p. 80]; las páginas citadas remiten a la traducción italiana, *Novalis, Opera Filosofica Volume II*, Torino: Einaudi, 1993).

[Novalis 1798/99] Novalis, *Das allgemeine Brouillon* (traducción francesa: *Le brouillon général*, Paris: Allia, 2000).

[Richards 2002] Richards, Robert J., *The Romantic Conception of Life. Science and Philosophy in the Age of Goethe*, Chicago: The University of Chicago Press, 2002.

[Riemann 1851] Riemann, Bernhard, "Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe" (traducción de "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse", tesis doctoral, 1851), en: [Riemann 1898, pp. 1-60].

[Riemann 1855/56] Riemann, Bernhard, "Curso de variable compleja" (Cod.Ms.Riemann 37), Archivo, Universidad de Göttingen (análisis y fragmentos en [Gray 1997]; *figura 1* en [Gray 1997, p. 59]).

[Riemann 1857] Riemann, Bernhard, "Théorie des fonctions abéliennes" (traducción de "Theorie der Abel'schen Functionen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 54 (1857), 101-155), en: [Riemann 1898, pp. 89-164].

[Riemann 1876] Riemann, Bernhard, *Gesammelte Mathematische Werke* (eds. R. Dedekind, H. Weber), Leipzig: Teubner, 1876.

[Riemann 1898] Riemann, Bernhard, *Oeuvres mathématiques*, París: Gauthier-Villars, 1898 (reimpresión París: Jacques Gabay, 1990).

[Samuel 1983] Samuel, Richard (ed.), *Novalis. Schriften (3) (Das philosophische Werk II)*, Stuttgart: Kohlhammer, 1983(3^a ed.) (traducción italiana: *Novalis, Opera Filosofica Volume II*, Torino: Einaudi, 1993).

[Winter 1982] Winter, Robert, *Compositional Origins of Beethoven's String Quartet in C sharp minor, Op. 131*, Ann Arbor: UMI Research Press, 1982.