Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XI No. 1 (2004), pp. 79–94

SOBRE LA AXIOMATIZACIÓN EN MATEMÁTICAS

A. BERENICE GUERRERO G. (*)

A la memoria de Jairo Charris Castañeda

Resumen. Son muchas las teorías matemáticas y los hechos históricos que contribuyeron primero a configurar y luego a desestabilizar la aspiración de formalizar las matemáticas. Es significativo, en todos los periodos de la historia de la matemática, el protagonismo de la obra de Euclides, los *Elementos*, como punto de referencia obligado. En este recuento se puede apreciar la influencia de los *Elementos* en los diferentes paradigmas de la matemática.
La idea de escribir esta sinopsis sobre el proceso de evolución de la axiomatización de las matemáticas nació de la lectura del excelente libro de Morris Kline, [10] *MATEMÁTICAS, LA PÉRDIDA DE LA CERTIDUMBRE*.

1. El legado de los griegos

Antes de la civilización griega, la matemática era apenas una disciplina diferenciada de otras, no tenía una organización, ni una metodología y su interés se centraba en fines inmediatos y prácticos. Especialmente los babilonios y los egipcios usaban la matemática como una herramienta para resolver problemas prácticos, partían de reglas simples, aproximadamente correctas y desconectadas a las que llegaban por tanteo, la experiencia o la simple observación. Los griegos del período clásico, (600 al 300 a.C.) a diferencia de la corriente que imperaba, se propusieron buscar la verdad y establecer un orden en el caos en el que aparentemente se encontraban las teorías matemáticas.
Convencidos de que la naturaleza tenía un orden y funciona de acuerdo a un vasto plan matemático, los griegos se propusieron poner orden en el caos aparente de los acontecimientos de la naturaleza y crear un modelo comprensible

(*) A. Berenice Guerrero G., Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.

de ella mediante la aplicación de las matemáticas. El primer grupo importante en ofrecer un plan matemático de la naturaleza, con base en una filosofía completamente racional, fue el de los pitagóricos. Para los pitagóricos (585 a 500 a.C.) el número es la esencia de los fenómenos naturales y la armonía del universo es regulada por relaciones matemáticas. Mientras los números son considerados entes abstractos, los objetos de la naturaleza son realizaciones concretas de los números. Fueron los pitagóricos los primeros en atribuir un carácter esencialmente deductivo a la aritmética y la geometría y en presentar un encadenamiento lógico de las proposiciones.

Después de los pitagóricos, el grupo más influyente en la propagación y exposición de la doctrina del plan matemático de la naturaleza fue el de los platónicos. Platón (428-347 a.C.) hace una clara distinción entre el mundo de las cosas y el mundo de las ideas. La realidad y la inteligibilidad del mundo físico sólo pueden ser aprehendidas por medio de la matemática del mundo ideal. Los entes matemáticos tienen una existencia en sí mismos fuera del mundo perceptible. El hombre accede al conocimiento mediante el recuerdo, *anamnesis*. La experiencia con la ayuda del raciocinio basta para reconocer la indubitable verdad de los enunciados.

El paso decisivo en la concepción de la verdad griega fue el descubrimiento de la fuerza de la razón iniciado por Aristóteles (384-322 a.C.). Aunque alumno de Platón, Aristóteles criticaba el espiritualismo de Platón y su reducción de las ciencias a las matemáticas. Creía en las cosas materiales como la primera sustancia y fuente de verdades que se derivaban de la intuición y la abstracción. El conocimiento es el fruto del esfuerzo conjunto de los sentidos y el entendimiento que, partiendo de la realidad particular, se eleva mediante la abstracción hasta la captación de lo universal. Para los griegos aristotélicos el fundamento último de la verdad está en la razón y los sentidos. Aplicaron la razón a los sistemas políticos, la ética, la justicia, la educación y muchos otros asuntos humanos.

Para los griegos del período clásico, la matemática, es decir, los hechos básicos de los números y las figuras geométricas, debían formar un cuerpo de verdades donde el razonamiento debía producir conclusiones indubitables. El razonamiento acerca de los conceptos matemáticos partía de axiomas, verdades evidentes, completamente asequibles que Aristóteles definía como principios inteligibles que atraen la mente humana más allá de toda duda posible. Así los griegos, matemáticos y filósofos, fueron los primeros que concibieron la matemática como el estudio de abstracciones.

De las distintas formas de razonamiento: la inducción, el razonamiento por analogía y la deducción, los filósofos griegos defendieron el razonamiento deductivo como el único método fiable de obtener verdades eternas. La demostración deductiva, en la que Aristóteles incluía la ley de contradicción[1] y la ley del tercio

[1]Una proposición no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo.

excluido[2], era una exigencia rigurosa pero segura en el intento de llegar a la verdad.
El movimiento iniciado por los griegos del período clásico vio sus frutos en la obra de Euclides los *Elementos*. La obra de Euclides fue el primer sistema axiomático conocido (año 300 a.C aproximadamente) y reconocido como ideal de sistematización desde sus comienzos. Con los *Elementos*, Euclides logró plasmar las aspiraciones de los griegos en diversos aspectos: organizó los diversos conocimientos de las matemáticas de la época en forma rigurosa a partir de un grupo reducido de verdades inicialmente aceptadas (axiomas y postulados), interpretó el ideal axiomático de los griegos y la fundamentación del conocimiento científico de Platón y Aristóteles, consolidó la concepción griega de un enfoque lógico y matemático de la naturaleza y estableció una alianza entre las matemáticas y el estudio de la naturaleza, que desde entonces se convirtió en la verdadera base de la ciencia moderna. La organización, el ingenio y la claridad de la obra de Euclides fue fuente de inspiración en el tratamiento axiomático-deductivo no sólo de otras áreas de las matemáticas, como la teoría de números, la teoría de conjuntos, sino de otras ramas de las ciencias, como la mecánica y la hidrostática.
La civilización griega clásica fue seguida, hacía el año 300 a.C., por la civilización griega alejandrina. Fue esta civilización una fusión entre las culturas griega clásica, la egipcia y la babilónica. Aunque algunos matemáticos prosiguieron sus trabajos con el método axiomático y deductivo de los *Elementos*, los alejandrinos influidos por los egipcios y babilonios se dedicaron con más empuje a la matemática aplicada. Encontraron fórmulas para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Extendieron la aritmética empírica, tomada de los egipcios y babilonios, al álgebra y la utilizaron sin que les preocupara su fundamentación lógica. Este enfoque empírico-deductivo de la matemática se extendió después de la destrucción final de la civilización griega y alejandrina cuando los árabes y los hindúes tomaron el relevo de la matemática.

2. El debacle de los griegos

El ritmo de trabajo científico de los griegos fue atropellado por los hechos históricos sucedidos durante siglos. La gradual conquista de Grecia por los romanos, el nacimiento del cristianismo y la conquista de Egipto por los musulmanes en el año 604 d.C. fueron los hechos más significativos. Los romanos y los cristianos destruyeron importantes colecciones de obras griegas. Los cristianos se opusieron duramente a las enseñanzas paganas y los musulmanes destruyeron la biblioteca de Alejandría.
En la época medieval, del 500 al 1500 d.C., la influencia del cristianismo sobre el lento desarrollo del conocimiento científico fue enorme. El dogma: sólo hay

[2] Una proposición debe ser o bien verdadera o bien falsa.

conocimiento en Dios y genuina vida en la fe, marca el derrotero del trabajo científico de esta época. Sin embargo, la filosofía de la Edad Media, dominada por la Iglesia y sus enseñanzas, apoyó la creencia en la regularidad y uniformidad del comportamiento de la naturaleza, aunque sujeto a la voluntad de Dios.

Paralela a la época medieval europea resplandeció la cultura árabe. La expansión del dominio árabe en el siglo VI, los contactos con los restos de la herencia cultural griega y los intercambios con India y China conformaron una asimilación multicultural de la cual emergieron numerosos logros en matemáticas, astronomía y alquimia. Aunque estos pueblos se dedicaron a traducir las obras rescatadas de los griegos y avanzaron significativamente en las aplicaciones de la matemática, descuidaron muy a menudo el rigor y la significación de los entes con los cuales operaban. Desde el año 1500 aproximadamente comenzaron a imperar conceptos matemáticos derivados de idealizaciones o abstracciones inmediatas de la experiencia. A partir de 1700 un número cada vez mayor de nociones, alejadas de la naturaleza y nacidas enteramente en la mente humana penetraron en la matemática sin ser cuestionadas. Hacía 1800 los matemáticos estaban más seguros de los resultados prácticos de sus teorías que de su justificación lógica.

Durante el Renacimiento, (siglos XV y XVI) período histórico que sigue a la Edad Media, todavía la matemática es considerada no sólo como instrumento ineludible en el estudio del universo, sino también, como esencia del universo mismo. A pesar de que el Renacimiento fue una época marcada por la ciencia contemplativa y mística sobresalen grandes matemáticos y científicos como, Copérnico, Kepler, Descartes, Galileo, Pascal, Newton y Leibniz. También grandes teorías matemáticas que contribuyeron enormemente al desarrollo científico. La geometría proyectiva hace su aparición como principal ayuda de un arte que se preocupa en fundamentar racionalmente el ideal de belleza. Las ideas desarrolladas por Copérnico y Galileo fueron las premisas científicas básicas con las que contó Isaac Newton (1642-1727) para su trabajo de axiomatización de la Mecánica en su famosa obra *Mathematical Principles of Natural Philosophy* publicada en 1687.

En la Baja Edad Media europea (siglos XVI y XVII) tuvo lugar un movimiento intelectual importante, el renacimiento científico. Gracias a él los científicos europeos tuvieron acceso a los textos griegos obtenidos de las traduciones árabes. Sin embargo, el trabajo de los matemáticos continuó bajo un fuerte influjo cristiano[3]. Las obras griegas recién descubiertas se enfrentaron a un mundo cristiano profundamente devoto y los líderes intelectuales de entonces se movieron

[3]En su libro *Meditaciones metafísicas, 1641*, René Descartes nos muestra el espíritu que imperaba en su época: *Y así veo que la certeza y verdad de toda ciencia dependen del conocimiento del verdadero Dios, de manera que, antes de conocerlo, no podía saber nada*

en un sincretismo entre la filosofía griega y la cristiana. Sin embargo, en el siglo XVII se produce un despertar en el desarrollo del pensamiento matemático. El cálculo de variaciones, la geometría descriptiva, los sistemas dinámicos, la teoría de números y la teoría de grupos fueron resultados importantes de la época. Aunque las nuevas teorías carecían de un enfoque riguroso la ambigüedad interna fue superada, en parte, por la efectividad de ellas en su aplicabilidad.
Durante el siglo XVIII, conocido como el siglo de las luces, el humanismo que se remonta al siglo XIV ejerció un influjo importante en el progreso individualista de la cultura. Un fuerte movimiento invade a Europa en el terreno de las ideas, promoviendo la modernización y el desarrollo de las ciencias en todos los campos del saber. Los grandes matemáticos incursionan con frecuencia en el campo filosófico, se esfuerzan por explicar los fenómenos en su totalidad e intentan construir los instrumentos matemáticos para la formalización de los experimentos. La matemática pasa de ser una ciencia en busca de la verdad para convertirse en instrumento de la tecnología.

3. El quinto postulado de Euclides

Hasta finales del siglo XIX la búsqueda del plan matemático de la naturaleza fue la búsqueda de la verdad y la base conceptual seguía siendo la obra de Euclides. No obstante, los matemáticos admitieron gradualmente que los axiomas y los teoremas de la matemáticas no eran verdades necesarias sobre el mundo físico.
Uno de los axiomas de la geometría de Euclides fue, en este orden de ideas, el primero que cuestionó la relación directa entre matemática y naturaleza. El axioma de las paralelas de Euclides o más conocido como el quinto postulado de Euclides, que se enuncia en los *Elementos* así:

> *Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que están los ángulos menores que dos rectos*

establece la existencia de rectas infinitas que la naturaleza no garantiza. Los griegos comenzaron por cuestionar la posibilidad de prolongar indefinidamente las rectas[4] y en caso de que esto fuera posible, la veracidad del postulado en esa infinita extensión de las rectas. Ese fue el comienzo de una polémica sobre el postulado de las paralelas de Euclides en torno a su veracidad y a

perfectamente de ninguna cosa. Pero ahora puedo conocer con perfecta certeza y evidencia innumerables cosas, tanto sobre Dios mismo y otras cosas intelectuales, como sobre la naturaleza corpórea que es objeto de la matemática pura.

[4]En Euclides no aparece la noción de recta como algo infinito sino como un segmento que se puede alargar indefinidamente.

su complejidad en el enunciado. Durante más de dos mil años los esfuerzos de los matemáticos se concentraron en primer lugar, en sustituir el axioma de las paralelas por un enunciado más sencillo y evidente y en segundo lugar, en deducir el quinto postulado de los otros nueve axiomas de Euclides.
De los muchos axiomas sustitutos que se dieron el más conocido por lo simple fue el propuesto por John Playfair en 1795 que dice así: dado un punto P que no está en una recta l, hay sólo una recta en el plano de P y l que pasa por P y no corta a l. Todos los demás axiomas sustitutos fueron más complejos que el mismo postulado de Euclides y sólo sirvieron para sustentar el modelo creado en los *Elementos*.
Sin embargo, lo que cambió la mirada sobre la fundamentación de la geometría fueron los resultados obtenidos por los matemáticos en el esfuerzo por resolver el segundo problema del axioma de las paralelas. La posibilidad de crear nuevas teorías geométricas paralelas a la euclidiana, como consecuencia de la negación de la unicidad o de la existencia de paralelas, cuestionó la geometría de Euclides y la revisión de sus fundamentos se convirtió en una prioridad.
El trabajo más representativo en este sentido fue publicado por Gerolamo Saccheri (1667-1733) en su libro *Euclides exonerado de toda culpa*. Teniendo en cuenta el axioma de Playfair, que es equivalente al de Euclides, Saccheri supuso, en primer lugar, que no hay rectas que pasan por el punto P que sean paralelas a l. De este axioma y de los otros nueve de Euclides dedujo una contradicción. Por otra parte, supuso la otra alternativa, que por el punto P pasan por lo menos dos rectas p y q, las cuales por mucho que se prolonguen no cortan a l. Con este axioma Saccheri probó muchos e interesantes teoremas hasta que encontró uno que parecía contradictorio, de donde concluyó que el axioma de las paralelas era una consecuencia de los otros nueve axiomas. Sin embargo, matemáticos posteriores se percataron de que Saccheri no había obtenido realmente una contradicción.
Johann Heinrich Lambert (1728-1777) en su libro *Teoría de las rectas paralelas*, de manera parecida a Saccheri, consideró las dos posibles opciones. También él encontró que el supuesto de que no hay rectas que pasen por P y sean paralelas a l conduce a una contradicción. Sin embargo, a diferencia de Saccheri, para la segunda suposición Lambert no obtuvo una contradicción y concluyó que la sustitución del quinto postulado por un enunciado que no condujera a contradicciones ofrecía la posibilidad de crear una nueva geometría lógicamente consistente.
El más distinguido de los matemáticos que trabajaron en el problema planteado por el axioma de las paralelas fue Karl Friedrich Gauss. Convencido de que el postulado de las paralelas no podía ser probado a partir de los otros postulados de Euclides, Gauss comenzó desde 1813 el desarrollo de su geometría no euclidiana con la suposición de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180 grados. A esta geometría la llamó inicialmente geometría anti-euclídea,

luego geometría astral y finalmente geometría no euclídea y consideró que era plenamente consistente.
La obra de Gauss estimuló a otros matemáticos a trabajar en el mismo sentido. Así pues, en la década de 1830 más de una geometría no euclidiana había sido enunciada, todas ellas aplicables al mundo físico. El mérito de la creación de las geometrías no euclidianas y su fundamentación independiente de la geometría de Euclides es atribuido a Lobachevski (1793-1856) y al húngaro Johann Bolyai (1802-1860). Sus trabajos[5] fueron el epílogo a ideas innovadoras anteriores.

4. La formalización de la matemática

El modelo matemático creado por las geometrías no euclidianas no sólo cuestionó la estructura de la geometría euclidiana, paradigma de la demostración rigurosa, también generó dudas sobre la fundamentación de otras teorías matemáticas.
La generalización de los campos habituales de expresión de las proposiciones matemáticas afectó en forma significativa la estructura interna del paradigma griego. La construcción de nuevos modelos geométricos ni visualizables, ni imaginables, ni relacionados con el espacio físico, significó la ruptura con los modelos sensibles y sentó las bases del concepto más representativo del siglo XIX, la noción de estructura.
El impacto significativo de las geometrías no euclidianas, tanto por su significación intrínseca como por sus implicaciones respecto a sus fundamentos y a su solidez arquitectónica generó un fuerte movimiento de rigorización de la matemática en la segunda década del siglo XIX. Este movimiento se extendió y se aceleró a medida que los estudios sobre geometrías no euclidianas se hicieron más ampliamente conocidos. Este debate, el más singular del siglo XIX, conocido como la cuestión de los fundamentos, fue abordado y resuelto por David Hilbert (1862-1943).
La ampliación de los dominios geométricos a objetos sin caracterización específica marcó una brecha con el concepto de verdad en el paradigma griego. En efecto, los griegos habían dado a los axiomas el estatuto de la evidencia. Evidencia intuitiva y visual que a pesar de algunos deslices, había dado buenos resultados. Por otra parte, la verdad en los desarrollos de la geometría de Lobachevski y de Bolyai no podía ni intuirse ni visualizarse, de ahí que la evidencia intuitiva no podía seguir siendo criterio de veracidad.
Hilbert, y con él la comunidad matemática internacional, adoptaron el criterio de sustituir la evidencia intuitiva de los axiomas por el libre albedrío del autor.

[5]Tanto en la geometría de Bolyai como en la de Lobachevski, llamada *Geometría hiperbólica*, una recta puede ser perpendicular a sí misma, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos, por un punto hay dos paralelas a una recta y se satisfacen otras propiedades que chocan con el concepto intuitivo de espacio.

De esta forma los axiomas se convierten en principios que satisfacen ciertos requisitos que permiten iniciar un proceso lógico de deducción. Ese modelo axiomático adoptado por Peano (1858-1932) con la aritmética, por Zermelo (1871-1953) con la teoría de los conjuntos y por Hilbert con la geometría, sentó las bases del desarrollo de la nueva matemática.

5. Axiomatización

La formalización de las teorías matemáticas toma su forma definitiva a finales del siglo XIX con la declaración de principios generales. Axiomatizar o formalizar una teoría consiste en establecer un mínimo de proposiciones evidentes fundamentales llamadas *axiomas* y en derivar de los axiomas todas las demás proposiciones del sistema, en calidad ya de teoremas, de corolarios o de problemas. Los axiomas constituyen los cimientos del sistema y los teoremas, consecuencias de los axiomas, forman la estructura de la teoría.

Todo sistema axiomático debe satisfacer tres propiedades fundamentales; ser *independiente*, es decir que no sea posible derivar un axioma de los axiomas precedentes; *ser consistente*, esto es, de los axiomas no se pueda obtener teoremas contradictorios, *ser mínimo*, es decir, el número de axiomas ha de ser el mínimo necesario y suficiente para deducir de él lo más posible y *ser completo* es decir, que sea imposible añadir al sistema otros elementos de tal manera que el sistema así generalizado forme un nuevo sistema que satisfaga todos los axiomas del anterior.

El punto de partida del movimiento axiomático comenzó con el cálculo, la más débil de todas las teorías matemáticas de entonces. A comienzos del siglo XIX tres hombres, el sacerdote, filósofo y matemático Bernard Bolzano (1781-1848), Neils Henrik Abel (1802-1829) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) decidieron abordar el problema de rigor en el cálculo. Cauchy y luego Karl Weierstrass (1815-1897) dieron por buenas todas las propiedades del sistema de los números reales y complejos, aunque no tuvieran una base lógica, y sobre esta teoría se apoyaron para la rigorización del cálculo y del análisis.

Con la rigorización del análisis se hizo imprescindible abordar el problema de los números irracionales y establecer una estructura lógica del sistema de los números reales. Karl Weierstrass fue el primero (1860) en ofrecer una rigurosa definición y demostración de las propiedades de los números irracionales. Otros matemáticos, como Richard Dedekind y Georg Cantor, dando también por sentadas las propiedades de los números racionales, definieron correctamente los números irracionales y sus propiedades. La estructura lógica de los números reales la completó Peano con base en los trabajos de Dedekind y algunas ideas de Hermann Grassmann en *Manual de aritmética* (1899).

6. Formalización de la geometría

A finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX el problema de la consistencia de las geometrías no euclidianas se resolvió partiendo del supuesto de que la geometría euclidiana era consistente. El problema de fundamentación se desplazó así a la geometría euclidiana hasta entonces bastante cuestionada. Encontrar una rigorización completa de la geometría euclidiana, sustento de las otras geometrías era imprescindible. Sucesivos trabajos en este sentido fueron realizados, en forma independiente, por Moritz Pash (1843-1930), Giuseppe Veronese (1854-1927), Mario Pieri (1860-1904) y finalmente por David Hilbert quien dió la versión más completa de axiomatización de la geometría.
Hilbert reconoció que el método axiomático debe partir de términos no definidos, relaciones no definidas y axiomas. Recalcó el marco puramente abstracto de la geometría al afirmar que el significado tanto de los términos no definidos como el de las relaciones entre ellos está dado exclusivamente por los axiomas. Cualquier otra comprensión de dichos términos y relaciones por definiciones explícitas o significados cotidianos es irrelevante para la demostración de los teoremas. A finales del siglo XIX (1899) David Hilbert publicó su trabajo *Fundamentos de la geometría*.
El libro *Fundamentos de Geometría* de David Hilbert, a diferencia de Euclides, comienza con términos no definidos: *punto, recta y plano* y con cinco relaciones indefinidas: *estar en, estar entre, ser congruente, ser paralelo y ser continuo.* Los términos no definidos quedan implícitamente definidos por los axiomas y el significado de las relaciones indefinidas está dado por los axiomas y los teoremas derivados de éstos.
En vez de los cinco axiomas de Euclides y de los cinco postulados, Hilbert formula para su geometría un conjunto de 21 suposiciones, conocidas como los axiomas de Hilbert. Ocho de ellos concernientes a la incidencia o pertenencia, los cuales incluyen los cinco postulados de Euclides, cuatro son propiedades de orden, cinco se refieren a congruencia, dos sobre continuidad, y un postulado sobre paralelas esencialmente equivalente al quinto postulado de Euclides. Hilbert establece así mismo, la independencia de los axiomas con respecto a los restantes y prueba que la geometría euclidiana es consistente siempre que la estructura lógica de la aritmética, es decir, el sistema de los números reales, lo sea y sobre este punto no había preocupación alguna.

7. Las paradojas

Las crisis de las matemáticas del siglo XIX habían sido superadas por consenso al final del siglo con la aceptación del nuevo paradigma ideado por Hilbert. En 1900 los matemáticos creían haber logrado su meta. Habían finalmente admitido la necesidad de términos no definidos; las definiciones habían sido expurgadas de términos vagos; las diversas ramas de la matemática habían sido estructuradas sobre rigurosas bases axiomáticas; y las demostraciones rigurosas y deductivas habían reemplazado a las conclusiones basadas en consideraciones intuitivas o empíricas. Habían dado en fin, a su disciplina la estructura que Euclides había delineado en sus *Elementos*. Pero el paraíso en que se encontraban los matemáticos por estas innovaciones no les duró mucho. Poco después de 1900 se descubrieron serias contradicciones en las nuevas formulaciones.

Las nuevas teorías matemáticas que dieron lugar a contradicciones, que los matemáticos llamaron paradojas por considerarlas esporádicas y pasajeras, o a conflictos fueron: la teoría de conjuntos infinitos, el axioma del continuo, el axioma de elección, la axiomatización de la lógica, la reducción de las matemáticas a los principios de la lógica y la escuela intuicionista y/o constructivista.

La primera teoría que dio lugar a contradicciones y que abrió los ojos de los matemáticos a otras contradicciones en las más viejas ramas de la ciencia fue la teoría de los conjuntos infinitos. El primer problema surgió con la concepción del infinito dado por Cantor.[6] Los griegos, en general miraban el infinito como un concepto inadmisible mientras Aristóteles admitía un infinito con reservas. La controversia suscitada por la teoría de conjuntos fue revelada con mucha agudeza por Felix Hausdorff en sus *Fundamentos de la teoría de conjuntos* (1914) en donde describía esta teoría como “un campo donde nada es evidente por sí mismo, cuyos enunciados verdaderos son a menudo paradójicos y cuyos enunciados plausibles son falsos”.

Las contradicciones que Cantor[7] había descubierto a su hipótesis del continuo,[8] al intentar asignar un número al conjunto de todos los conjuntos y al de todos los ordinales fue la causa de que los matemáticos se percataran de que habían estado utilizando conceptos similares no sólo en la nueva matemática sino en aquellas viejas teorías supuestamente bien establecidas. Pero la primera contradicción verdaderamente inquietante fue observada por Bertrand Russell (1872-1970).

Russell había estudiado la paradoja del conjunto de todos los conjuntos de Cantor y elaboró su propia versión. Encontró que entre las clases, algunas pertenecen a sí mismas o están incluidas en sí mismas y otras no, luego no puede existir un conjunto que se contenga a sí mismo. La contradicción de Russell se detecta al considerar la clase de todas las clases que no pertenecen a sí mismas, y afecta la noción misma de clase, usada en toda la matemática.

---

[6]Un sistema S se dice que es infinito cuando es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo, de lo contrario el conjunto S es finito.

[7]Cantor encontró que no todos los conjuntos infinitos eran iguales. Ellos se diferencian en el número cardinal que les corresponde. Así, el número que le corresponde a los enteros sería el menor de los números transfinitos y el de los números reales o el de los puntos en una recta, el transfinito c sería mayor que aquél.

[8]Si c es el cardinal de los números reales y $\aleph_0$ es el cardinal de los números naturales, la hipótesis del continuo de Cantor afirma que no existen números transfinitos entre $\aleph_0$ y c.

Hilbert se dió cuenta que esta paradoja tenía un efecto catastrófico sobre el mundo matemático.

Otro conflicto importante lo generó la aparición del axioma de elección[9]. Peano, el primero en llamar la atención sobre el axioma de elección escribió en 1890, "no se puede aplicar un infinito número de veces una ley arbitraria que seleccione un elemento de cada una de las clases de muchas clases". A pesar de todo, los matemáticos continuaron usando dicho axioma en sus demostraciones durante las siguientes décadas. El axioma de elección se convirtió en el axioma más discutido después del axioma de las paralelas de Euclides.

Cuando las contradicciones en la teoría de conjuntos de Cantor y la paradoja de Russell, y las consecuencias no intuitivas del axioma de elección se dieron a conocer, algunos matemáticos creyeron que estos problemas se debían a la introducción bastante informal de la teoría de conjuntos. Los conjuntistas estaban seguros que unos fundamentos axiomáticos cuidadosamente seleccionados eliminarían las paradojas de su teoría de la misma forma que la axiomatización de la aritmética y de la geometría habían resuelto los problemas lógicos en esas áreas. Sin embargo, la axiomatización de la teoría de conjuntos trajo consigo nuevas contradicciones, incluso para la matemática clásica.

La matematización y axiomatización de la lógica, elaborada por Gottlob Frege (1848-1925) también fue objeto de críticas por las dudas que su teoría suscitaba. Después de haber construido la lógica sobre axiomas explícitos, Frege procedió en su obra *Fundamentos de la aritmética* (1884) a derivar de premisas lógicas los conceptos de la aritmética. Pero esta teoría estaba viciada por el uso del concepto del conjunto de todos los conjuntos.

A comienzos de 1900, Russell lo mismo que Frege, creían que las leyes fundamentales de las matemáticas se podían derivar de la lógica y la consistencia de la lógica garantizaba la consistencia de las matemáticas. Russell estaba seguro de que los principios de la lógica eran verdades, y por lo tanto, eran consistentes. Sin embargo, en la monumental obra *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, donde presentan una axiomatización rigurosa de la lógica y desarrollan la lógica de las proposiciones, introducen algunos de los axiomas cuestionados, como el axioma de elección y el de infinitud y otros que no tenían una sustentación de verdad como el de reducibilidad. Esto desencadenó una fuerte crítica que puso en entredicho la tesis de que todas las teorías matemáticas pueden ser derivadas de la lógica. En la edición de 1937 de *Principia Mathematica* Russell abandonó la pretensión de verdad a priori de los principios de la lógica. De esta forma la consistencia de las matemáticas quedaba de nuevo sin resolverse.

[9]Axioma de elección: En todo conjunto A puede definirse una función de elección del conjunto potencia de A en A que hace corresponder a toda parte no vacía E de A un elemento de E que se denomina *elemento distinguido*.

Mientras el logicismo se estaba gestando, un grupo de matemáticos llamados intuicionistas comenzaban a elaborar una aproximación a las matemáticas, radicalmente diferente y diametralmente opuesta. El intuicionismo anticipado por el filósofo Immanuel Kant (1724-1804) quien decía, "el conocimiento puede comenzar con la experiencia, pero no proviene de la experiencia, proviene de la mente", y perfeccionado por la fenomenología de Edmund Husserl (1859-1938) que afirmaba "el conocimiento no existe fuera de la mente del sujeto y el criterio de verdad se halla constituido por las vivencias personales de los sujetos", encontró adeptos entre los matemáticos.

El precursor del intuicionismo matemático Leopold Kronecker (1823-1891) y sus seguidores Poincaré, Borel, y Baire hicieron una serie de críticas a los argumentos matemáticos corrientes de la época; sus contribuciones sin embargo fueron esporádicas y fragmentarias. En 1907 Brouwer, matemático holandés recogió las ideas intuicionistas de la época en su disertación *Sobre los fundamentos de la matemática*. Para Brouwer no existe matemática fuera de la mente humana, es pues independiente del mundo real. La mente reconoce intuiciones básicas y claras; por lo tanto, el pensamiento matemático es un proceso de construcciones mentales independientemente de la experiencia y basado sólo en la intuición.

De esta manera el intuicionismo rechaza la axiomatización y el logicismo, es decir, la verdad de las matemáticas no requiere del conocimiento de las demostraciones formales, por lo tanto, la consistencia de las matemáticas es un fantasma, no tiene sentido. En este contexto, las paradojas o no existen o no son importantes.

A las tendencias logicistas e intuicionistas, diametralmente opuestas en los fundamentos de las matemáticas, le siguieron dos escuelas más, la formalista creada y dirigida por David Hilbert y la conjuntista iniciada por Ernst Zermelo.

La axiomatización de la teoría de conjuntos fue emprendida por primera vez por Ernst Zermelo en 1908. Su teoría fue elaborada con un cuidado estricto para evitar las paradojas. Este sistema de axiomas de Zermelo fue perfeccionado por Abraham Fraenkel en 1922. Aunque Zermelo y Fraenkel construyeron cuidadosamente una jerarquía de conjuntos que evitaba la ambigüedad de los trabajos anteriores sobre los conjuntos y sus propiedades, no se preocuparon por establecer la consistencia de la teoría. Sin embargo, esta axiomatización fue considerada el fundamento adecuado para sustentar aquellas ramas de la matemática clásica que habían sido cuestionadas, como el análisis y la geometría analítica.

El surgimiento de las paradojas significó un duro golpe a la propuesta liderada por Hilbert sobre la fundamentación de las matemáticas. Las contradicciones debían ser resueltas y el problema más importante, la consistencia de la matemática que había sido reducido a la consistencia de la aritmética, aún estaba sin solución. De nuevo el liderazgo lo tomó Hilbert.

8. Limitaciones del método axiomático

La argumentación de Hilbert en la demostración de la consistencia de la geometría estaba fundamentada en la supuesta consistencia de la teoría de los números reales y éste era un problema sin resolver.
Hilbert propuso una alternativa a las pruebas relativas de consistencia, trató de construir pruebas *absolutas.* Ideó un modelo con el que se pudiera demostrar la consistencia de los sistemas sin necesidad de dar por supuesta la consistencia de otro sistema. Puesto que una de las dificultades encontradas en los diversos intentos realizados para resolver el problema de la consistencia provenía del hecho de que los axiomas son interpretados por modelos compuestos por un número infinito de elementos, envueltos en un número finito de observaciones, el modelo requerido debía ser finito.
Hilbert y sus discípulos Wilhelm Ackermann (1903-1962), Paul Bernays (1888-1978) y John von Neumann (1903-1957), desarrollaron gradualmente entre 1920 y 1930 lo que se conoce con el nombre de *teoría de la demostración* de Hilbert o *metamatemática*, un método para establecer la consistencia de cualquier sistema formal. El primer paso consistía en encontrar un modelo que correspondiera a la formalización completa de un sistema deductivo. Hilbert propuso utilizar una lógica especial que estuviera libre de cualquier objeción, las demostraciones de existencia debían ser constructivas, la metamatemática debía además aceptar conceptos y cuestiones que al menos implicaran sistemas potencialmente infinitos. Las demostraciones debían usar procedimientos que no hicieran referencia ni a un número infinito de propiedades, ni a un número infinito de operaciones con fórmulas.
Para Hilbert el camino más seguro era considerar las matemáticas no como un conocimiento factual, sino como una disciplina formal, esto es abstracta, simbólica y sin referencia a ningún significado y las deducciones debían seguir los principios lógicos. Para evitar ambigüedades de lenguaje y la utilización del conocimiento intuitivo, que son la causa de algunas paradojas; para evitar otras y para lograr precisión en las demostraciones y objetividad, Hilbert decidió que todos los enunciados de las matemáticas y de la lógica debían ser expresados en forma simbólica.
Con todos los axiomas lógicos y matemáticos expresados como fórmulas o colección de símbolos, Hilbert estaba en condiciones de enunciar lo que él entendía como demostración objetiva. Una fórmula es verdadera si se puede obtener como la última de una sucesión de fórmulas tal que cada fórmula de la sucesión es un axioma o bien una fórmula derivada del sistema mediante algunas de las reglas de deducción.
Evidentemente, Hilbert confiaba en que su teoría de la demostración resolvería las cuestiones de la consistencia y complitud. En 1930 el propio Hilbert había construido un sistema un tanto artificial que cubría solamente una porción de la aritmética (permitía la adición de números pero no la multiplicación) y había

establecido su consistencia y su complitud. Otros resultados de consistencia y complitud, como el del cálculo proposicional y el del cálculo de predicados de primer orden, obtenido por Kurt Gödel con el modelo de Hilbert, llenaron de optimismo a los formalistas sobre la utilidad de la teoría de la demostración para establecer la consistencia y complitud de todas las matemáticas.

Pero justo al año siguiente, Kurt Gödel (1906-1978) publicó en 1931 el trabajo titulado *Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas relacionados*, que contiene dos resultados sorprendentes.

En primer lugar el teorema de incompletitud o teorema de Gödel, el cual afirma que si una teoría formal que abarca la teoría de los números enteros es consistente, entonces es incompleta. Esto quiere decir que existe al menos un enunciado N significativo de la teoría tal que ni su afirmación ni su negación pueden ser demostradas en la teoría. Puesto que N debe ser verdadero o falso, existe una proposición verdadera de la teoría de números que no es demostrable, por lo tanto es *indecidible*. Este teorema puede ser aplicado al sistema proposicional de Russell, al sistema de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y a la axiomatización de Hilbert de la teoría de números y de hecho a cualquiera de los sistemas axiomáticos.

En segundo lugar, como corolario del teorema de incompletitud, Gödel afirma: la consistencia de cualquier sistema matemático lo suficiente amplio como para abarcar incluso la aritmética de los números enteros, no puede ser demostrada mediante los principios lógicos adoptados por las diferentes escuelas: los logicistas, los fomalistas y los conjuntistas. Este resultado afectaba fundamentamente a la escuela formalista puesto que Hilbert había limitado deliberadamente sus principios lógicos metamatemáticos a aquéllos aceptables incluso para los intuicionistas, de manera que eran muy pocas las herramientas lógicas permitidas.

La conmoción que produjo entre los matemáticos el trabajo de Gödel sobre la incompletitud y la imposiblidad de probar la consistencia no había sido aún asimilada cuando, unos diez años después, nuevos resultados conmocionaron el curso de las matemáticas. En 1947 Gödel demostró la independencia del axioma de elección de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, y conjeturó que la hipótesis del continuo era independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y del axioma de elección. En 1963, Paul Cohen probó que tanto el axioma de elección como la hipótesis del continuo son independientes de los demás axiomas de Zermelo-Fraenkel, siempre que éstos sean consistentes. Es decir, ninguna de las dos afirmaciones puede ser demostrada sobre la base de los otros axiomas de la teoría de conjuntos. La independencia de estas dos afirmaciones significa que en el sistema de Zermelo-Fraenkel, el axioma de elección y la hipótesis del continuo son indecidibles.

Puesto que la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel se había desarrollado con el propósito de construir las matemáticas sobre la teoría de conjuntos, los resultados anteriores daban la posibilidad de construir teorías matemáticas optando por diferentes caminos. Se podía aceptar los dos axiomas, el de elección y la hipótesis del continuo, solamente uno de ellos, o rechazar los dos axiomas o solamente uno de ellos. Existen, por consiguiente, diferentes direcciones en las que se puede construir una teoría de conjuntos, por lo tanto, también se pueden construir diferentes matemáticas.

Los trabajos de Gödel y Cohen no fueron los únicos en desconcertar a los matemáticos. Una serie de trabajos, iniciados en 1920 por Leopold Löwenheim y simplificados por Thoralf Skolem en 1930, probaron que los axiomas de un sistema no limitan las interpretaciones o modelos, esto es, un sistema de axiomas permite varias interpretaciones, esencialmente diferentes unas de otras. El teorema de Löwenheim-Skolem establece la existencia de interpretaciones o modelos de un sistema dado de axiomas que, sin añadir nuevos axiomas son radicalmente diferentes. Por lo tanto, la realidad matemática no puede ser incorporada sin ambigüedad por los sistemas de axiomas.

Una de las razones para que se den posibles interpretaciones no pretendidas en un sistema axiomático está en que todo sistema axiomático contiene términos no definidos, que en un principio se creía que los axiomas definían implícitamente. Es posible que debido a la incomplitud del sistema alguno de los enunciados significativos de una interpretación sean proposiciones indecidibles, pues, de otra forma, no serían posibles interpretaciones radicalmente distintas.

Los resultados de Gödel, Cohen y Löwenheim-Skolem no deben llevar a la desesperanza. El descubrimiento de que existen verdades matemáticas que no pueden ser demostradas formalmente, no significa que existan verdades que deban permanecer en el limbo o que la intuición deba reemplazar a la prueba convincente. Significa que los recursos del intelecto humano no han sido, ni pueden ser, plenamente formalizados, y que subsiste la posibilidad de descubrir nuevos principios de demostración.

Lo rescatable de este movimiento de formalización es el significativo avance que ha tenido la matemática desde comienzos del siglo XIX. Progreso que está estrechamente ligado a la importancia de la abstracción y a la preocupación cada vez mayor por la percepción y el análisis de modelos matemáticos generales. Las rupturas en matemáticas han sido artífices de teorías valiosas que en muchas ocasiones han perfeccionado las anteriores en vez de excluirlas. Podemos concluir que en las matemáticas diferentes paradigmas han coexistido sin generar problema.

Bibliografía

[1] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley edition, U.S.A., 1968.

[2] A. Campos, *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, Universidad Nacional, Colombia, 1994.

[3] I. Castro, J. H. Peréz, *Las paradojas en matemáticas*, Universitas Scientiarum, Revista de la Facultad de Ciencias, Universidad Javeriana, Bogotá, (2003), 25-37.

[4] R. Descartes, *Discurso del método*, Biblioteca clásica contemporanea, Losada, Argentina, 1968.

[5] J. Dieudonné, *David Hilbert*, Las grandes corrientes del pensamiento matemático, Eudeba, 1962.

[6] J. Dieudonné, M. Loi and R. Thom, *Pensar la matemática*, Seminario de Filosofía y Matemática de la Ëcole Normale Supérieure de París, Tusquets Editores, 1999. Traducción de Carlos Bidón-Chanal.

[7] R. Fraissé, *Tesis, deducción, axiomática y fuerza de una teoría*, Pensar la Matemática, **4**, (1982), 259-262.

[8] H. Helmholtz, *Sobre el origen y la significación de los axiomas geométricos*, Sigma. El mundo de las matemáticas, **4**, (1968), 242-266.

[9] D. Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, Textos Universitarios **5**, Raycar, S.A. España, 1991. Traducción de F. Cebrián de la septima edición alemana, 1930.

[10] M. Kline, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Siglo Veintiuno Editores, España, 2000.

[11] E. Nagel and J. Newman, *El teorema de Gödel*, Editorial Tecnos, S.A. 1999. Traducción de A. Martín.