Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XI No. 2 (2004), pp. 109–131

ESQUELETOS DE RETÍCULOS COMPLETOS

GUSTAVO N. RUBIANO O. Y RODRIGO DE CASTRO K. (*)

Dedicado a la memoria de Jairo Charris Castañeda

RESUMEN. Se introducen las nociones de esqueleto, esqueleto mínimo y esqueleto atómico en retículos completos; se muestran sus propiedades básicas y se identifican esqueletos en algunos importantes retículos completos.

1. INTRODUCCIÓN

Dado un conjunto ordenado $(P, \leq)$, una pregunta muy natural es: ¿existe un retículo completo que contenga una imagen orden-isomorfa de P?; es decir, ¿se puede "completar" el orden de P? La respuesta es afirmativa, y de hecho, existe un completamiento canónico denominado el *completamiento de Dedekind-MacNeille* o *completamiento normal* de P, denotado $DM(P)$. Para una presentación detallada de su construcción y sus propiedades véase [3] o [1].

En el presente artículo abordaremos la pregunta inversa: dado un retículo completo $(L, \leq)$, ¿podemos encontrar un subconjunto P de L tal que $P \neq L$ y L sea orden isomorfo a $DM(P)$? Es decir, ¿cuándo un retículo completo es el completamiento de Dedekind-MacNeille de algún subconjunto propio? En caso de existir, al conjunto P lo denominaremos un *esqueleto de L*.

2. NOTACIÓN Y PRELIMINARES

Asumimos que el lector está familiarizado con las nociones básicas de conjunto ordenado, cota superior, cota inferior, supremo (o sup) e ínfimo (o inf) de subconjuntos de conjuntos ordenados. Una excelente referencia sobre estructuras ordenadas es [3].

Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \leq)$ conjuntos ordenados; una función $\varphi : P \to Q$ se dice que es *monótona*, o que *preserva el orden*, si $x \leq y$ en P implica $\varphi(x) \leq \varphi(y)$

(*) Gustavo N. Rubiano O. y Rodrigo De Castro K. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

en Q. La función φ es una *inmersión de orden* si

$$x \leq y \text{ en } P \iff \varphi(x) \leq \varphi(y) \text{ en } Q.$$

Un *isomorfismo de orden* es una inmersión de orden sobreyectiva (y por lo tanto, biyectiva). Si existe una inmersión de orden de P sobre Q, se dice que P y Q son orden-isomorfos y se escribe $P \cong Q$.

Dado un conjunto ordenado P, el *dual* de P, denotado P^∂, se obtiene definiendo $x \leq y$ en P^∂ si y sólo si $y \leq x$ en P. Se dice que $(P, \leq)$ es *anti-isomorfo* a $(Q, \leq)$ si existe un isomorfismo de orden φ entre P y Q^∂; es decir, si $\varphi : P \to Q$ es biyectiva y

$$x \leq y \text{ en } P \iff \varphi(x) \geq \varphi(y) \text{ en } Q.$$

Con $A^\uparrow$—léase el superior de A— denotamos el conjunto de las cotas superiores de A, y con $A^\downarrow$ el conjunto de las cotas inferiores de A. El elemento mínimo de $A^\uparrow$, si existe, es el supremo de A, denotado por $\bigvee A$ o $\sup A$. De manera dual se define el ínfimo de A, denotado $\bigwedge A$ o $\inf A$. En el caso en que $A = \{x, y\}$ simplemente notamos

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \text{ y } x \wedge y := \inf\{x, y\}.$$

Si para todo par de elementos x, y existen $x \vee y$ y $x \wedge y$, se dice que $(P, \leq)$ es un *retículo.* $(P, \leq)$ es un *retículo completo* (o reticulado completo) si para todo subconjunto S de P existen $\bigvee S = \sup S$ y $\bigwedge S = \inf S$. Si se quiere resaltar el papel de P se escribe $\bigvee_P S$ y $\bigwedge_P S$, respectivamente. Nótese que en un retículo completo $(P, \leq)$ se tiene

$$\begin{aligned} \inf \varnothing = \sup P = {} & \text{máximo de } P = \top, \\ \sup \varnothing = \inf P = {} & \text{mínimo de } P = \bot. \end{aligned}$$

La propiedad establecida en el siguiente lema es frecuentemente útil.

Lema 2.1. *$(P, \leq)$ es un retículo completo si y sólo si P tiene un elemento máximo (necesariamente único) y existe $\bigwedge S$ para todo $S \subseteq P$, $S \neq \varnothing$. Análogamente, $(P, \leq)$ es un retículo completo si y sólo si P tiene un elemento mínimo (necesariamente único) y existe $\bigvee S$ para todo $S \subseteq P$, $S \neq \varnothing$.*

Un subconjunto $S \subseteq P$ se llama *conjunto inferior* (o *conjunto decreciente* o *ideal de orden*) si $y \leq x \in S$ implica $y \in S$ para $x, y \in P$. Entre los conjuntos inferiores se destacan los llamados *ideales principales*: para $x \in P$, $\downarrow x := \{y \in P : y \leq x\}$ es el *ideal principal generado por x*. Dualmente, un subconjunto $S \subseteq P$ se llama *conjunto superior* (o *conjunto creciente* o *filtro de orden*) si $y \geq x \in S$ implica $y \in S$ para $x, y \in P$. Como caso particular, el conjunto $\uparrow x := \{y \in P : y \geq x\}$ es un conjunto superior para todo $x \in P$, llamado también *filtro principal generado por x*.

Todo conjunto ordenado $(P, \leq)$ induce un retículo completo: el retículo $\mathcal{O}(P)$ de los subconjuntos inferiores o ideales de P, con el orden de la contenencia.

Es un retículo completo porque las uniones y las intersecciones arbitrarias de conjuntos inferiores son conjuntos inferiores. Más aun, la correspondencia

$$\begin{aligned}(P,\leq) &\longrightarrow (\mathcal{O}(P),\subseteq)\\ x &\longmapsto {\downarrow} x\end{aligned}$$

es claramente una inmersión de orden; es decir, $(\mathcal{O}(P),\subseteq)$ es un completamiento natural de $(P,\leq)$. Este hecho sugiere la siguiente pregunta: ¿existe algún objeto que pueda ser considerado *el más pequeño retículo completo que contiene una copia isomorfa de* P? La respuesta es afirmativa y tal objeto canónico —*el completamiento de Dedekind-MacNeille*— se define a continuación.

Definición 2.2 (por cotas)**.**

$$DM_1(P) := \{A \subseteq P : A^{\uparrow\downarrow} = A\}.$$

Definición 2.3 (por ideales principales)**.**

$$DM_2(P) := \big\{A \subseteq P : \Delta A \subseteq A\big\}, \quad \text{donde} \quad \Delta A = \bigcap\{{\downarrow} y : y \in A^{\uparrow}\}.$$

Definición 2.4 (por cortaduras)**.** Una cortadura de P es un par (A, B) de subconjuntos A y B de P tales que $A^{\uparrow} = B$ y $B^{\downarrow} = A$.

$$DM_3(P) := \{A \subseteq P : (A, B) \text{ es una cortadura de } P \text{ para algún } B \subseteq P\}.$$

Teorema 2.5. *Las definiciones 2.2, 2.3 y 2.4 son equivalentes; es decir, definen el mismo objeto:*

$$DM_1(P) = DM_2(P) = DM_3(P).$$

Demostración. Obsérvese primero que

$$\begin{aligned} z \in A^{\uparrow\downarrow} &\iff z \text{ es cota inferior de } A^{\uparrow}\\ &\iff z \leq y, \text{ para todo } y \in A^{\uparrow}\\ &\iff z \in {\downarrow} y, \text{ para todo } y \in A^{\uparrow}\\ &\iff z \in \bigcap\{{\downarrow} y : y \in A^{\uparrow}\}.\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que

$$A^{\uparrow\downarrow} = \bigcap\{{\downarrow} y : y \in A^{\uparrow}\} = \Delta A. \tag{1}$$

Puesto que la contenencia $A \subseteq \Delta A$ es siempre válida, se concluye que $DM_1(P) = DM_2(P)$.

Mostraremos ahora que $DM_3(P) = DM_1(P)$. Sea $A \in DM_3(P)$; entonces $A^{\uparrow} = B$ y $B^{\downarrow} = A$ para algún $B \subseteq P$. Por lo tanto, $A^{\uparrow\downarrow} = B^{\downarrow} = A$; es decir, $A \in DM_1(P)$. Por otro lado, si $A \in DM_1(P)$, entonces $(A, A^{\uparrow})$ es una cortadura de P ya que $A^{\uparrow\downarrow} = A$. Esto muestra que $DM_3(P) = DM_1(P)$. $\square$

Definición 2.6. El conjunto $DM_1(P) = DM_2(P) = DM_3(P)$ se denomina *completamiento de Dedekind-MacNeille de P* o *completamiento normal de P* y se denota por $DM(P)$.

Se puede obtener una importante caracterización de $DM(P)$ por medio de las nociones de subconjunto sup-denso e inf-denso.

Definición 2.7. Decimos que $S \subseteq P$ es *sup-denso* en P si para cada elemento $s \in P$ existe un $A \subseteq S$ tal que $s = \bigvee_P A$ (*todo elemento de P se puede aproximar por debajo por medio de elementos en S*). Dualmente, S es *inf-denso* en P si para cada elemento $s \in P$ existe un $A \subseteq S$ tal que $s = \bigwedge_P A$.

Es claro que un isomorfismo de orden envía un conjunto sup-denso en uno sup-denso y, dualmente, uno inf-denso en uno inf-denso, mientras que un anti-isomorfismo de orden envía un conjunto inf-denso en uno sup-denso y viceversa.

Teorema 2.8. *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.*

(i) *$DM(P)$ es un retículo completo en el cual P es sup-denso e inf-denso.*

(ii) *$DM(P)$ es el más pequeño retículo completo que contiene a P y en el cual P es sup e inf denso. Más precisamente, si P es un subconjunto sup e inf denso de un retículo completo L, entonces $L \cong DM(P)$.*

Para la demostración de este teorema fundamental, véase [1] ó [3].

3. Esqueletos de retículos completos

Definición 3.1. Sea $(L, \leq)$ un retículo completo.

(i) Un subconjunto E de L es un *esqueleto* de L si $E \neq L$ y $DM(E) \cong L$. Según las propiedades del Teorema 2.8, se puede decir de manera equivalente que E es un *esqueleto* de L si $E \subsetneqq L$ y E es sup-denso e inf-denso en L.

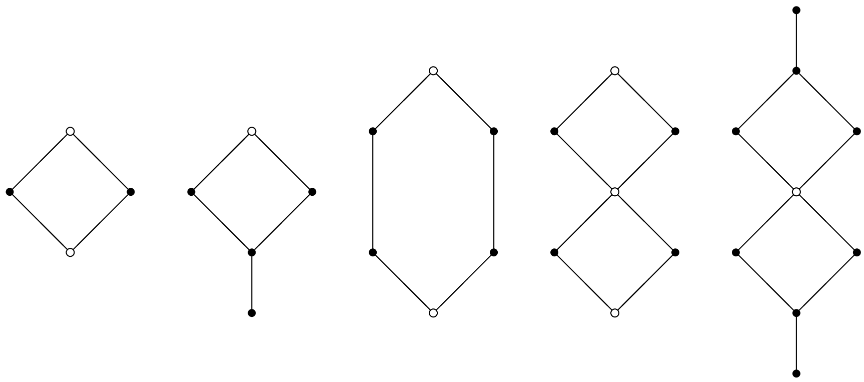
(ii) Un esqueleto E de L es un *esqueleto mínimo* si ningún subconjunto propio de E es un esqueleto de L.

Un esqueleto determina completamente un retículo completo en el siguiente sentido: si dos retículos completos L_1 y L_2 tienen esqueletos isomorfos E_1 y E_2, respectivamente, entonces L_1 y L_2 son también isomorfos. Esto es una consecuencia directa del Teorema 2.8:

$$E_1 \cong E_2 \Longrightarrow L_1 \cong DM(E_1) \cong DM(E_2) \cong L_2.$$

Es obvio que un subconjunto propio de L que contenga un esqueleto es también un esqueleto de L. En los siguientes ejemplos mostraremos que existen retículos completos sin esqueleto, retículos con un único esqueleto, retículos con esqueletos no isomorfos y retículos con múltiples esqueletos pero sin esqueleto mínimo. En general, no hay técnicas que permitan identificar o construir esqueletos de retículos completos. A lo largo del presente artículo identificaremos esqueletos de algunos importantes retículos completos.

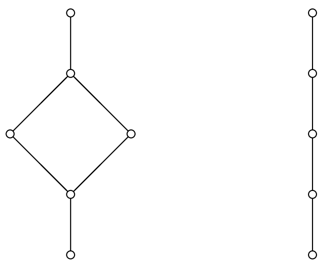
Ejemplos 3.2. Cada uno de los retículos completos de la Figura 1 tiene un esqueleto, formado por los elementos marcados con •.



(a) (b) (c) (d) (e)

FIGURA 1. Retículos completos con esqueleto.

Los retículos de la Figura 2 son ejemplos de retículos completos sin esqueleto. De hecho, los órdenes lineales finitos (cadenas finitas) son todos retículos completos sin esqueleto: una cadena finita $(L, \leq)$ no tiene esqueleto porque cualquier elemento a de L debe pertenecer a un esqueleto, ya que a no es sup ni inf de ningún subconjunto de $L - \{a\}$.



(a) (b)

FIGURA 2. Retículos completos sin esqueleto.

Las cadenas infinitas (que sean retículos completos) pueden o no tener esqueletos. Así por ejemplo, el retículo completo $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$, en el que el orden entre naturales es el usual y $n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tiene un único esqueleto, a saber, $\mathbb{N}$. Obsérvese que $\infty = \inf \varnothing = \sup \mathbb{N}$; además, no se puede excluir ningún $n \in \mathbb{N}$ de un esqueleto porque n no es sup ni inf de ningún subconjunto de $\mathbb{N} - \{n\}$.

De otro lado, no es difícil convencerse de que la cadena completa e infinita $L = \mathbb{N} \cup \{\infty, \infty+1\}$, obtenida añadiendo a $\mathbb{N}$ dos elementos en el tope (Figura 3) no tiene esqueleto. L no es otra cosa que la suma lineal $\mathbb{N} \oplus \mathbf{2}$, donde $\mathbf{2}$ es la cadena con dos elementos.

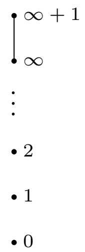


FIGURA 3. La cadena completa $\mathbb{N} \oplus \mathbf{2}$ no tiene esqueleto.

En contraste con los ejemplos anteriores, el retículo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, en el que se añade a $\mathbb{R}$ un primer y un último elemento, tiene múltiples esqueletos. Es claro que subconjuntos propios como $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{1\}$, ..., $\mathbb{R} - \{n\}$, ..., $\mathbb{R} - \mathbb{N}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ y el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ de los irracionales, por ejemplo, son todos esqueletos de $\mathbb{R}^*$. Pero no hay un esqueleto mínimo como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.3. $(\mathbb{R}^*, \leq)$ *tiene infinitos esqueletos pero no tiene esqueleto mínimo.*

Demostración. Para concluir que $(\mathbb{R}^*, \leq)$ no tiene esqueleto mínimo, la idea es mostrar que si $S \subseteq \mathbb{R}$ es un esqueleto de $\mathbb{R}^*$ y $a \in S$, entonces $S - \{a\}$ también es un esqueleto de $\mathbb{R}^*$. En efecto, si S es un subconjunto propio de $\mathbb{R}$ que es tanto sup como inf denso, es fácil observar que S es denso en el sentido usual: entre dos reales debe existir un elemento de S. Por consiguiente, se puede encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a = \inf_{n\geq 0} x_n$, escogida de tal manera que x_n sea un elemento de S en $]a, a + \frac{1}{n}[$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Similarmente, se puede encontrar una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $y_n \in S$, $y_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $a = \sup_{n\geq 0} y_n$. Esto muestra que $S - \{a\}$ es sup e inf denso y, por lo tanto, $(\mathbb{R}^*, \leq)$ no tiene esqueleto mínimo. $\square$

Una importante clase de retículos completos con esqueleto mínimo es la de los retículos sin cadenas infinitas, es decir, los retículos que satisfacen las dos condiciones de cadena CCA y CCD. Recordemos que un conjunto ordenado $(P, \leq)$ satisface CCA (*condición de cadena ascendente*) si no existen cadenas ascendentes infinitas; en otras palabras, si dada una sucesión $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$ de elementos de P, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x_{k+1} = \cdots$. Se dice que $(P, \leq)$ satisface la condición dual CCD (*condición de cadena descendente*) si P no tiene cadenas descendentes infinitas. Para describir un esqueleto mínimo en este tipo de retículos necesitamos las nociones de elemento $\wedge$-irreducible y elemento $\vee$-irreducible.

Definición 3.4. Sea $(L, \leq)$ un retículo (no necesariamente completo).

(i) Un elemento a de L es $\wedge$-*irreducible* si $a \neq \top$ (en caso de que L tenga elemento máximo $\top$) y $a \neq x \wedge y$ para todo $x, y \in L$ con $x > a$, $y > b$. Equivalentemente, x es $\wedge$-irreducible si $a \neq \top$ y

$$a = x \wedge y \text{ implica } x = a \text{ ó } y = a, \text{ para todo } x, y \in L.$$

El conjunto de elementos $\wedge$-irreducibles de L lo denotamos por $\mathcal{I}_\wedge$.

(ii) Dualmente, un elemento a de L es $\vee$-*irreducible* si $a \neq \bot$ (en caso de que L tenga elemento mínimo $\bot$) y $a \neq x \vee y$ para todo $x, y \in L$ con $x < a$, $y < b$. Equivalentemente, x es $\wedge$-irreducible si $a \neq \bot$ y

$$a = x \vee y \text{ implica } x = a \text{ ó } y = a, \text{ para todo } x, y \in L.$$

El conjunto de elementos $\vee$-irreducibles de L lo denotamos por $\mathcal{I}_\vee$.

En el siguiente teorema se identifica un esqueleto mínimo en cualquier retículo sin cadenas infinitas. Salvo la notación y la terminología de esqueletos, el resultado es conocido y su demostración puede consultarse en [3].

Teorema 3.5. *Un retículo sin cadenas infinitas, es decir, un retículo que satisface las condiciones de cadena CCA y CCD, tiene un esqueleto mínimo, a saber,* $\mathcal{I}_\wedge \cup \mathcal{I}_\vee$.

La generalización de las nociones "$\wedge$-irreducible" y "$\vee$-irreducible" es bastante útil.

Definición 3.6. Sea $(L, \leq)$ un retículo (no necesariamente completo).

(i) Un elemento a de L es *Inf-irreducible* si $a \neq \top$ (en caso de que L tenga elemento máximo $\top$) y a no es el ínfimo de ningún subconjunto de elementos mayores que a. Es decir, si $S \subseteq L$ es tal que $a \notin S$ y $a < x$ para todo $x \in S$, entonces $a \neq \bigwedge S$.

(ii) Dualmente, un elemento a de L es *Sup-irreducible* si $a \neq \bot$ (en caso de que L tenga elemento mínimo $\bot$) y a no es el supremo de ningún subconjunto de elementos menores que a. Es decir, si $S \subseteq L$ es tal que $a \notin S$ y $x < a$ para todo $x \in S$, entonces $a \neq \bigvee S$.

(iii) Un elemento x de L es *irreducible* si x es Inf-irreducible o es Sup-irreducible. Se dice que x es *reducible* o *aproximable* en caso contrario.

Obviamente, todo elemento Sup-irreducible es $\vee$-irreducible. La recíproca es falsa como se puede comprobar con el retículo $\mathbb{N} \oplus \mathbf{2}$ de la Figura 3. El elemento ∞ es $\vee$-irreducible pero no es Sup-irreducible porque $\sup \mathbb{N} = \infty$. Análogamente, todo elemento Inf-irreducible es $\wedge$-irreducible, pero no viceversa.

De acuerdo con la Definición 3.6, es claro que todo elemento irreducible debe hacer parte de un esqueleto. Este hecho permite contemplar en general la situación presentada en los retículos sin esqueleto de las Figuras 2 y 3.

Proposición 3.7. *Un retículo completo en el que todos los elementos sean irreducibles no tiene esqueleto.*

Demostración. Puesto que los irreducibles pertenecen a cualquier esqueleto y los esqueletos deben ser subconjuntos propios, el retículo no tiene esqueleto. □

4. Retículos completos con esqueletos atómicos

Un esqueleto E para el retículo completo $(\wp(X), \subseteq)$ de las partes de X está conformado por

$$E = \big\{\{x\} : x \in X\big\} \cup \big\{X - \{x\} : x \in X\big\},$$

donde el primer conjunto de la unión es inf-denso y el segundo es sup-denso. Nótese que los conjuntos unitarios $\{x\}$ no contienen a ningún otro subconjunto de X, excepto al mínimo, $\varnothing$, mientras que los conjuntos de la forma $X - \{x\}$ no están contenidos en ningún otro subconjunto de X, excepto en el máximo, X. Destacamos a continuación este tipo de elementos en un retículo arbitrario.

Definición 4.1. Sea $(L, \leq)$ un retículo con mínimo $\perp$ y máximo $\top$ (no necesariamente completo). Un elemento $a \in L$, $a \neq \perp$ es un *infra-elemento* si ningún elemento precede a a, excepto $\perp$. De manera dual, a es un *ultra-elemento* si $a \neq \top$ y ningún elemento es mayor que a, excepto $\top$. El conjunto de los infra-elementos de L es denotado por $\mathcal{I}(L)$ y el de los ultra-elementos por $\mathcal{U}(L)$.

En la literatura es corriente referirse a los infra-elementos como *átomos* y a los ultra-elementos como *co-átomos* o *átomos duales*. Creemos que nuestra terminología es más natural y sugestiva.

El retículo $(\wp(X), \subseteq)$ tiene entonces el esqueleto $\mathcal{I}(\wp(X)) \cup \mathcal{U}(\wp(X))$, formado por los infra y los ultra-elementos; dicho esqueleto es, de hecho, mínimo. En general, llamaremos atómicos a este tipo de esqueletos.

Definición 4.2. Sea $(L, \leq)$ un retículo completo. Si el conjunto formado por los infra-elementos y los ultra-elementos de L, es decir, $\mathcal{I}(L) \cup \mathcal{U}(L)$, es un esqueleto mínimo, éste se denomina el *esqueleto atómico* de L.

Obsérvese que los esqueletos de los retículos (a), (c) y (d) de la Figura 1 son atómicos, lo cual no es cierto para los retículos (b) y (e).

Intuitivamente, es claro que todo esqueleto atómico está formado por elementos irreducibles; en la siguiente proposición se demuestra formalmente este hecho.

Proposición 4.3. *Sea* $(L, \leq)$ *un retículo (no necesariamente completo) con elemento mínimo* $\bot$ *y elemento máximo* $\top$*.*

(I) *Todo infra-elemento de* L *es Sup-irreducible.*
(II) *Todo ultra-elemento de* L *es Inf-irreducible.*
(III) *Los elementos del esqueleto atómico de* L *(si existe) son irreducibles.*

Demostración. (i) Razonamos por contradicción. Sea a un infra-elemento, $a \neq \bot$ y $S \subseteq L$ tal que $a \notin S$, $x < a$ para todo $x \in S$, y $a = \bigvee S$. Como a es un infra-elemento, necesariamente $x = \bot$ para todo $x \in S$. De donde, $a = \bigvee S = \bot$, contradicción. La afirmación (ii) se demuestra análogamente y (iii) es consecuencia de (i) y (ii). □

Los infra-elementos y los ultra-elementos, si existen, no necesariamente forman un esqueleto. Tales situaciones se ilustrarán en las secciones subsiguientes en las que estudiaremos algunos importantes retículos.

5. El retículo $(\mathbb{N}, |)$

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, ordenado por la relación de divisibilidad,

$$n \mid m \iff m = kn \text{ para algún } k \in \mathbb{N},$$

forma un retículo completo, con elemento mínimo 1 y máximo 0 (ya que $n \mid 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). El ínfimo y el supremo de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ son, respectivamente, el *máximo común divisor* (abreviado mcd) y el *mínimo común múltiplo* (abreviado mcm), *i.e.*, para todo $A \subseteq \mathbb{N}$, A finito,

$$\bigwedge A = \mathrm{mcd}(A), \quad \bigvee A = \mathrm{mcm}(A).$$

Los infra-elementos son los números primos pero no hay ultra-elementos; por tanto, $(\mathbb{N}, |)$ no tiene esqueleto atómico. No obstante, este retículo tiene infinitos esqueletos como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 5.1. *Sea* $\mathcal{P}$ *el conjunto de los números primos.*

1. *Los únicos elementos irreducibles de* $(\mathbb{N}, |)$ *son las potencias de un primo, i.e., los números de la forma* p^i*, con* $p \in \mathcal{P}$*,* $i \geq 1$*.*
2. $(\mathbb{N}, |)$ *tiene infinitos esqueletos.*

Demostración. 1. No se puede lograr que $p^i = \bigvee A = \mathrm{mcm}(A)$ a menos que $p^i \in A$; o sea, p^i es irreducible. Para cualquier número $n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \cdots p_{i_k}^{\alpha_k}$, en cuya descomposición aparezcan por lo menos dos primos diferentes, tenemos

$$\mathrm{mcm}\{p_{i_1}^{\alpha_1}, p_{i_2}^{\alpha_2}, \ldots, p_{i_k}^{\alpha_k}\} = n = \mathrm{mcd}\{nr, ns\}$$

donde r y s son dos primos diferentes entre sí y diferentes de cada primo p_{i_1}, p_{i_2}, …, p_{i_k}. Esto demuestra que n es aproximable (*i.e.*, reducible).

2. Según el numeral anterior, todo número que no sea la potencia de un primo es aproximable; por consiguiente, los siguientes conjuntos son todos esqueletos de $(\mathbb{N}, |)$:

$$E_1 = \mathbb{N} - \{pq : p, q \text{ primos diferentes entre sí}\},$$
$$E_2 = \mathbb{N} - \{pqr : p, q, r \text{ primos diferentes entre sí}\},$$
$$\vdots$$
$$E_{k-1} = \mathbb{N} - \{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k} : p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots p_{i_k} \text{ primos diferentes entre sí}\},$$
$$\vdots$$
□

Es un hecho conocido que en un retículo completo L que satisfaga la condición de cadena descendente (CCD), para todo $C \subseteq L$, $C \neq \varnothing$, existe un subconjunto finito $F \subseteq C$ tal que $\bigwedge C = \bigwedge F$ (véase [3]). Como $(\mathbb{N}, |)$ satisface CCD, podemos concluir lo siguiente.

Lema 5.2. *En el retículo $(\mathbb{N}, |)$ se cumple que para todo $C \subseteq \mathbb{N}$, $C \neq \varnothing$, existe un subconjunto finito $F \subseteq C$ tal que $\bigwedge C = \operatorname{mcd}(F)$.*

Proposición 5.3. *$(\mathbb{N}, |)$ no tiene esqueleto mínimo.*

Demostración. Vamos a demostrar que si E es un esqueleto de $(\mathbb{N}, |)$ y $n \in E$, $n \neq p^i$ para todo $p \in \mathcal{P}$, $i \geq 1$, entonces $E - \{n\}$ también es un esqueleto. Obsérvese que todo esqueleto contiene *propiamente* a las potencias de los primos y estos números no se pueden excluir de ningún esqueleto ya que son irreducibles según la Proposición 5.1. Consideraremos dos casos.

Caso 1. Para todo par de primos diferentes p, q se tiene $np \in E$ ó $nq \in E$. Si se escogen cuatro primos diferentes, dos de ellos, r y s, satisfarán $nr \in E$ y $ns \in E$. Como $\operatorname{mcd}(nr, ns) = n$, entonces n se puede excluir del esqueleto y $E - \{n\}$ es también un esqueleto.

Caso 2. Existe un par de primos diferentes p, q tales que $np \notin E$ y $nq \notin E$. Como E es un esqueleto, existen subconjuntos A y B de E tales que $\bigwedge A = np$ y $\bigwedge B = nq$. En virtud del Lema 5.2, A y B se pueden considerar finitos, $np = \operatorname{mcd}(A)$ y $nq = \operatorname{mcd}(B)$. Entonces A es de la forma $A = \{npa_1, \ldots, npa_k\}$ y $B = \{nqb_1, \ldots, nqb_\ell\}$ para algunos naturales $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell$. Se deduce que

$$\operatorname{mcd}\big(\{a_1, \ldots, a_k\}\big) = \operatorname{mcd}\big(\{b_1, \ldots, b_\ell\}\big) = \operatorname{mcd}\big(\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell\}\big) = 1$$

ya que, de lo contrario, se tendrá $\operatorname{mcd}(A) > np$ ó $\operatorname{mcd}(B) > nq$. Por lo tanto, $\operatorname{mcd}(A \cup B) = n$ y como $A \cup B \subseteq E$, n se puede excluir del esqueleto. En conclusión, $E - \{n\}$ es también un esqueleto. □

Consideremos ahora el grupo cíclico infinito $(\mathbb{Z}, +)$ de los enteros con la operación usual de la suma. El conjunto de los subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$, notado $(Sub(\mathbb{Z}), \subseteq)$, ordenado por la relación de contenencia, es un retículo completo con elemento mínimo $\{0\}$ y elemento máximo $\mathbb{Z}$, en el que el ínfimo de una familia de subgrupos $\{H_i\}_{i\in I}$ es la intersección $\bigcap_{i\in I} H_i$, y el supremo es el subgrupo generado por la unión, *i.e.*, $\left\langle\bigcup_{i\in I} H_i\right\rangle$.

La función

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow Sub(\mathbb{Z}) \\ n &\longmapsto \langle n\rangle = \text{ subgrupo cíclico generado por } n \end{aligned}$$

establece un anti-isomorfismo entre $(\mathbb{N}, |)$ y $(Sub(\mathbb{Z}, \subseteq)$ ya que $n \mid m$ si y sólo si $\langle m\rangle \subseteq \langle n\rangle$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Podemos entonces concluir el siguiente corolario.

Corolario 5.4. *El retículo* $(Sub(\mathbb{Z}), \subseteq)$ *de los subgrupos del grupo cíclico infinito* $(\mathbb{Z}, +)$ *tiene infinitos esqueletos pero no tiene esqueleto atómico ni esqueleto mínimo.*

6. El retículo de las relaciones de equivalencia, $\boldsymbol{Equiv(X)}$

Definición 6.1. Un subconjunto R de $X \times X$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva:

1. $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$,
2. $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \in R$ para todo $x, y \in X$,
3. $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ implica $(x, z) \in R$ para todo $x, y, z \in X$.

Denotamos con $Equiv(X)$ al conjunto de todas las relaciones de equivalencia sobre X. Puesto que $X \times X$ es una relación de equivalencia y la intersección de relaciones de equivalencia es un también una relación de equivalencia, $(Equiv(X), \subseteq)$ es un retículo completo (Lema 2.1). La diagonal,

$$\Delta(X) := \{(x, x) : x \in X\}$$

es el elemento mínimo de $(Equiv(X), \subseteq)$ y $X \times X$ el máximo.

Proposición 6.2. *Las relaciones de la forma*

$$\Delta_{(a,b)} = \Delta(X) \cup \{(a, b), (b, a)\}$$

con $a, b \in X$, $a \neq b$, *son los infra-elementos de* $(Equiv(X), \subseteq)$ *y la colección de todos ellos es un conjunto sup-denso.*

Demostración. Que cada $\Delta_{(a,b)}$ es un infra-elemento es inmediato. Además, cualquier relación de equivalencia R se puede representar como

$$R = \bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a, b) \in R\}. \qquad \square$$

Para cada $A \subseteq X$ definimos la relación R_A de la siguiente forma:

$$xR_Ay \iff (x \in A \ \&\ y \in A) \text{ ó } (x \notin A \ \&\ y \notin A).$$

Es claro que R_A es una relación de equivalencia que determina la partición $X/R_A = \{A, A^c\}$ de X.

Proposición 6.3. *Las relaciones de equivalencia R_A son los ultra-elementos de $(Equiv(X), \subseteq)$ y la colección de todos ellos es un conjunto inf-denso.*

Demostración. El hecho de que las relaciones R_A sean ultra-elementos se sigue rápidamente al observar que para dos relaciones de equivalencia R y S sobre X se tiene

$$R \subseteq S \iff [a]_R \subseteq [a]_S, \quad \text{para todo } a \in X,$$

donde $[a]_R$ y $[a]_S$ denotan las clases de equivalencia de a en R y S, respectivamente.

La densidad es consecuencia de que para cualquier relación de equivalencia R se tiene

$$R = \bigcap\{R_A : A \in X/R\}$$

□

Corolario 6.4. *El retículo $(Equiv(X), \subseteq)$ tiene esqueleto atómico.*

7. El retículo de los pre-órdenes, *Pre(X)*

En esta sección mostraremos que el retículo completo de los pre-órdenes sobre un conjunto dado tiene un esqueleto atómico que será utilizado en la sección 11 para determinar el esqueleto de un retículo anti-isomorfo.

Definición 7.1. Un subconjunto R de $X \times X$ es una relación de preorden sobre X, o simplemente un preorden sobre X, si R es reflexiva y transitiva:

1. $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$,
2. $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ implica $(x, z) \in R$ para todo $x, y, z \in X$.

Denotamos con $Pre(X)$ al conjunto de todos los pre-órdenes sobre X. Puesto que $X \times X$ es un preorden y la intersección de pre-órdenes es un preorden, $(Pre(X), \subseteq)$ es un retículo completo (Lema 2.1). La diagonal,

$$\Delta(X) := \{(x, x) : x \in X\}$$

es el elemento mínimo de $(Pre(X), \subseteq)$ y $X \times X$ el máximo.

Proposición 7.2. *Los pre-órdenes de la forma*

$$\Delta_{(a,b)} = \Delta(X) \cup \{(a, b)\},$$

con $a, b \in X$, $a \neq b$, son los infra-elementos de $(Pre(X), \subseteq)$ y la colección de todos ellos es un conjunto sup-denso.

Demostración. Que cada $\Delta_{(a,b)}$ es un infra-elemento es inmediato. Además, cualquier preorden R se puede representar como

$$R = \bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a, b) \in R\}.$$

□

En la siguiente proposición se determinan los ultra-elementos de $Pre(X)$.

Proposición 7.3. *Para cada $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$, los pre-órdenes de la forma*

$$(A^c \times X) \cup (X \times A)$$

son los ultra-elementos de $(Pre(X), \subseteq)$ y la colección de todos ellos es un conjunto inf-denso.

Demostración. Usando las definiciones se deduce que $(A^c \times X) \cup (X \times A)$ es un preorden. Para concluir que es un ultra-elemento, mostraremos que si un preorden R contiene propiamente a $(A^c \times X) \cup (X \times A)$, necesariamente $R = X \times X$. Sea $(x, y) \in R - (A^c \times X) \cup (X \times A)$; entonces $(x, y) \in R$, $x \in A$ y $y \notin A$. Por lo tanto, (a, x) y (y, b) pertenecen a $(A^c \times X) \cup (X \times A)$ para todo $a, b \in R$. Por transitividad,

$$\begin{aligned} (a, x) \in R, \quad (x, y) \in R &\Longrightarrow (a, y) \in R, \\ (a, y) \in R, \quad (y, b) \in R &\Longrightarrow (a, b) \in R. \end{aligned}$$

De donde $(a, b) \in R$ para todo $a, b \in X$. Esto quiere decir que $R = X \times X$.

Para ver que los pre-órdenes $(A^c \times X) \cup (X \times A)$ conforman un conjunto inf-denso, mostraremos que para un preorden R dado se tiene

$$R = \bigcap \big\{ (A^c \times X) \cup (X \times A) : A = \uparrow\! x \text{ para alguna pareja } (x, y) \in R \big\}.$$

Aquí $\uparrow\! x$ representa el conjunto $\{y : xRy\}$. Para establecer la contenencia $\subseteq$, tomamos $(a, b) \in R$ y $(x, y) \in R$; se quiere demostrar que

$$(a, b) \in \big[(\uparrow\! x)^c \times X \big] \cup (X \times \uparrow\! x),$$

que es equivalente a mostrar que $\neg(xRa)$ ó xRb. Si $\neg(xRa)$, no hay nada que demostrar; si xRa entonces, por transitividad entre xRa y aRb, se concluye xRb.

La contenencia $\supseteq$ se puede establecer mostrando que si $(a, b) \notin R$, entonces $(a, b) \notin (A^c \times X) \cup (X \times A)$ para algún A de la forma $\uparrow\! x$, con $(x, y) \in R$. Sea $(a, b) \notin R$; como $(a, a) \in R$, podemos tomar y $A = \uparrow\! a$. Entonces $a \in A$ y $b \notin \uparrow\! a$, es decir, $a \in A$ y $b \in A^c$. Se sigue que $(a, b) \notin (A^c \times X) \cup (X \times A)$, que era lo que se quería demostrar. ☐

Corolario 7.4. *El retículo $(Pre(X), \subseteq)$ tiene esqueleto atómico.*

8. El retículo de los filtros, $\boldsymbol{Fil(X)}$

La noción de filtro se puede definir en retículos arbitrarios; no obstante, el caso más importante es, sin lugar a dudas, el de los filtros de conjuntos debido a su variedad de aplicaciones en topología, lógica y otras disciplinas.

Definición 8.1. Un *filtro* $\mathcal{F}$ sobre un conjunto no vacío X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X que satisface:

1. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
2. Si $F \subseteq G$ y $F \in \mathcal{F}$ entonces $G \in \mathcal{F}$.

La colección $(Fil(X), \subseteq)$ de todos los filtros sobre un conjunto X, ordenada por la relación de contenencia entre conjuntos, es un conjunto parcialmente ordenado. El elemento mínimo es $\{X\}$, llamado el *filtro trivial*, y el elemento máximo es $\wp(X)$, llamado el *filtro impropio*. Obviamente, si un filtro $\mathcal{F}$ tiene como elemento al conjunto $\varnothing$, tenemos que $\mathcal{F} = \wp(X)$; por tal razón, un filtro $\mathcal{F}$ con la condición $\varnothing \notin \mathcal{F}$ se denomina *filtro propio*.

Dados $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ filtros sobre X, si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ decimos que $\mathcal{G}$ es *más fino* que $\mathcal{F}$.

Proposición 8.2. $(Fil(X), \subseteq)$ *es un retículo completo.*

Demostración. Es fácil demostrar que la intersección arbitraria de filtros es un filtro; en consecuencia, si $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $Fil(X)$, su ínfimo está dado por

$$\bigwedge_{i\in I} \mathcal{F}_i = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i.$$

Invocando el Lema 2.1, podemos concluir que $(Fil(X), \subseteq)$ es un retículo completo. Pero podemos dar una descripción explícita de $\bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Sea $\mathcal{B}$ la colección de las intersecciones finitas de elementos tomados de los filtros $\mathcal{F}_i$:

$$\mathcal{B} = \{B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_n} : B_{i_k} \in \mathcal{F}_{i_k},\ 1 \le k \le n,\ n = 1, 2, \ldots\}$$

Entonces $\bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i$ es la colección de los super-conjuntos de los elementos en $\mathcal{B}$. Este filtro se denomina el *filtro generado por* $\mathcal{B}$. Si una de las intersecciones finitas que conforman $\mathcal{B}$ es vacía, se obtendrá el filtro impropio. $\square$

A continuación exhibiremos un esqueleto para $(Fil(X), \subseteq)$ formado por los *filtros principales* y los *ultrafiltros*. En primer lugar, es importante observar que los *infra-filtros*, o sea los infra-elementos en $(Fil(X), \subseteq)$, son los filtros de la forma $\big\{X, X - \{x\}\big\}$, para cada $x \in X$, y éstos no constituyen un conjunto sup-denso. Es decir, el retículo $(Fil(X), \subseteq)$ es un ejemplo en el que los infra-elementos no hacen parte de ningún esqueleto mínimo.

Definición 8.3. Dado $A \subseteq X$, el conjunto

$$\uparrow A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\},$$

de todos los superconjuntos de A en X es un filtro, llamado el *filtro principal generado por* A.

Nótese que si $A \in \mathcal{F}$ para un filtro $\mathcal{F}$, entonces $\uparrow A \subseteq \mathcal{F}$; en consecuencia, la demostración de la siguiente proposición es inmediata.

Proposición 8.4. *Para cualquier filtro* $\mathcal{F}$ *se tiene*

$$\mathcal{F} = \bigvee \{\uparrow A : A \in \mathcal{F}\},$$

con lo cual la colección de los filtros principales es sup-densa en $(Fil(X), \subseteq)$.

Entre los filtros principales se destacan los de la forma $\uparrow\{x\}$, para cada $x \in X$. Por simplicidad escribimos $\uparrow x$ en lugar de $\uparrow\{x\}$. Estos filtros resultan ser *ultrafiltros*, es decir, ultra-elementos en $(Fil(X), \subseteq)$. Es fácil demostrarlo: si $\uparrow x \subsetneq \mathcal{F} \subseteq \wp(X)$, entonces $\mathcal{F}$ contiene un $A \subseteq X$ tal que $x \notin A$. Por lo tanto, $\varnothing = A \cap \{x\} \in \mathcal{F}$, de donde $\mathcal{F} = \wp(X)$. Los ultrafiltros de la forma $\uparrow x$ se denominan, naturalmente, *ultrafiltros principales*.

Es un ejercicio sencillo demostrar que si X es finito todos sus filtros son principales y, por consiguiente, los únicos ultrafiltros son los principales. Pero si X es infinito existen ultrafiltros no principales; la demostración de este hecho requiere del lema de Zorn.

Teorema 8.5. *Sea X un conjunto cualquiera.*

1. *$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X, es decir, un ultra-elemento en $(Fil(X), \subseteq)$, si y sólo si $\mathcal{U}$ es un filtro para el cual se tiene $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$, para cada $A \subseteq X$.*
2. *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Las demostraciones de 1 y 2 son clásicas y pueden consultarse en textos como [10]. La parte 2 se demuestra con una aplicación típica del lema de Zorn. De hecho, se sabe que no es posible demostrarla sin recurrir al Axioma de Elección o a uno de sus equivalentes (véase al respecto [5]).

Proposición 8.6. *Un filtro $\mathcal{F}$ es la intersección de todos los ultrafiltros que lo contienen; es decir,*

$$\mathcal{F} = \bigcap\{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ ultrafiltro, } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}\},$$

con lo cual la colección de los ultrafiltros es inf-densa en $(Fil(X), \subseteq)$.

Demostración. Vamos a demostrar que para un filtro dado $\mathcal{F}$ se tiene

$$\mathcal{F} = \bigcap\{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ ultrafiltro, } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}\}.$$

La contenencia $\subseteq$ es inmediata. Para demostrar la contenencia $\supseteq$ razonamos por contradicción: sea $G \in \bigcap\{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ ultrafiltro, } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}\}$ y $G \notin \mathcal{F}$. Entonces $F \nsubseteq G$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y, por tanto, $\mathcal{B} = \{F \cap G^c \neq \varnothing : F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro. Sea $\mathcal{M}$ un ultrafiltro tal que $\langle\mathcal{B}\rangle \subseteq \mathcal{M}$, donde $\langle\mathcal{B}\rangle$ es el filtro generado por $\mathcal{B}$. Nótese que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ y $G^c \in \mathcal{M}$; es decir, tanto G como G^c están en $\mathcal{M}$, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 8.7. *La colección formada por los filtros principales y los ultrafiltros es un esqueleto mínimo y no-atómico de $(Fil(X), \subseteq)$.*

9. El retículo de los ideales, $\boldsymbol{Idl(X)}$

La nociones de filtro e ideal son duales; el retículo de los ideales sobre un conjunto X, $(Idl(X), \subseteq)$, es, de hecho, isomorfo con $(Fil(X), \subseteq)$.

Definición 9.1. Un *ideal* $\mathcal{I}$ sobre un conjunto no vacío X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X que satisface:

1. Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ entonces $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}$.
2. Si $I \subseteq J$ y $J \in \mathcal{I}$ entonces $I \in \mathcal{I}$.

La colección $(Idl(X), \subseteq)$ de todos los ideales sobre un conjunto X, ordenada por la relación de contenencia entre conjuntos, es un conjunto parcialmente ordenado. El elemento mínimo es $\{\varnothing\}$ y el máximo es $\wp(X)$.

Filtros e ideales están relacionados de la siguiente forma:

$$\text{Si } \mathcal{F} \text{ es un filtro, entonces } \mathcal{I} = \{A^c : A \in \mathcal{F}\} \text{ es un ideal,}$$
$$\text{Si } \mathcal{I} \text{ es un ideal, entonces } \mathcal{F} = \{A^c : A \in \mathcal{I}\} \text{ es un filtro.}$$

La correspondencia

$$\varphi : Fil(X) \longrightarrow Idl(X)$$
$$\mathcal{F} \longmapsto \varphi(\mathcal{F}) = \{A^c : A \in \mathcal{F}\}$$

es un isomorfismo ya que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ si y sólo si $\varphi(\mathcal{F}) \subseteq \varphi(\mathcal{G})$. Si $\mathcal{F}$ es un filtro principal, *i.e.*, $\mathcal{F} = \uparrow A$, con $A \subseteq X$, entonces

$$\varphi(\mathcal{F}) = \downarrow A = \{B \subseteq X : B \subseteq A\}.$$

Los ideales de la forma $\downarrow A$ se denominan *ideales principales.*

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ está caracterizado por la condición

$$A \in \mathcal{U} \text{ ó } A^c \in \mathcal{U}, \text{ para todo } A \subseteq X;$$

en consecuencia, el ideal $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{I}$ resulta caracterizado por

$$A \in \mathcal{I} \text{ ó } A^c \in \mathcal{I}, \text{ para todo } A \subseteq X.$$

Este tipo de ideales se conocen corrientemente como *ideales primos.* Con esta terminología, podemos caracterizar un esqueleto mínimo de $(Idl(X), \subseteq)$, como consecuencia directa del Corolario 8.7.

Proposición 9.2. $(Idl(X), \subseteq)$ *es un retículo completo con esqueleto mínimo (no-atómico) formado por los ideales principales y los ideales primos.*

10. El retículo de las topologías, $\boldsymbol{Top(X)}$

En esta sección abordaremos el importante retículo completo $(Top(X), \subseteq)$ de las topologías sobre un conjunto X dado.

Definición 10.1. Una *estructura topológica* o simplemente una *topología* sobre un conjunto no vacío X es una familia

$$\mathcal{G} = \{U_i : i \in I\}, \ U_i \subseteq X$$

tal que:

1. $\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{G}$ para cada $J \subseteq I$.

2. $\bigcap_{i\in F} U_i \in \mathcal{G}$ para cada subconjunto finito F de I.
3. $\varnothing \in \mathcal{G}$, $X \in \mathcal{G}$.

Esto es, $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos de X cerrada tanto para la unión arbitraria como para la intersección finita. La condición 3 es consecuencia de 1 y 2 cuando tomamos el conjunto de índices $I = \varnothing$. Los elementos de $\mathcal{G}$ se llaman *abiertos* y al par $(X, \mathcal{G})$ se le denomina un *espacio topológico*. Brevemente lo notamos X cuando no es necesario especificar explícitamente la topología $\mathcal{G}$.

La colección $(Top(X), \subseteq)$ de todas las topologías sobre un conjunto X, ordenada por la relación de contenencia entre conjuntos, es un conjunto parcialmente ordenado. El elemento máximo es la topología *discreta*, $\wp(X)$, y el elemento mínimo es la topología *indiscreta*, $\{\varnothing, X\}$.

En realidad, $(Top(X), \subseteq)$ es un retículo completo. En efecto, para cualquier colección $\{\mathcal{J}_i\}_{i\in I}$ de topologías sobre X, el ínfimo $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{J}_i$ de la colección está dado por la intersección $\bigcap_{i\in I} \mathcal{J}_i$ de las topologías, y la existencia del supremo $\bigvee_{i\in I} \mathcal{J}_i$ está garantizada por el Lema 2.1. De manera constructiva, $\bigvee_{i\in I} \mathcal{J}_i$ es la topología que tiene como subbase a la unión $\bigcup_{i\in I} \mathcal{J}_i$ de las topologías.

La existencia de infra-topologías, esto es, de infra-elementos en el retículo $(Top(X), \subseteq)$, está garantizada por la siguiente proposición.

Proposición 10.2. *Una topología $\mathcal{J}$ sobre X es una infra-topología si y sólo si es de la forma $\mathcal{J} = \{X, A, \varnothing\}$ donde $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$, $A \neq X$. Además, el conjunto $\mathcal{K}(X)$ de todas las infra-topologías es sup denso en $(Top(X), \subseteq)$.*

Demostración. La primera parte de la proposición es obvia. La densidad se sigue al observar que para una topología $\mathcal{J}$ dada se tiene

$$\mathcal{J} = \bigvee \big\{\{X, A, \varnothing\} : A \in \mathcal{J}\big\}. \quad \square$$

La existencia de ultra-topologías, esto es, de ultra-elementos en $(Top(X), \subseteq)$, no es tan obvia: ¿existen las ultra-topologías?, ¿cómo caracterizarlas? Como primer intento, tratamos de construir una topología muy cercana a $\wp(X)$ en la que todo conjunto unitario, excepto uno, sea abierto.

Definición 10.3. Para cada filtro $\mathcal{F}$ sobre X y cada elemento fijo $p \in X$ definimos la siguiente topología sobre X:

$$\mathcal{G}(p, \mathcal{F}) := \wp(X - \{p\}) \cup \mathcal{F}.$$

En esta topología los conjuntos unitarios $\{x\}$, $(x \in X)$ son abiertos siempre que $x \neq p$. También son abiertos todos los subconjuntos de X que no contienen al punto p, lo mismo que todos los subconjuntos de X que son elementos del filtro $\mathcal{F}$. Así pues, las vecindades de p son los elementos de $\mathcal{F}$ a los cuales el punto p pertenece; de modo que si queremos una topología lo más grande posible, el filtro $\mathcal{F}$ debe ser lo más grande posible, o sea un ultra-filtro.

Proposición 10.4. *Una topología de la forma $\mathcal{G}(a,\mathcal{U})$, donde $a \in X$ y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{U} \neq \uparrow a$, es una ultra-topología.*

Demostración. En efecto, si $\mathcal{G}(a,\mathcal{U}) \subsetneq \mathcal{J}$ veamos que $\mathcal{J}$ coincide con partes de X. Sea $A \in \mathcal{J}$ con $a \in A$ y $A \notin \mathcal{U}$. Por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, $A^c \in \mathcal{U}$, $A^c \cup \{a\} \in \mathcal{U}$, lo cual implica $A^c \cup \{a\} \in \mathcal{J}$. Luego la intersección de abiertos $A \cap (A^c \cup \{a\})$ es abierto y así $\{a\} \in \mathcal{J}$. Como $\wp(X - \{a\}) \in \mathcal{J}$, tenemos $\mathcal{J} = \wp(X)$. $\square$

Y podemos decir mucho más: toda ultra-topología es exactamente de la forma anterior.

Proposición 10.5. *Si $\mathcal{J}$ es una ultra-topología sobre X, entonces $\mathcal{J}$ es de la forma $\mathcal{G}(a,\mathcal{U})$ para algún $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{U} \neq \uparrow a$.*

Demostración. Si $\mathcal{J}$ es una ultra-topología sobre X, existe $a \in X$ tal que $\{a\} \notin \mathcal{J}$. El conjunto $\mathcal{V}(a)$ de las vecindades del punto a es un filtro distinto del ultrafiltro $\uparrow a$, pues $\{a\} \notin \mathcal{V}(a)$ mientras que $\{a\} \in \uparrow a$. Además, para toda V_a vecindad de a se cumple que $V_a \cap \{a\}^c \neq \varnothing$, luego el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{V_a \cap \{a\}^c : V_a \text{ es vecindad de } a\right\}$$

es base de filtro y, por tanto, el filtro $\mathcal{F}$ generado por esta base satisface que $\{a\}^c \in \mathcal{F}$. Por el Teorema 8.5, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, de donde $\{a\}^c \in \mathcal{U}$ y así $\{a\} \notin \mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{U} \neq \uparrow a$; además, como $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathcal{U}$.

Por otra parte, dado que cualquier abierto en $\mathcal{J}$ tiene o no al punto a, entonces

$$\mathcal{J} \subseteq \wp(X - \{a\}) \cup \mathcal{V}(a) \subseteq \wp(X - \{a\}) \cup \mathcal{U} = \mathcal{G}(a,\mathcal{U}),$$

y como $\mathcal{J}$ es ultra-topología tenemos $\mathcal{J} = \mathcal{G}(a,\mathcal{U})$. $\square$

Definición 10.6. Una ultra-topología generada por un ultrafiltro principal es llamada una *ultra-topología principal*. Es decir, una ultra-topología es principal si es de la forma $\mathcal{G}(x, \uparrow y)$, con $x, y \in X$, $x \neq y$.

Proposición 10.7. *El conjunto $\Lambda(X)$ de las ultra-topologías es inf denso en $(Top(X), \subseteq)$.*

Demostración. Veamos que cada topología $\mathcal{J}$ en X es el ínfimo de todas las ultra-topologías en X más finas que $\mathcal{J}$; esto es,

$$\mathcal{J} = \bigcap \left\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\right\}.$$

En efecto, asumamos que $\mathcal{J} \neq \wp(X)$. Claramente

$$\mathcal{J} \subseteq \bigcap \left\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\right\}.$$

Para la otra contenencia,

$$\bigcap\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\} \subseteq \mathcal{J},$$

tomemos $A \notin \mathcal{J}$ y veamos que $A \notin \bigcap\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\}$. Para ello verifiquemos que existe al menos un elemento de la colección que no contiene a A. Como $A \notin \mathcal{J}$, existe $a \in A$ que no es punto interior de A. Por tanto, toda vecindad V_a de a satisface $V_a \cap A^c \neq \varnothing$. Así, el conjunto

$$\mathcal{B} = \{V_a \cap A^c : V_a \text{ es vecindad de } a\},$$

es una base de filtro y por tanto el filtro $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$ generado por esta base satisface que $A^c \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}$, esto es, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ contiene a todas las vecindades de a, $\mathcal{J} \subseteq \wp(X - \{a\}) \bigcup \mathcal{U} = \mathcal{G}(a,\mathcal{U})$. Y como $A^c \in \mathcal{U}$, entonces $A \notin \mathcal{U}$ con lo cual

$$A \notin \bigcap\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\}. \quad \square$$

Corolario 10.8. *$\mathcal{K}(X) \cup \Lambda(X)$ es el esqueleto atómico de $(Top(X), \subseteq)$.*

11. El retículo de las topologías de Alexandroff, $\boldsymbol{\mathcal{A}(X)}$

Definición 11.1. Una topología sobre X se llama *principal* si es intersección de ultra-topologías principales, es decir, intersección de topologías de la forma $\mathcal{G}(x, \uparrow y)$, con $x, y \in X$. Denotamos por $\Pi(X)$ al conjunto de las topologías principales sobre X.

En particular, cada ultra-topología principal $\mathcal{G}(p, \uparrow q)$, $p \neq q$, es una topología principal; en este caso, cada abierto que contiene a p también contiene a q pues las únicas vecindades de p están en $\uparrow q$, o sea, $\mathcal{V}(p) \subseteq \mathcal{V}(q)$. Esto significa que las topologías principales no pueden ser T_1. Tampoco satisfacen los axiomas de separación T_i $(i = 2, 3, 4)$, ya que cuando son T_1 automáticamente se convierten en la discreta.

Las topologías principales tienen una útil caracterización: son exactamente las topologías de Alexandroff, definidas a continuación.

Definición 11.2. Se dice que una topología es una *topología de Alexandroff* si la intersección arbitraria de abiertos es de nuevo un abierto.

La demostración de que las topologías principales coinciden con las de Alexandroff puede consultarse en [7].

Mostraremos a continuación que el retículo $(\Pi(X), \subseteq)$ de las topologías principales (*i.e.* de Alexandroff) es completo, estableciendo un anti-isomorfismo entre el retículo $(Pre(X), \subseteq)$ de los pre-órdenes y $(\Pi(X), \subseteq)$.

Proposición 11.3. *Dada una topología principal $\mathcal{J}$ la relación $R_{\mathcal{J}} \subseteq X \times X$ definida por*

$$xR_{\mathcal{J}}y \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow y),$$

es una relación de preorden sobre X.

Demostración. Claramente $xR_{\mathcal{J}}x$ pues $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow x)$ siendo ésta última la topología discreta. Por tanto, la relación es reflexiva.

Si $xR_{\mathcal{J}}y$ y $yR_{\mathcal{J}}z$ veamos que $xR_{\mathcal{J}}z$. Como $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow y)$, todo abierto U_x que tiene a x también tiene a y. Similarmente, como $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(y, \uparrow z)$ todo abierto U_y tiene a z, de donde todo abierto en $\mathcal{J}$ que tiene a x también tiene a z y así $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow z)$. Esto muestra que la relación es transitiva. □

Nótese que el preorden $R_{\mathcal{J}}$ coincide con el llamado *preorden S de especialización:*

$$(x, y) \in S \text{ si y sólo si } x \in \overline{\{y\}}.$$

Procediendo en la otra dirección, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 11.4. *Cada relación de preorden $R \subseteq X \times X$ induce una topología principal $\mathcal{J}_R$.*

Demostración. $\mathcal{J}_R$ se define como

$$\mathcal{J}_R = \bigcap\{\mathcal{G}(x, \uparrow y) : xRy\},$$

que es, por definición, una topología principal. □

Proposición 11.5. *El retículo $(\Pi(X), \subseteq)$ de las topologías principales sobre X es anti-isomorfo al retículo $(Pre(X), \subseteq)$ de los pre-órdenes en X.*

Demostración. Las funciones

$$\eta : \Pi(X) \longrightarrow Pre(X) \quad \text{y} \quad \psi : Pre(X) \longrightarrow \Pi(X)$$

definidas por $\eta(\mathcal{J}) = R_{\mathcal{J}}$ y $\psi(R) = \mathcal{J}_R$ son mutuamente inversas en el sentido que $\eta(\psi(R)) = R$ para todo $R \in Pre(X)$, y $\psi(\eta(\mathcal{J})) = \mathcal{J}$ para todo $\mathcal{J} \in \Pi(X)$.

Como $x\ R_{\mathcal{J}}y$ si y sólo si $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow y)$ tenemos que, si $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2$ entonces $(x, y) \in R_{\mathcal{J}_2}$ lo que implica $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow y)$ y así $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow y)$, con la cual $(x, y) \in R_{\mathcal{J}_1}$, luego $R_{\mathcal{J}_1} \supseteq R_{\mathcal{J}_2}$.

Por otra parte, $R_1 \subseteq R_2$ implica $\mathcal{J}_{R_1} \supseteq \mathcal{J}_{R_2}$ ya que

$$\bigcap\{\mathcal{G}(x, \uparrow y) : xR_1y\} \supseteq \bigcap\{\mathcal{G}(x, \uparrow y) : xR_2y\}.$$

Esto comprueba que la correspondencia es un anti-isomorfismo. □

Por la proposición anterior, $(\Pi(X), \subseteq)$ es un retículo completo. Es importante anotar que el retículo $(\Pi(X), \subseteq)$ es completo con respecto a sí mismo pero no es completo como sub-retículo de $(Top(X), \subseteq)$, ya que puede suceder que si $\mathcal{H}$ es una determinada familia de topologías principales, $\bigvee_{Top(X)} \mathcal{H}$ no sea una topología principal y $\bigvee_{Top(X)} \mathcal{H} \neq \bigvee_{\Pi(X)} \mathcal{H}$. En efecto, sea $\mathcal{J}$ una ultra-topología T_1, $\mathcal{J} \neq \wp(X)$, *i.e.*, $\mathcal{J} = G(x,\mathcal{U})$ con $x \in X$, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, $\mathcal{U} \neq \uparrow\! x$. Sabemos que

$$\mathcal{J} = \bigvee_{Top(X)} \big\{\{X, A, \varnothing\} : A \in \mathcal{J}\big\}$$

y que cada topología $\mathcal{H}_A = \{X, A, \varnothing\}$ es principal. Sea $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_A : A \in \mathcal{J}\}$; obviamente,

$$\mathcal{J} = \bigvee_{Top(X)} \mathcal{H} \leq \bigvee_{\Pi(X)} \mathcal{H}.$$

Pero $\bigvee_{\Pi(X)} \mathcal{H}$ es más fino que una topología T_1, luego debe ser T_1, es decir, $\bigvee_{\Pi(X)} \mathcal{H} = \wp(X) \neq \mathcal{J}$. En conclusión, $\bigvee_{Top(X)} \mathcal{H} \neq \bigvee_{\Pi(X)} \mathcal{H}$.

Proposición 11.6. *Las infra-topologías y las ultra-topologías principales forman el esqueleto atómico del retículo completo* $(\Pi(X), \subseteq)$ *de las topologías principales (i.e., el retículo* $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$ *de las topologías de Alexandroff).*

Demostración. El esqueleto lo obtenemos por medio del anti-isomorfismo $\psi : Pre(X) \longrightarrow \Pi(X)$ de la Proposición 11.5: los infra-elementos de $Pre(X)$ son enviados en los ultra-elementos de $\Pi(X)$ y, dualmente, los ultra-elementos de $Pre(X)$ son enviados en los infra-elementos de $\Pi(X)$.

Para el preorden $R = \Delta_{(a,b)} = \Delta(X) \cup \{(a, b)\}$, $a \neq b$, tenemos

$$\eta(R) = \bigcap \big\{\mathcal{G}(x, \uparrow\! y) : xRy\big\} = \mathcal{G}(a, \uparrow\! b),$$

así que las ultra-topologías principales $\mathcal{G}(a, \uparrow\! b)$, $a, b \in X$, $a \neq b$, son los ultra-elementos de $(\Pi(X), \subseteq)$.

Por otra parte, para el preorden $R = (A^c \times X) \cup (X \times A)$, tenemos

$$\eta(R) = \bigcap \big\{\mathcal{G}(x, \uparrow\! y) : xRy\big\} = \bigcap \big\{\mathcal{G}(x, \uparrow\! y) : x \notin A \vee y \in A\big\} = \{\varnothing, A, X\}$$

Para establecer la última igualdad, observamos primero que la contenencia $\supseteq$ es inmediata. Para la contenencia $\subseteq$, basta demostrar que para todo $B \notin \{\varnothing, A, X\}$ existe un $x \notin A$ o un $y \in A$ de tal forma que $B \notin \mathcal{G}(x, \uparrow\! y)$.

Sea $B \neq \varnothing$, $B \neq X$ y $B \neq A$. Distinguimos dos casos, $B \subseteq A$ y $B \nsubseteq A$; en el primer caso, escogemos $x \in B$ y $y \in A - B$. En el segundo caso, escogemos $x \in B - A$ y $y \notin B$. En cualquiera de los dos casos concluimos que $B \notin \mathcal{G}(x, \uparrow\! y)$.

Esto demuestra que los infra-elementos de $(\Pi(X), \subseteq)$ son las infra-topologías. □

12. El retículo de las topologías boolenas, $\boldsymbol{Bool(X)}$

Las *topologías booleanas* son aquéllas que tienen como base una partición de X. En particular, cada una de estas topologías resulta ser de Alexandroff. En esta sección mostraremos que el conjunto ordenado $(Bool(X), \subseteq)$ de las topologías booleanas es anti-isomorfo al retículo $(Equiv(X), \subseteq)$ de las relaciones de equivalencia sobre X, y exhibiremos su esqueleto atómico.

Proposición 12.1. *Cada relación de equivalencia R sobre X define una topología booleana $\mathcal{J}_R$.*

Demostración. $\mathcal{J}_R$ tiene como base la colección $X/R = \{[a] : a \in X\}$ de las clases de equivalencia de R. Como la base es una partición de X, $\mathcal{J}_R$ es una topología booleana. □

Proposición 12.2. *Dada una topología (no necesariamente booleana) $\mathcal{J}$, la relación $R_{\mathcal{J}}$ definida por*

$$xR_{\mathcal{J}}y \Longleftrightarrow \mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow y) \ \& \ \mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}(y, \uparrow x),$$

o de manera equivalente

$$xR_{\mathcal{J}}y \Longleftrightarrow x \in \overline{\{y\}} \ \& \ y \in \overline{\{x\}},$$

es una relación de equivalencia sobre X.

Demostración. $R_{\mathcal{J}}$ es claramente reflexiva pues $x \in \overline{\{x\}}$. La simetría de $R_{\mathcal{J}}$ es inmediata. Para demostrar la transitividad, sean $x, y, z \in X$ tales que $xR_{\mathcal{J}}y$ y $yR_{\mathcal{J}}z$. Veamos que $xR_{\mathcal{J}}z$: dada una vecindad V_x se debe tener que $z \in V_x$. En efecto, existe una vecindad abierta U_x con $U_x \subseteq V_x$ y como $y \in U_x$, entonces U_x es vecindad de y; por tanto, $z \in U_x \subseteq V_x$. De manera similar se demuestra que $z \in \overline{\{x\}}$. □

Proposición 12.3. *El conjunto ordenado $(Bool(X), \subseteq)$ de las topologías booleanas sobre X es anti-isomorfo al retículo $(Equiv(X), \subseteq)$ de las relaciones de equivalencia sobre X.*

Demostración. Las funciones

$$\psi : Equiv(X) \longrightarrow Bool(X) \ \text{ y } \ \eta : Bool(X) \longrightarrow Equiv(X)$$

definidas por $\eta(\mathcal{J}) = R_{\mathcal{J}}$ y $\psi(R) = \mathcal{J}_R$ son mutuamente inversas en el sentido que $\eta(\psi(R)) = R$ para toda relación de equivalencia R, y $\psi(\eta(\mathcal{J})) = \mathcal{J}$ para toda topología booleana $\mathcal{J}$. Además,

$$R \subseteq S \Longleftrightarrow \psi(R) = \mathcal{J}_R \subseteq \mathcal{J}_S = \psi(S),$$

para relaciones de equivalencia R y S cualesquiera. □

Por la proposición anterior, $(Bool(X), \subseteq)$ es un retículo completo. Sus infra-elementos corresponden a los ultra-elementos de $(Equiv(X), \subseteq)$; es decir, los infra-elementos son las topologías de la forma $\{\varnothing, A, A^c, X\}$, para cada $A \subseteq X$. Los ultra-elementos de $(Bool(X), \subseteq)$ son las imágenes por el anti-isomorfismo ψ de las relaciones $\Delta_{(a,b)} = \Delta(X) \cup \{(a, b), (b, a)\}$ con $a, b \in X$, $a \neq b$, las cuales son las topologías de la forma $\mathcal{G}(a, \uparrow b) \cap \mathcal{G}(b, \uparrow a)$ con $a, b \in X$, $a \neq b$.

Resumimos lo anterior en el siguiente corolario.

Corolario 12.4. *El retículo* $(Bool(X), \subseteq)$ *tiene esqueleto atómico formado por las topologías de la forma* $\{\varnothing, A, A^c, X\}$*, con* $A \subseteq X$*,* $A \notin \{\varnothing, X\}$*, y las topologías principales de la forma* $\mathcal{G}(a, \uparrow b) \cap \mathcal{G}(b, \uparrow a)$*, con* $a, b \in X$*,* $a \neq b$*.*

Bibliografía

[1] R. De Castro, R. & G. Rubiano, *Una revisión del completamiento de Dedekind-McNeille*, Miscelánea matemática, SMM, **37** (2003), 65–76.

[2] H. Cartan, *Théorie des filtres*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **205** (1937), 595–598.

[3] B. A. Davey & H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990.

[4] O. Fröhlich, *Das Halbordnungssystem der topologischen Räume auf einer Menge*, Math. Ann. **156** (1964), 79–95.

[5] K. Hrbacek & T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Third Edtion, Marcel Deckker, 1999.

[6] J. Hartmanis, *On the lattice of topologies*, Can. J. Math. **10** (1958), 547–553.

[7] H. Lorrain, *Notes on topological spaces with minimun neighborhoods*, Amer. Math. Monthly, **76** (1969), 616–627.

[8] A. K. Steiner, *The lattice of topologies: structure and complementation*, Trans. Amer. Math. Soc., **122** (1966), 379–398.

[9] W. Thron & S. Andima, *Order induced topological properties*, Pacific Journal of Math., **75** no. 2 (1978), 297–318.

[10] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.