Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XI No. 1 (2004), pp. 132–137

PUNTOS FIJOS COMUNES DE CONTRACCIONES GENERALIZADAS

JAIME RODRÍGUEZ MONTES (*)

To Jairo Charris in memoriam

RESUMEN. Se demuestra un teorema de punto fijo común para contracciones generalizadas S y T definidas en subconjuntos convexos y cerrados de un espacio de Banach, el cual generaliza un resultado de Rhoades [3] y de Ume y otros [5].

1. INTRODUCCIÓN

Ishikawa [2] introdujo en 1974 un proceso iterativo para construir puntos fijos de aplicaciones no lineales definidas en espacios de Banach el cual ha sido estudiado por algunos autores. En ese mismo año Ćirić [1] demostró que si (X, d) es un espacio métrico completo y $T : X \longrightarrow X$ es una aplicación tal que $d(Tx, Ty) \leq \alpha \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$ para todo $x, y \in X$, donde $0 \leq \alpha < 1$, entonces, para todo $x_0 \in X$, la sucesión $x_n = T^n x_0$, $n \geq 1$, converge a un único punto fijo de T. Rhoades [3] extendió el teorema anterior a contracciones generalizadas en espacios de Banach, usando un proceso iterativo más general que el de Ishikawa.

Teorema 1.1 ([3]). *Sea C un subconjunto convexo cerrado no vacío de un espacio de Banach X y $T : C \longrightarrow C$ una aplicación tal que*

$$\|Tx - Ty\| \leq \phi\left(\max\left\{\|x - y\|, \|x - Tx\|, \|y - Ty\|, \|x - Ty\|, \|y - Tx\|\right\}\right)$$

para todo $x, y \in X$, donde la función $\phi : \mathbb{R}^+ = [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisface las condiciones

a) $0 < \phi(t) < t$ *para todo* $t > 0$ *y* $\phi(0) = 0$.
b) ϕ *es no decreciente (es decir, si* $t < t'$ *entonces* $\phi(t) \leq \phi(t')$ *en* $(0, \infty)$*).*
c) $g(t) = \frac{t}{t - \phi(t)}$ *es no creciente en* $(0, \infty)$ *y* $C_0(A)$ *es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a* A.

(*) Jaime Rodríguez Montes. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.

Sea (α_n) una sucesión tal que $0 \leq \alpha_n < 1$, $n \geq 0$ y $\sum \alpha_n = +\infty$. Entonces la sucesión (x_n) definida por

$$\begin{aligned} x_0 &\in C \\ y_n &\in C_0\left(\{x_i\}_{i=0}^n \bigcup \{Tx_i\}_{i=0}^n\right),\ n \geq 0, \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n,\ n \geq 0, \end{aligned}$$

converge a un único punto fijo x de S.

Posteriormente, J. Ume, K. Kim y T. Kim [5] extendieron el anterior resultado a dos aplicaciones. Ellos demostraron:

Teorema 1.2 ([5])**.** *Sea C un subconjunto convexo cerrado no vacío de un espacio de Banach X, S y $T : C \longrightarrow \mathbb{C}$ dos aplicaciones tales que*

$$\text{máx}\{\|Sx - Sy\|, \|Tx - Ty\|, \|Sx - Ty\|\} \leq \phi(M(x,y)) \tag{1}$$

para todo $x, y \in C$, donde

$$\begin{aligned} M(x,y) = \text{máx}\{&\|x-y\|, \|x-Sx\|, \|y-Sy\|, \|x-Sy\|, \|y-Sx\|, \|x-Tx\|, \\ &\|y-Ty\|, \|x-Ty\|, \|y-Tx\|, \|Sx-Tx\|, \|Sy-Ty\|\} \end{aligned}$$

y ϕ satisface a), b) *y* c)*. Supóngase además que $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ y $1-\alpha_n-\beta_n > 0$ para todo n y que $\sum \alpha_n = +\infty$. Entonces la sucesión (x_n) definida por*

$$\begin{aligned} x_0 &\in C \\ y_n &\in C_0\left(\{x_i\}_{i=0}^n \bigcup \{Sx_i\}_{i=0}^n \bigcup \{Tx_i\}_{i=0}^n\right), \quad n \geq 0 \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n-\beta_n)x_n + \alpha_n S y_n + \beta_n T y_n, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

converge a un único punto fijo común de S y T.

En este artículo definiremos un proceso iterativo más “eficiente” que el anterior y flexibilizaremos algunas condiciones sobre las funciones ϕ y g obteniendo los mismos resultados. Veremos que bajo estas hipótesis más débiles, el proceso del Teorema 1.2 conduce todavía a un punto fijo común de S y T.

2. Definiciones y resultados básicos

Definición 2.1. Una función $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es ∞-contractiva si $0 < \phi(t) < t$ para todo $t > 0$, $\phi(0) = 0$ y existen $N > 0$ y $0 < \alpha < 1$ tales que $\phi(t) \leq \alpha t$ para todo $t \geq N$.

Definición 2.2. Una función $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisface la condición (A) si para toda sucesión decreciente (t_n) en $\mathbb{R}^+$ (es decir, $t_{n+1} < t_n$ para todo $n \geq 1$), tal que $\text{lím}\, \phi(t_n) = \text{lím}\, t_n = t_n$ se tiene que $t = 0$.

Proposición 2.1. *Sea $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función. Entonces, son equivalentes:*

1. *Existen* $M > 0$ *y* $N > 0$ *tales que* $g(t) \leq M$ *para todo* $t \geq N$*, donde* $g(t) = \frac{t}{t-\phi(t)}$, $t > 0$.
2. *Existen* $N > 0$ *y* $0 < \alpha < 1$ *tales que* $\phi(t) \leq \alpha t$ *para todo* $t \geq N$*.*

Demostración. Si 1. se verifica, seleccionamos $M_1 \geq M$, $M_1 > 1$. Entonces $g(t) \leq M_1$ para todo $t \geq N$ si y sólo si $1 - \frac{\phi(t)}{t} \geq \frac{1}{M_1}$ para todo $t \geq N$, es decir $\phi(t) \leq \alpha t$ para todo $t \geq N$, donde $0 < \left(1 - \frac{1}{M_1}\right) = \alpha < 1$, y 2. se satisface. $\square$

Denotaremos con Φ el conjunto de las aplicaciones ∞-contractivas ϕ de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ que satisfacen la condición (A).

Teorema 2.1. *Sea* C *un subconjunto convexo cerrado no vacío de un espacio de Banach* X*,* S *y* $T : C \longrightarrow C$ *aplicaciones tales que*

$$\text{máx}\,\{\|Sx - Sy\|, \|Tx - Ty\|, \|Sx - Ty\|\} \leq \phi(N(x,y)), \quad x, y \in C, \tag{2}$$

donde

$$\begin{aligned} N(x,y) = \text{máx}\,\{&\|x-y\|, \|x-Sx\|, \|y-Sy\|, \|x-Sy\|, \|y-Sx\| \\ &\|x-Tx\|, \|y-Ty\|, \|x-Ty\|, \|y-Tx\|\} \end{aligned}$$

y $\phi \in \Phi$ *es no decreciente.*

Entonces, para todo $x_0 \in C$*, la sucesión* (x_n) *de* C *definida por*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(Sx_n + Tx_n), \quad n \geq 0, \tag{3}$$

converge a un único punto fijo común de S *y* T*.*

Demostración. Probaremos que la sucesión (δ_n), con $\delta_n = d(A_n)$ (diámetro de A_n) y

$$A_n = \{x_i\}_{i=0}^n \bigcup \{Sx_i\}_{i=0}^n \bigcup \{Tx_i\}_{i=0}^n, \quad n \geq 0$$

es acotada.

A partir de (2) se deduce que para todo $0 \leq i, j \leq n$, si $N(x_i, x_j) > 0$, entonces

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \text{máx}\{\|Sx_i - Sx_j\|, \|Tx_i - Tx_j\|, \|Sx_i - Tx_j\|\} \\ &\leq \phi(N(x_i, x_j)) < N(x_i, x_j) \leq \delta_n \end{aligned} \tag{4}$$

y de (3), que para todo $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - Sx_j\| &= \|\frac{1}{2}(Sx_i + Tx_i) - Sx_j\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|Sx_i - Sx_j\| + \|Tx_i - Sx_j\|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(N_{ij} + N_{ij}\right) = N_{ij} < \delta_n, \end{aligned} \tag{5}$$

y similarmente

$$\|x_{i+1} - Tx_j\| \leq N_{ij} < \delta_n \tag{6}$$

Se deduce de (4), (5) y (6) que existe $0 \leq i \leq n$, ó existe $0 \leq j \leq n$ tal que $\delta_n = \text{máx}\{\|x_0 - Sx_i\|, \|x_0 - Tx_j\|\}$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\delta_n = \|x_0 - Sx_i\|$. Entonces $\|x_0 - Tx_0\| > 0$, y de (2)

$$\begin{aligned}\delta_n &\leq \|x_0 - Tx_0\| + \|Tx_0 - Sx_i\| \leq \|x_0 - Tx_0\| + \phi(N(x_0, x_i)) \\ &= \|x_0 - Tx_0\| + \phi(\delta_n),\end{aligned}$$

es decir (como en [5])

$$\frac{\delta_n - \phi(\delta_n)}{\delta_n} \leq \frac{\|x_0 - Tx_0\|}{\delta_n},$$

o sea,

$$\delta_n \leq \|x_0 - Tx_0\| g(\delta_n). \tag{7}$$

Como $\phi \in \Phi$, la Proposición 2.1 y (7) garantizan que la sucesión no decreciente (δ_n) es acotada y existe $k > 0$ tal que $\delta_n \leq k$ para todo $n \geq 0$.

Sea

$$B_n = \{x_i\}_{i \geq n} \bigcup \{Sx_i\}_{i \geq n} \bigcup \{Tx_i\}_{i \geq n}, \quad n \geq 0;$$

entonces, como anteriormente,

$$r_n = d(B_n) = \text{máx}\left\{\sup\{\|x_n - Sx_i\|,\ i \geq n\}, \sup\{\|x_n - Tx_i\|,\ i \geq n\}\right\} \leq k$$

para todo $n \geq 0$.

Como ϕ es no decreciente, se deduce de (2) y (3) que para todo $i \geq n+1$,

$$\|x_{n+1} - Sx_i\| \leq \frac{1}{2}\left(\|Sx_n - Sx_i\| + \|Tx_n - Sx_i\|\right) \leq \phi(N(x_n, x_i)) \leq \phi(r_n)$$

y similarmente $\|x_{n+1} - Tx_i\| \leq \phi(r_n)$, por lo tanto, $r_{n+1} \leq \phi(r_n) < r_n$ para todo $n \geq 0$ y $\text{lím}\, r_n = \text{lím}\, \phi(r_n) = r$; y dado que ϕ satisface la condición (A), $r = 0$.

De la definición de r_n se deduce que la sucesión (x_n) es de Cauchy en C y además que $\text{lím}\,\|x_n - Sx_n\| = \text{lím}\,\|x_n - Tx_n\| = 0$. La completez de C garantiza la existencia de $x \in C$ tal que $\text{lím}\, x_n = \text{lím}\, Sx_n = \text{lím}\, Tx_n = x$.

Sea $d = \text{máx}\{\|x - Sx\|, \|x - Tx\|\}$. Afirmamos que $d = 0$, pues en caso contrario, hay dos posibilidades. La primera, que exista $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{máx}\{\|x_n - Sx\|, \|x_n - Tx\|\} \leq d$ para todo $n \geq N$; entonces, de (2)

$$\begin{aligned}&\text{máx}\{\|Sx - Sx_n\|, \|Tx - Tx_n\|\} \\ &\quad \leq \phi(\text{máx}\{\|x - Sx\|, \|x - Tx\|, \|x_n - Sx\|, \|x_n - Tx\|\}) = \phi(d),\end{aligned}$$

para n suficientemente grande, por lo tanto, al hacer $n \longrightarrow \infty$, obtenemos que $d \leq \phi(d) < d$, lo cual es absurdo. La segunda posibilidad garantiza que para infinitos $n \in \mathbb{N}$, $\max\{\|x_n - Sx\|, \|x_n - Tx\|\} > d$, lo cual asegura la existencia de subsucesiones decrecientes (s_{n_k}) ó (t_{n_k}), $s_{n_k} = \|x_{n_k} - Sx\|$, $t_{n_k} = \|x_{n_k} - Tx\|$, $k \geq 1$, tales que $m_k = \max\{s_{n_k}, t_{n_k}\}$ converge a d. Nuevamente, de (2)

$$\max\left\{\|Sx - S_{x_{n_k}}\|, \|Tx - Tx_{n_k}\|\right\} \leq \phi(m_k) < m_k,$$

para k suficientemente grande, de lo cual

$$\lim m_k = \lim \phi(m_k) = d,$$

y dado que ϕ satisface la condición (A), $d = 0$, lo cual es absurdo. Se concluye entonces que $d = 0$ y x es un punto fijo común de S y T.

Supóngase ahora que para algún par i, j $0 \leq i, j \leq n$, $N(x_i, x_j) = 0$. Entonces, de (2), $x_i = x_j$ y x_i es un punto fijo común de S y T y la sucesión (x_n), $x_n = x_i$ converge a x_i.

Desde que la unicidad se deduce fácilmente de (2) y del hecho de que $\phi(t) < t$ para todo $t > 0$, el teorema queda demostrado. $\square$

Nota. El teorema 1.2 se puede deducir del anterior. En efecto, si en (1) tomamos $x = y$, entonces

$$M(x, x) = \max\{\|x - Sx\|, \|x - Tx\|, \|Sx - Tx\|\} = \max\{\|x - Sx\|, \|x - Tx\|\}$$

y

$$M(y, y) = \max\{\|y - Sy\|, \|y - Ty\|, \|Sy - Ty\|\} = \max\{\|y - Sy\|, \|y - Ty\|\},$$

por lo tanto $M(x, y) = N(x, y)$ para todo $x, y \in C$ y se verifica (2) del Teorema 2.1. Ahora, si (t_n) es una sucesión decreciente en $\mathbb{R}^+$ tal que $\lim t_n = \lim Q(t_n) = t$, al suponer que $t > 0$ se deduce, a partir de (c) que $g(t) = \frac{t}{t - Q(t)} \geq \frac{t_n}{t_n - Q(t_n)} = g(t_n)$, $n \geq 1$, y al hacer $n \longrightarrow \infty$, que $g(t) = +\infty$, lo cual es absurdo. Por lo tanto Q satisface la condición (A). De la misma (c) se deduce que existen $M > 0$ y $N > 0$ tales que $g(t) \leq M$ para todo $t \geq N$, y la Proposición 2.1 garantiza que $Q \in \Phi$.

Por último, las desigualdades $\delta_n \leq \|x_0 - Tx_0\| g(\delta_n)$ (pg 390) y $r_n \leq (1 - \alpha_{n-1} - \beta_{n-1}) r_{n-1} + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) Q(r_{n-1})$ (pg 341) en [5], garantizan, la primera, que (δ_n) es una sucesión acotada (sin ser $g(t)$ no decreciente) y la segunda, que la sucesión (r_n) es decreciente y además que $\lim r_n = \lim \phi(r_n) = r$. Como $Q \in \Phi$, $r = 0$.

Lo anterior demuestra que, efectivamente, el Teorema 1.2 es consecuencia del Teorema 2.1, y el requisito de que $\sum \alpha_n = +\infty$ es innecesario. Es conveniente observar que la demostración en [5], de que $Sz = Tz = z$, es incorrecta.

Referencias

[1] L.B. Ćirić, *A generalization of Banach's principle*, Proc. Amer. Math. Soc., **45** (1974), 267-273.

[2] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc., **44** (1974), 147-150.

[3] B.E. Rhoades, *Convergence of an Ishikawa-Type iteration scheme for generalized contraction*, J. Math. Anal. Appl., **185** (1994), 350-355.

[4] J. Rodríguez Montes and J.A. Charris, *Fixed point for contractive and expansive maps in metric spaces: Toward a unified approach*, Internat. J. Appl. Math., **vol 7**, No. 2 (2001).

[5] J. S. Ume, K. H. Kim and T. H. Kim, *Common fixed point theorems for a generalized contraction*, Math. Japonica, **46**, No. 3 (1997), 387-392.