Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 2 (2003), pp. 76–83

TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS DE FUNCIONES

MAURICIO RESTREPO LÓPEZ (*)

Resumen. El objeto fundamental de este artículo es presentar condiciones que permitan definir una topología sobre los conjuntos $\hom(X, Y)$ de morfismos entre dos objetos de una categoría, que ponga de manifiesto la adjunción imagen directa - imagen inversa. La construcción se hace en primer lugar sobre conjuntos de funciones continuas, mediante la topología compacto-abierta, luego se generaliza usando un par de colecciones de subconjuntos que son estables por imagen directa e imagen inversa, respectivamente. Finalmente se reemplaza la adjunción imagen directa - imagen inversa por una adjunción general y se muestra que la construcción es posible, a partir de cualquier funtor sobre la categoría de *Ore*.

Abstract. This paper gives conditions leading to the definition of a topology on the set $\hom(X, Y)$ of morphisms between two objects of a category, in such a manner that the direct image - inverse image adjunction becomes apparent. The construction is made first on sets of continuous functions, by means of the open compact topology, then a generalization is obtained by means of a couple of collections of subsets stable under direct image and inverse image, respectively. Finally, the direct image - inverse image adjunction is replaced by a general adjunction and it is shown that the construction can be achieved by resorting to any functor on the *Ore* category.

Palabras clave: Categorías, Funtores, Topología Compacto-abierta.

Key Words: Categories, Functors, Compact-open topology.

2000 Mathematics Subject Classifications: 54C35, 54A10.

(*) Mauricio Restrepo López. Universidad Nacional de Colombia. Maestría en Matemáticas
e-mail: mauricio.restrepo@unisabana.edu.co
Una versión preliminar de este artículo fue presentada en el XIV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, en la Universidad Pedagógica Nacional, en junio de 2003.

0. El funtor hom.

En análisis funcional son importantes las topologías que se pueden definir sobre los conjuntos de funciones. Son conocidas la topología de la convergencia puntual y la topología de la convergencia sobre compactos, ambas casos particulares de la topología compacto abierta [5].

Para nuestro estudio comenzaremos con una categoría pequeña $\mathbb{D}$ a partir de la cual se define una nueva categoría $\mathbb{C}_{\mathbb{D}} = \mathbb{D}^0 \times \mathbb{D}$ cuyos objetos son pares de objetos (X, Y) de la categoría $\mathbb{D}$. Un morfismo de un objeto (X, Y) en otro objeto (X_1, Y_1), está formado por un par de morfismos (u, v) de $\mathbb{D}$, definidos en la forma: $u : X_1 \to X$ y $v : Y \to Y_1$, como se muestra en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} (X,Y) \arrow[d, "(u,v)"'] & X & Y \arrow[d, "v"] \\ (X_1,Y_1) & X_1 \arrow[u, "u"] & Y_1 \end{tikzcd}$$

La composición de dos morfismos se hace componente a componente, en forma contravariante en la primera y en forma covariante en la segunda.
Definimos el funtor hom : $\mathbb{C}_{\mathbb{D}} \to Conj$ en la siguiente forma: hom aplicado a un objeto (X, Y) es el conjunto $\hom(X, Y)$ de morfismos de X en Y en la categoría $\mathbb{D}$. La imagen de un morfismo (u, v) mediante el funtor es la función $(u, v)_\#$ definida mediante la relación:

$$(u, v)_\#(f) = vfu.$$

Para cada A, objeto fijo de $\mathbb{D}$, queda definido un funtor contravariante h_A de la categoría $\mathbb{D}$ en la categoría de los conjuntos mediante $h_A(Y) = \hom_{\mathbb{D}}(Y, A)$. Para un morfismo $u : Y \longrightarrow Y'$, $h_A(u)$ es la función de $\hom_{\mathbb{D}}(Y', A)$ en $\hom_{\mathbb{D}}(Y, A)$ que envía v en vu. Similarmente si B es un objeto fijo de la primera variable, se obtiene el funtor covariante $h_B(Y) = \hom_{\mathbb{D}}(B, Y)$. De esta manera, hom es un bi-funtor que al fijar cada una de sus variables da lugar a los funtores de morfismos, conocidos en la teoría de homología.

1. Funciones Continuas.

Como caso particular, estudiamos la categoría $\mathbb{C}_{Top}$ que se construye con los espacios topológicos como categoría base y se define una topología apropiada sobre los conjuntos de morfismos $\hom(X, Y)$.

1.1. Construcción en Top. Sea Top la categoría de espacios topológicos y $\mathbb{C}_{Top}$ la categoría cuyos objetos son parejas de espacios topológicos (X, Y). Un morfismo entre dos pares de espacios topológicos (X, Y) y (X_1, Y_1) es un par (u, v) de funciones continuas definidas en la forma: $u : X_1 \to X$ y $v : Y \to Y_1$.

En este caso $\hom(X,Y)$ es el conjunto de funciones continuas de X en Y y la imagen de (u,v) es la función $(u,v)_\#$ definida por $(u,v)_\#(f) = vfu$.

$$\begin{tikzcd} \hom\,(X,Y) \arrow[d, "(u,v)_\#"] \\ \hom\,(X_1,Y_1) \end{tikzcd}$$

La función $(u,v)_\#(f) = vfu$ es continua por ser la composición de funciones continuas, por tanto $(u,v)_\#$ está bien definida. Es necesario definir sobre cada conjunto de la forma $\hom(X,Y)$ una topología apropiada que haga que las funciones de la forma $(u,v)_\#$ sean continuas.

1.2. La topología compacto-abierta. Supongamos que cada conjunto de la forma $\hom(X,Y)$ tiene la topología compacto-abierta, es decir la topología correspondiente a la sub-base dada por conjuntos de funciones continuas de la forma:

$$S(K,A) = \{f \in \hom(X,Y) : f(K) \subseteq A\}$$

donde K es un conjunto compacto de X y A es un abierto de Y [5].
¿Es $(u,v)_\# : \hom(X,Y) \longrightarrow \hom(X_1,Y_1)$ una función continua?
Sea $S(K',A') = \{g \in \hom(X_1,Y_1) :\ g(K') \subseteq A'\}$, un elemento de la sub-base para la topología compacto-abierta sobre $\hom(X_1,Y_1)$. Mostraremos que:

$$(u,v)_\#^{-1} S(K',A') = S(u(K'), v^{-1}(A')).$$

Recordemos que si u es una función continua y K' es un compacto de X_1, entonces $u(K')$ es un compacto en Y_1, además si A' un abierto de Y, $v^{-1}(A')$ es un abierto de X_1.
Sea f una función continua tal que $g = vfu \in S(K',A')$. Veremos que $f[u(K')] \subseteq v^{-1}(A')$. Si $x \in f(u(K'))$, existe $k \in K'$ tal que $f(u(k)) = x$, entonces $v(f(u(k))) = v(x)$. Como $vfu = g$, tenemos que $g(k) = v(x)$. Puesto que $g(K') \subseteq A'$, se tiene que $v(x) \in A'$ y así $x \in v^{-1}(A')$. De esta forma tenemos que $(u,v)_\#^{-1} S(K',A') \subseteq S(u(K'), v^{-1}(A'))$.
Por otro lado si $f \in S(u(K'), v^{-1}(A'))$, entonces $f(u(K')) \subseteq v^{-1}(A')$. Tomando la imagen directa mediante v, tenemos que: $v(f(u(K'))) \subseteq v(v^{-1}(A')) \subseteq A'$. Por tanto para $g = vfu$, se tiene que $g(K') \subseteq A'$, es decir: $f \in (u,v)_\#^{-1} S(K',A')$.
Con lo anterior hemos mostrado que:

$$(u,v)_\#^{-1} S(K',A') = S(u(K'), v^{-1}(A')).$$

Nota 1.2.1. *Vale la pena destacar dos cosas: primero, lo que se logró mostrar es mucho más que la continuidad de la función $(u,v)_\#$. La función no sólo devuelve elementos de la sub-base en abiertos, sino que devuelve elementos de la* *sub-base en elementos de la sub-base respectiva; segundo, en la demostración no se usan las propiedades de los abiertos y los compactos, sino solamente el hecho de que las funciones continuas envían compactos en compactos y devuelven abiertos en abiertos. Por tanto la relación*

$$(u,v)_{\#}^{-1} S(K', A') = S(u(K'), v^{-1}(A'))$$

es válida en conjuntos con dos tipos de colecciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, donde las funciones, mediante imagen inversa, envíen elementos de las colecciones tipo $\mathcal{B}$ en elementos del mismo tipo (como sucede con los abiertos, cerrados, etc.) y mediante imagen directa envíen elementos de las colecciones tipo $\mathcal{A}$ en elementos del mismo tipo (como sucede con los compactos, conexos, etc).

1.3. Otras topologías. Lo anterior significa que es posible definir sobre los conjuntos $\hom(X,Y)$ topologías compacto-cerradas, conexo-abiertas, conexo-cerradas, etc.

Un resultado importante sobre la topología compacto-abierta se expresa mediante la siguiente afirmación:

Sea X un espacio localmente compacto. Si $\hom(X,Y)$ tiene la topología compacto-abierta, entonces la función de evaluación:

$$e : X \times \hom(X,Y) \longrightarrow Y$$

definida por $e(x,f) = f(x)$, es continua.

La demostración se basa en el hecho de que si V es una vecindad abierta de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ es vecindad abierta de x. Siendo X localmente compacto existe W, vecindad compacta de x, tal que $x \in W \subseteq f^{-1}(V)$, es decir, $f(W) \subseteq V$ o en otras palabras $f \in S(W,V)$. Ahora, siendo W una vecindad de x, existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq W$. El conjunto $U \times S(W,V)$ es un abierto de $X \times \hom(X,Y)$ y $U \times S(W,V) \subseteq e^{-1}(V)$, lo que muestra que e es una función continua [5].
Si $\hom(X,Y)$ tiene la topología conexo-abierta, el resultado anterior tiene su equivalente en la forma:

Proposición 1.3.1. *Si X es localmente conexo y $\hom(X,Y)$ tiene la topología conexo-abierta, entonces la función de evaluación:*

$$e : X \times \hom(X,Y) \longrightarrow Y$$

definida por $e(x,f) = f(x)$, es continua.

Lo que se quiere garantizar con la conexidad local es que se puede conseguir en cada vecindad U de x una vecindad conexa V contenida en U.

Respecto a los axiomas de separación se considera el siguiente resultado.

Proposición 1.3.2. $\hom(X, Y)$ *con la topología compacto-abierta es un espacio de Hausdorff sii* Y *es de Hausdorff.*

La demostración de esta proposición se basa en el hecho de que dos funciones distintas deben diferir al menos en un punto x_0, es decir $f(x_0) \neq g(x_0)$. Siendo Y de Hausdorff, es posible separar $f(x_0)$ de $g(x_0)$, mediante vecindades U y V. Los conjuntos $(\{x_0\}, U)$ y $(\{x_0\}, V)$ son vecindades de f y g disyuntas y así $\hom(X, Y)$ es de Hausdorff.
Para que $(\{x_0\}, U)$ sea un abierto (sub-básico) se usa el hecho de que $\{x_0\}$ es un conjunto compacto. Como $\{x_0\}$ también es conexo, vale la proposición siguiente.

Proposición 1.3.3. $\hom(X, Y)$ *con la topología conexo-abierta es un espacio de Hausdorff sii* Y *es un espacio de Hausdorff.*

2. Construcción en Categorías.

Elegir en cada espacio topológico las colecciones de subconjuntos compactos o conexos, equivale a tomar un subfuntor F del funtor de partes covariante $P_\bullet$ que se muestra en la siguiente figura:

$$
\begin{tikzcd}
Top \arrow[r, "O"] & Conj \arrow[r, "P_\bullet"] & Conj \\
(X,\tau) \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] & P(X) \arrow[d, "f_!"] \\
(Y,\mu) & Y & P(Y)
\end{tikzcd}
$$

El hecho de que F sea un subfuntor de $P_\bullet$ garantiza que las colecciones $F(X)$ y $F(Y)$ son estables por imagen directa. Del mismo modo, la elección de las colecciones de abiertos o cerrados (estables por imagen inversa) puede lograrse mediante un subfuntor del funtor de partes contravariante $P^\bullet$.

$$
\begin{tikzcd}
Top \arrow[r, "O"] & Conj \arrow[r, "P^\bullet"] & Conj \\
(X,\tau) \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] & P(X) \\
(Y,\mu) & Y & P(Y) \arrow[u, "f^!"']
\end{tikzcd}
$$

Definition 2.1. *Si F y G son subfuntores de los funtores de partes $P^{\bullet}$ y $P_{\bullet}$, el par (F,G) define una estructura topológica sobre* $\hom(X,Y)$*, llamada $(F,G)-$topología.*

La subbase de esta topología está dada por los conjuntos de la forma $S(K,A)$, donde $K \in F(X)$ y $A \in G(Y)$. La continuidad de las funciones $(u,v)_{\#}$ se obtiene a partir de la relación establecida en la sección 1.2.
Por ejemplo, para la categoría de los anillos conmutativos y los subfuntores F de subanillos y G de ideales primos es posible definir una estructura topológica sobre el conjunto de homomorfismos de anillo.
La idea expuesta anteriormente, puede resumirse de la siguiente manera: Sea $\mathbb{C}$ un constructo [1], es decir, una categoría cuyos elementos son pares (X,α) donde X es un conjunto y α es una estructura sobre el conjunto X. El conjunto de morfismos entre un par de objetos $A = (X,\alpha)$ y $B = (Y,\beta)$ es el subconjunto $\hom_{\mathbb{C}}(A,B)$ de Y^X formado por todas las funciones que respetan las estructuras. Se asume que la composición de dos morfismos es un morfismo y que la identidad para cada objeto de $\mathbb{C}$ es también un morfismo. Cada par de subfuntores define una $(F,G)-$topología.
Tenemos de esta forma la categoría Col^2 que describimos a continuación: los objetos de Col^2 son conjuntos con dos colecciones $F(X)$ y $G(X)$ de subconjuntos, definidos a partir de dos subfuntores F y G de los funtores de partes $P^{\bullet}$ y $P_{\bullet}$, respectivamente. Es decir, un objeto es una tripla de la forma $\mathbf{X} = (X, F(X), G(X))$. Un morfismo de $\mathbf{X} = (X, F(X), G(X))$ en $\mathbf{Y} = (Y, F(Y), G(Y))$ es una función f de X en Y. El hecho de que F y G sean subfuntores, significa que f, mediante imagen directa envía elementos de $F(X)$ en elementos de $F(Y)$ y mediante imagen inversa, devuelve elementos de $G(Y)$ en elementos de $G(X)$. Las relaciones $g_! f_! = (gf)_!$ y $f^! g^! = (gf)^!$ permiten definir la composición de morfismos
Consideremos el funtor $\hom : \mathbb{C}_{Col^2} \to Conj$ y supongamos que cada conjunto de la forma $\hom(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tiene una (F,G)-topología, veremos que $(u,v)_{\#}$ es una función continua.
En términos de la adjunción imagen inversa - imagen directa, se muestra a continuación que la imagen inversa de un elemento de la sub-base sobre $\hom(\mathbf{X}_1,\mathbf{Y}_1)$ es un elemento de la sub-base sobre $\hom(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. En forma similar a la presentada anteriormente, se muestra que:

$$[(u,v)_{\#}]^!(S(K,A)) = S(u_!(K), v^!(A)).$$

i) Supongamos que $g \in (u,v)^!_{\#}[S(K,A)],$ entonces $(u,v)_{\#}(g) \in S(K,A)$ lo cual significa que $vgu \in S(K,A)$, es decir $(vgu)_!(K) \subseteq A$, de donde $g_!(u_!(K)) \subseteq v^!(A)$, por tanto $g \in S(u_!(K), v^!(A))$.
ii) Por otro lado si h es tal que $h_!(u_!(K)) \subseteq v^!(A)$, entonces $v_! h_! u_!(K) \subseteq A$, lo cual equivale a que $(vhu)_!(K) \subseteq A$, es decir, $[(u,v)_{\#}(h)](K) \subseteq A$, de donde: $(u,v)_{\#}(h) \in S(K,A)$ y por tanto $h \in (u,v)^!_{\#} S(K,A)$.

La demostración presentada aquí es equivalente a la presentada para el caso de los espacios topológicos y la topología compacto-abierta, pero ésta pone de manifiesto la adjunción imagen directa - imagen inversa.

3. La Categoría de Pares Adjuntos.

Un par adjunto entre los conjuntos parcialmente ordenados $(X, \leq)$ y $(Y, \preceq)$, está formado por un par de morfismos (f, g):

$$f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq) \qquad g : (Y, \preceq) \rightarrow (X, \leq)$$

que preservan el orden y tales que para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$,

$$f(x) \preceq y \Leftrightarrow x \leq g(y).$$

Se define la categoría de *Ore* cuyos objetos son conjuntos parcialmente ordenados y cuyos morfismos son pares adjuntos [4].
Un hecho fundamental que permite probar la continuidad de $(u, v)_{\#}$ es la adjunción imagen directa - imagen inversa, adjunción que se expresa mediante la relación:

$$f(K) \subseteq A \Leftrightarrow K \subseteq f^{-1}(A)$$

A modo de generalización reemplazamos la adjunción imagen directa-imagen inversa por un par adjunto en general.
Sea $P : \mathbb{D} \longrightarrow Ore$ un funtor. Si llamamos Ord la categoría de conjuntos ordenados, P determina dos funtores de $Conj$ en Ord, uno covariante y otro contravariante. $P_{\bullet} : Conj \longrightarrow Ord$ se define por $P_{\bullet}(X) = P(X)$ y $P_{\bullet}(f) = f_*$ y $P^{\bullet} : Conj \longrightarrow Ord$ se define por $P^{\bullet}(X) = P(X)$ y $P^{\bullet}(f) = f^*$, donde $P(f) = (f_*, f^*)$.
Sean ahora F y G sub-funtores de $P_{\bullet}$ y $P^{\bullet}$, respectivamente. Esto quiere decir que $F(X) \subseteq P_{\bullet}(X)$ para todo objeto X de $\mathbb{D}$ y $F(f) = f_* \mid_{F(X)}: F(X) \longrightarrow F(Y)$ para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$. Similarmente, $G(X) \subseteq P^{\bullet}(X)$ para todo objeto X de $\mathbb{D}$ y $G(f) = f^* \mid_{G(Y)}: G(Y) \longrightarrow G(X)$ para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$. En cada $\hom_{\mathbb{D}}(X, Y)$ definimos una $(F, G)-$topología tomando como sub-base los conjuntos de la forma:

$$S(a, b) = \{f \in \hom_{\mathbb{D}}(X, Y) \mid \ f_*(a) \leq b\}$$

con $a \in F(X)$ y $b \in G(Y)$.

Proposición 3.1. *Si $(u, v) : (X, Y) \longrightarrow (X_1, Y_1)$ es un morfismo en $\mathbb{C}_{\mathbb{D}}$, entonces $(u, v)_{\#} : \hom_{\mathbb{D}}(X, Y) \longrightarrow \hom_{\mathbb{D}}(X_1, Y_1)$ es continua respecto a las $(F, G)-$topologías correspondientes.*

Teorema 3.2. *Cada tripla (P, F, G), donde $P : \mathbb{D} \longrightarrow Ore$ es un funtor y F y G son subfuntores de $P_{\bullet}$ y $P^{\bullet}$, respectivamente, determina una $(F, G)-$topología sobre los conjuntos de forma $\hom(X, Y)$.*

Ejemplo 3.3. *Sea* $\mathbb{D}$ *la subcategoría de* $Conj$ *cuyos morfismos son funciones sobreyectivas. Definimos* $P : \mathbb{D} \longrightarrow Ore$ *mediante* $P(X) = (Top(X), \supseteq)$ *donde* $Top(X)$ *es el conjunto de todas las topologías sobre* X*. Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es una función sobre,* $f_T(\tau)$ *designa la topología final sobre* Y *asociada con* f *y* $\tau \in Top(X)$ *y* $f^T(\mu)$ *designa la topología inicial sobre* X *asociada con* f *y* $\mu \in Top(Y)$*. Así* (f_T, f^T) *es un par adjunto de* $Top(X)$ *en* $Top(Y)$*. Sea* $F(X) = \{\tau \in Top(X) \mid (X, \tau) \text{ es compacto}\} = G(X)$*. Es fácil ver que si* $\tau \in F(X)$ *y* $f : X \longrightarrow Y$ *es sobre entonces* $f_T(\tau) \in F(Y)$*. Igualmente si* $\mu \in G(Y)$ *y* $f : X \longrightarrow Y$ *es sobre, entonces* $f^T(\mu) \in G(X)$*. De esta manera* F *y* G *son sub-funtores de* $P_{\bullet}$ *y* $P^{\bullet}$ *respectivamente.*

Para cada $\hom_{\mathbb{D}}(X, Y)$ *tenemos una* $(F, G)-$*topología cuya sub-base está constituída por los conjuntos de la forma:*

$$S(\tau, \mu) = \{f \in \hom_{\mathbb{D}}(X, Y) \mid f_T(\tau) \supseteq \mu\}$$

donde $\mu \in G(Y)$*,* $\tau \in F(X)$*.*

Bibliografía

[1] J. Adámek, H. Herrlich and G. Strecker, *Abstract and Concretes Categories.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[2] I. Bucur and A. Deleanu, *Categories and Functors* Oxford University Press, London, 1995.

[3] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.* Springer Verlag, New York, 1992.

[4] J. R. Montañez, *Fibraciones Categóricas.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.

[5] S. Willard *Topology.* Addison-Wesley, 1970.