Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IX No. 2 (2002), pp. 53–66

ESTUDIO DE UN CÁLCULO PROPOSICIONAL CON LOCALIZACIÓN TEMPORAL

JOSÉ M. MUÑOZ Q. (*)
RAMIRO J. MÁRQUEZ C. (**)

RESUMEN. El objeto del estudio del cálculo proposicional con localización temporal lo constituyen las afirmaciones cuya veracidad depende del momento en el cual se afirman. Por ello se introduce el "operador R_t de realización temporal" para expresar "en el instante t se realiza φ" mediante "$R_t(\varphi)$". Se construye un cálculo proposicional incluyendo el símbolo R_t y permitiendo cuantificar las variables temporales, con axiomas y reglas deductivas específicas, el cual con respecto a una clase adecuada de estructuras, resulta ser válido y completo. La prueba de completitud se hace mostrando que vía una traducción adecuada, este cálculo proposicional con localización temporal resulta sorpresivamente ser en cierta forma equivalente al cálculo de predicados monádicos con igualdad.[1]

PALABRAS CLAVE: Cálculo proposicional, localización temporal, completitud, validez.

1. TEMPORALIDAD

Antes de iniciar el desarrollo de una lógica en la cual se incluyan variables temporales y sea posible cuantificarlas, es conveniente precisar algunos conceptos que usamos diariamente en forma intuitiva.

(*) José M. Muñoz Q. Profesor Honorario, Universidad Nacional de Colombia. e-mail: chepemq@hotmail.com

(**) Ramiro J. Márquez C. Catedrático Universidad del Atlántico.

[1]Este trabajo ha sido elaborado dentro del proyecto de investigación "El tiempo en la lógica y en la teoría de conjuntos" cofinanciado por Colciencias y la Universidad Nacional de Colombia, entidades con las cuales los autores están altamente agradecidos.

Una afirmación se llama *temporalmente definida* si su veracidad es independiente del momento en el cual se afirma. Por ejemplo, son temporalmente definidas "$2 + 2 = 4$", "Todos los cuerpos se atraen con una fuerza proporcional al producto de sus masas e ...", "Si un conjunto no es vacío, entonces su conjunto de partes tampoco es vacío", "Toda función diferenciable en un punto es continua en dicho punto", etc. En general es tradicional dentro de la matemática clásica, considerar que sus afirmaciones son atemporales, es decir, temporalmente definidas. Precisamente por suponer que los resultados matemáticos valen en todo momento, que no dependen del instante en que se consideren, la lógica matemática se había interesado poco en el estudio de sistemas donde interviniera la temporalidad.

Una afirmación se llama temporalmente indefinida si su veracidad no es independiente del tiempo, o sea si depende del instante en el cual se afirma. Por ejemplo son temporalmente indefinidas:"Llovió en Bogotá ayer", "El año pasado hubo en el mundo más de veinte sismos de intensidad superior a 6 en la escala de Richter", "El desempleo actualmente en Colombia es superior al 16 %", etc.

Nótese que inclusive expresiones de la vida diaria como "$\forall x \varphi(x)$" son temporalmente indefinidas; por ejemplo, "Todos los colombianos mayores de dieciséis años saben leer" ha sido siempre falsa, pero quizás en algún día no lejano sea verdadera, de modo que su veracidad depende del momento en el cual se hace la afirmación.

El objeto primordial del estudio de la lógica temporal claramente está constituido por las afirmaciones temporalmente indefinidas. Sin embargo, para incluir parte de la lógica usual, también consideraremos afirmaciones temporalmente definidas.

Una fecha, un instante, un momento, son especificaciones *temporalmente precisas, cronológicamente estables.* Lo son por ejemplo "El primer día del año 2005", "El día del descubrimiento de América", "El momento en el cual el hombre puso el pie por primera vez en la luna", etc.

Una *seudofecha* es una especificación temporal cronológicamente inestable; por ejemplo "Hoy", "Hace dos días", "Mañana", etc, las cuales cambian en cada ocasión particular de referencia, puesto que toman como "origen" o punto de referencia al presente el cual es *transiente*, cambiante en cada momento.

La distinción entre fechas y seudofechas puntualiza la existencia de dos formas bastante diferentes de ubicar los eventos, de dar coordenadas al tiempo; una en la que el origen es una fecha, un momento particular preciso, fijo. En este caso el tiempo estará dado por un conjunto de fechas, de instantes.

La otra forma de ubicar los eventos posee un "origen flotante" o sea que el punto de referencia es una seudofecha como "ahora" u "hoy". En este caso las

coordenadas de los eventos vienen a ser también seudofechas como "hace tres días" o "dentro de dos días".
Nosotros trabajaremos en lo que sigue con un conjunto de instantes, de momentos, de fechas, conjunto que será dado de antemano, al cual llamaremos "el tiempo" y simbolizaremos por T.

Como uno de nuestro propósitos es captar lo que sucede en ciertos segmentos de nuestra realidad temporal, no nos es conveniente privilegiar un instante particular, en el sentido de que las verdades absolutas sean las que se verifiquen en dicho instante especial. Nuestro sentido común nos dice que las verdades del sistema, las verdades absolutas, son las que valen en todo instante y no en un momento privilegiado. Esta es una razón más para no considerar el "ahora" como parte de nuestro lenguaje o sea para no usar seudofechas.

Sea φ un enunciado temporalmente indefinido; podemos formar a partir de él un enunciado temporalmente definido localizándolo en el tiempo, es decir, especificando el momento en el cual se considera. Lo hacemos mediante la introducción de un operador que denotamos por R, siguiendo a *Rescher y Urquhart* (ver [3]). Intuitivamente "$R_t(\varphi)''$ significa "en el instante t es cierto φ", o siguiendo la terminología de Rescher y Urquhart, "en el instante t se realiza φ". Por esto a R se le llama el operador de realización temporal. Para contrastaciones con nuestra realidad temporal, supondremos siempre que φ y t son compatibles, es decir vienen dados en la misma unidad de tiempo; por ejemplo, si φ es "*llovió en Bogotá ayer*", entonces t deberá ser un día específico; si t es el 2 de noviembre del año 2001, se sigue que $R_t(\varphi)$ significa: el 2 de noviembre del año 2001 es cierto "*llovió en Bogotá ayer*".

Si φ es un enunciado temporalmente definido verdadero, entonces φ se verifica en todo instante y así $R_t(\varphi)$ es verdadero para cualquier t, por lo cual en este caso se consideran φ y $R_t(\varphi)$ como equivalentes; resumiendo:

Si φ es temporalmente definido,
$$\forall t(\varphi \longleftrightarrow R_t(\varphi)) \quad \text{y} \quad \varphi \longleftrightarrow \forall t R_t(\varphi).$$

Se concluye que un enunciado temporalmente definido verdadero, se toma como realizado omnitemporalmente.

2. Un cálculo proposicional con localización temporal (sistema $\mathcal{LT}$)

Como se dijo antes, en él las proposiciones se vuelven temporalmente definidas especificando el instante en el cual se afirman. Además se permite la cuantificación de las variables temporales. Se diferencia grandemente del llamado "cálculo proposicional temporal", en el cual tan solo se introduce un operador de referencia al pasado, como por ejemplo en [2].

2.1. Parte sintáctica. Su léxico consta de:

1. *Variables proposicionales:* $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots$, designan enunciados que pueden ser temporalmente definidos o temporalmente indefinidos (según lo dicho antes).
2. *Variables temporales:* $s, t, t^{'}, t^{''}, t_1, t_2, t_3, \ldots$ y *constantes temporales:* $a, a_1,\ a_2, a_3, \ldots, b, b_1, b_2, \ldots, c$, designan instantes, días, fechas, etc., según la unidad de tiempo que se considere. Se supone que todas ellas se establecen a partir de un origen fijo.
3. *Los conectivos proposicionales:* $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \longleftrightarrow$.
4. *Los cuantificadores:* $\forall$ y $\exists$, actuando solamente sobre las variables temporales.
5. *El operador* R de realización temporal.
6. *El símbolo de igualdad:* $=$.

2.1.1. Reglas de formación de fórmulas. Ellas son:

1. Las letras proposicionales son fórmulas.
2. Si t_i, t_j son variables temporales o constantes, $t_i = t_j$ es una fórmula.
3. Si α, β son fórmulas, también lo son: $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \longleftrightarrow \beta)$.
4. Si α es una fórmula y t es una variable temporal, también son fórmulas $(\forall t\alpha), (\exists t\alpha), R_t(\alpha), (\forall t R_t(\alpha))$ y $(\exists t R_t(\alpha))$.
5. Una expresión es una fórmula si y sólo si puede obtenerse aplicando finitas veces las cuatro reglas anteriores.

¿Qué fórmulas debemos tomar como axiomas? En principio debemos contar con todos los teoremas de un cálculo proposicional clásico y con los axiomas de cuantificación usuales, pero con respecto al tiempo, a las variables temporales. Además tendremos algunos axiomas específicos de este sistema.

2.2. Axiomas del sistema $\mathcal{LT}$.

1. Todos los teoremas de un cálculo proposicional clásico con sus letras proposicionales posiblemente reemplazadas por fórmulas de $\mathcal{LT}$.
2. Todos los axiomas de cuantificación usuales de un cálculo de predicados clásico de primer orden con igualdad pero con respecto a las variables temporales:

   C1: $\forall t\varphi(t) \rightarrow \varphi(t_0)$ cuando t_0 es libre para t en φ.
   C2: $\forall(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall t\varphi \rightarrow \forall t\psi)$.
   C3: $\varphi \rightarrow \forall t\varphi$ cuando t no ocurre libre en φ.
   C4: $t = t$ siendo t una variable temporal cualquiera.
   C5: $t_1 = t_2 \rightarrow [\varphi(\ldots t_1 \ldots) \rightarrow (\varphi(\ldots t_2 \ldots)]$, siendo $\varphi(\ldots t_2 \ldots)$ la fórmula obtenida al reemplazar en $\varphi(\ldots t_1 \ldots)$ todas, algunas o ninguna de las ocurrencias libres de t_1 por t_2.

3. *Axiomas específicos del sistema $\mathcal{LT}$:*

AT1: $R_t(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg R_t(\varphi)$.
En el instante t se realiza $\neg\varphi$ si y sólo si no es el caso que en el instante t se realice φ. Es realmente una consecuencias del hecho de ser bivalente la lógica subyacente.

AT2: $R_t(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (R_t(\varphi) \wedge R_t(\psi))$.
No es más que la distributividad del operador R_t con respecto al conectivo "$\wedge$".

AT3: $R_s(\forall t\varphi) \leftrightarrow \forall t R_s(\varphi)$.
Es la conmutatividad del cuantificador universal con el operador de realización temporal.

Una justificación de la introducción de este axioma es la siguiente: si el tiempo fuese finito, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, entonces es claro que $\forall t\varphi(t) \leftrightarrow (\varphi(t_1) \wedge \varphi(t_2) \wedge \ldots \varphi(t_n))$, luego por $AT2$,
$R_s\forall t\varphi(t) \leftrightarrow R_s\varphi(t_1) \wedge R_s\varphi(t_2) \wedge \ldots \wedge R_s\varphi(t_n) \leftrightarrow \forall t R_s(\varphi(t))$.
Esto hace ver que $AT3$ es una especie de generalización de $AT2$.

AT4: $R_s[R_t(\varphi)] \leftrightarrow R_t(\varphi)$.
Esta propiedad se debe poseer puesto que $R_t(\varphi)$ ya es temporalmente definido.
En particular $R_t[R_t(\varphi)] \leftrightarrow R_t(\varphi)$.

AT5: $R_t(t^{'} = t^{''}) \leftrightarrow (t^{'} = t^{''})$.

Como **reglas de inferencia** del sistema, tomaremos inicialmente las siguientes:

MP Si $\vdash_{lt} \varphi$ y $\vdash_{lt} \varphi \rightarrow \psi$, entonces $\vdash_{lt} \psi$.
NOTA: Estamos simbolizando mediante "$\vdash_{lt}$" a la deducibilidad del sistema $\mathcal{LT}$.

R: Si $\vdash_{lt} \varphi$, entonces $\vdash_{lt} \forall t R_t(\varphi)$.

RE: Si $\vdash_{lt} (\alpha \leftrightarrow \beta)$ y α es una subfórmula de φ y se tiene $\vdash_{lt} \varphi$, entonces $\vdash_{lt} \varphi \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, donde $\varphi \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ es la fórmula obtenida al reemplazar en φ todas, algunas o ninguna de las ocurrencias de α por β.

RR: Si $\vdash_{lt} \forall t R_t(\varphi)$ y t no aparece libre en φ, entonces $\vdash_{lt} \varphi$.

Es una especie de recíproca de la regla R.

Algunos resultados inmediatos, son los siguientes:

COROLARIO 1. *R_t distribuye con respecto a todos los conectivos proposicionales.*

Basta expresar los conectivos $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ en términos de "$\neg$" e "$\wedge$" y aplicar $AT1$ y $AT2$.

COROLARIO 2. $\exists t\ R_s\ (\varphi)\ \leftrightarrow\ R_s\ (\exists t\varphi)$.

$$\begin{aligned}
\text{En efecto}: \exists t R_s\ (\varphi) &\leftrightarrow \neg\forall t\ \neg R_s\ (\varphi) && (def.)\\
&\leftrightarrow \neg\forall t\ R_s\ (\neg\varphi) && AT1\\
&\leftrightarrow \neg(R_s\ (\forall t\ (\neg\varphi))) && AT3\\
&\leftrightarrow R_s(\neg\forall t\ (\neg\varphi)) && AT1\\
&\leftrightarrow R_s\ (\exists t\ \varphi) && def.
\end{aligned}$$

En particular, $\exists t\ R_t(\varphi) \leftrightarrow R_t\ (\exists t\ \varphi)$.

TEOREMA 1. $\vdash_{lt} \forall t R_t\ (R_t\ (\varphi) \leftrightarrow \varphi)$

Demostración.

1. $\varphi \leftrightarrow \varphi$ — tautología.
2. $\forall t\ R_t(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ — Regla $R, 1$.
3. $\forall t\ (R_t(\varphi) \leftrightarrow R_t\ \varphi))$ — Corolario $1, 2$.
4. $R_t(\varphi) \leftrightarrow R_t\ (R_t\ \varphi))$ — $AT4$.
5. $\forall t(R_t(R_t\ (\varphi)) \leftrightarrow R_t\ \varphi))$ — RE,$3, 4$.
6. $\forall t\ R_t(R_t\ (\varphi) \leftrightarrow \varphi)$ — Corolario $1, 5$.

□

Si no se tuviese la restricción impuesta a RR, podríamos aplicarla al teorema anterior para deducir $\vdash_{lt} R_t(\varphi) \leftrightarrow \varphi$. Este resultado haría que R_t fuese superfluo y el cálculo proposicional cronológico se reduciría a un cálculo proposicional usual, lo cual haría que sobrase la maquinaria temporal. Claro está que esto no sería correcto, ya que para expresiones temporalmente indefinidas, es necesario especificar el instante en el cual se afirman.

TEOREMA 2. $\vdash_{lt} R_s(\exists t R_t(\varphi)) \leftrightarrow \exists t R_t(\varphi)$.

Demostración. Es claro ya que $\exists t R_t(\varphi)$ es temporalmente definido. □

2.3. Semántica para el sistema $\mathcal{LT}$. Para efectos de este cálculo tan sólo localizado temporalmente, no hemos considerado que el tiempo sea ordenado, ya que el orden de los instantes no tiene incidencia directa en la veracidad de una afirmación en un momento dado. Por ejemplo, "está lloviendo" puede ser cierta en un primer instante, falsa en un segundo y de nuevo cierta en un instante posterior.

Una estructura de tipo $\mathcal{LT}$ o una $\mathcal{LT}$-estructura, $\mathcal{A} = (T, (v_a)_{a\in T})$, es una pareja cuya primera componente es un conjunto T no vacío (de instantes) y cuya segunda componente es una familia $(v_a)_{a \in T}$ de valuaciones definidas en el conjunto de las letras proposicionales y con valores en $\{0, 1\}$.

Las valuaciones se extienden a las fórmulas sin R ni cuantificadores en la forma usual; por ejemplo, $(v_a)(\neg\varphi) = 1$ si si $v_a(\varphi) = 0$ y $v_a(\varphi \wedge \psi) = 1$ si si $v_a(\varphi) = 1 = v_a(\psi)$. Para fórmulas con variables temporales libres, es necesario asignar valores a las variables y luego sí calcular la valuación, $v_a(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n])$, donde estamos suponiendo que las variables temporales libres de φ se hallan entre $t_1, t_2 \ldots, t_n$; aquí $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en T.

La relación fundamental tanto para la definición como para la extensión de la valuaciones, está en que

$$v_a(\varphi) = 1 \quad si \quad si \quad R_a(\varphi), \tag{$*$}$$

o sea que $v_a(\varphi) = 1$ si y sólo si en el instante a se realiza φ. En este orden de ideas, continuemos extendiendo por recurrencia las valuaciones:

Si φ no posee variables temporales libres, $v_a(R_t(\varphi)[b]) = v_a(R_b(\varphi)) = 1$ si si $R_a(R_b(\varphi))$ o sea por $AT4$, si si $R_b(\varphi)$ y por $(*)$, si si $v_b(\varphi) = 1$.

En resumen, $v_a(R_t(\varphi)[b]) = 1$ si si $v_b(\varphi) = 1$.

Generalizando: si las variables temporales libres de φ están entre $t_1, t_2, \ldots, t_n$,

- **S1**: $v_a(R_t(\varphi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ si si $v_b(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$.

  Aquí b es el valor que se asigna a la variable t y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los valores en T que se asignan a $t_1, t_2, \ldots, t_n$, respectivamente.
- **S2**: Si $i, j \leqslant n$, $v_a((t_i = t_j)[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ si si $a_i = a_j$.
- **S3**: $v_a(\forall t \varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ si y sólo si $v_a(\varphi[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ para todo b en T.

Por ejemplo, $v_a(\forall t R_t(\varphi[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n])) = 1$ si y sólamente si $v_a(R_t(\varphi)[b, a_1, \ldots, a_n])) = 1$ para todo b; esto ocurre según $S1$, si y sólamente si $v_b(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ para todo b, y de acuerdo con $(*)$, equivale a que para todo b, $R_b(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n])$, en concordancia con nuestra intuición.

Si hubiéramos procedido en otro orden, usando primero $S1$, $v_a(\forall t R_t(\varphi)[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ si si $v_a(R_b(\varphi)[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ para todo b; de acuerdo con $(*)$, esto ocurre si y sólo si $R_a(R_b(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]))$ para todo b; y por AT4, si y sólo si $(R_b(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n])$ para todo b; esta es la misma conclusión anterior, comprobándose en este caso la consistencia de las definiciones y axiomas.

Si dada una $\mathcal{LT}$-estructura $\mathcal{A} = (T, (v_a)_{a \in T})$ y una fórmula φ del lenguaje antes descrito, se tiene que para toda asignación $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in T^n$ de valores a sus variables temporales, y para todas las valuaciones v_a de la familia, $v_a(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$, entonces se dice que la $\mathcal{LT}$-estructura $\mathcal{A}$ verifica φ, y se escribe $\mathcal{A} \models_{lt} \varphi$. Si para toda $\mathcal{LT}$-estructura $\mathcal{A}$ se cumple $\mathcal{A} \models_{lt} \varphi$, se dice que φ es $\mathcal{LT}$-válida y este hecho se nota $\models_{lt} \varphi$.

3. Validez

Para demostrar que este sistema es válido, es suficiente probar dos cosas:

LEMA 1. Todos los axiomas son $\mathcal{LT}$-válidos

LEMA 2. Las reglas deductivas dadas preservan $\mathcal{LT}$-validez.

La validez de cualquier teorema del sistema $\mathcal{LT}$ se prueba por inducción en fórmulas, aplicando finitas veces los dos lemas anteriores.

Con respecto al Lema 1, es enteramente rutinario probar que las tautologías son $\mathcal{LT}$-válidas, ya que por la forma como se extendieron las valuaciones con respecto a los conectivos, es claro que para cada a, $v_a(\varphi) = 1$ si φ es una tautología.

Igual sucede con respecto a los axiomas cuantificacionales $C1$ a $C5$ puesto que para ellos la $\mathcal{LT}$-validez coincide con la validez clásica. Nos resta solamente probar la $\mathcal{LT}$-validez de los axiomas $AT1$ a $AT5$.

Para lo que sigue, sea $\mathcal{A} = (T, (v_a)_{a\in T})$ una $\mathcal{LT}$-estructura cualquiera.

$AT1$ **es** $\mathcal{LT}$**-válido**:

Demostración. Sea v_a cualquier valuación y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos cualesquiera de T.

$$
\begin{aligned}
v_a(R_t(\neg\varphi)[b, a_1, \ldots, a_n]) = 1 \quad &\text{si si} \quad v_b(\neg\varphi[a_1, \ldots, a_n]) = 1 && (S1)\\
&\text{si si} \quad v_b(\varphi[a_1, \ldots, a_n]) = 0 && (def.)\\
&\text{si si} \quad v_a(R_t(\varphi)[b, a_1, \ldots, a_n]) = 0 && (S1)\\
&\text{si si} \quad v_a(\neg R_t(\varphi)[b, a_1, \ldots, a_n]) = 1 && (def.)
\end{aligned}
$$

Luego $v_a((R_t(\neg\varphi)[b, a_1, \ldots, a_n]) \leftrightarrow (\neg R_t(\varphi)[b, a_1, \ldots, a_n]) = 1$. □

$AT2$ **es** $\mathcal{LT}$**-válido:**

Demostración. Sean φ, ψ fórmulas cualesquiera cuyas variables libres están entre $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos cualesquiera de T.

$$
\begin{aligned}
v_a(R_t(\varphi \wedge \psi)[b, a_1, \ldots, a_n]) = 1 \ &\text{si si} \ v_b((\varphi \wedge \psi)[a_1, \ldots, a_n]) = 1 && (S1)\\
&\text{si si} \ v_b(\varphi[a_1, \ldots, a_n] \wedge \psi[a_1, \ldots, a_n]) = 1.
\end{aligned}
$$

Esta última igualdad equivale a

$$v_b(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ y } v_b(\psi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1,$$

equivalente por $S1$ a

$$v_a(R_t(\varphi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ y } v_a(R_t(\psi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1,$$

equivalente por definición de extensión a la conjunción, a

$$v_a(R_t(\varphi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) \wedge R_t(\varphi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1.$$

En consecuencia, $v_a(R_t(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow R_t(\varphi) \wedge R_t(\psi)) = 1$. □

$AT3$ **es** $\mathcal{LT}$**-Válido:**

Demostración. Supongamos que las variables libres de $\forall t\varphi$ están entre $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y sean $a, b, b^{'}, a_1, \ldots, a_n$ cualesquiera en T donde $b, b^{'}$ evaluarán a t y s respectivamente.

$$\begin{aligned}
&v_a(R_s(\forall t\varphi)[b^{'}, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ si si } (\textit{por } S1),\\
&\qquad v_{b'}(\forall t\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ si si } (\textit{por } S3),\\
&\qquad v_{b'}(\varphi[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \;\; \forall b \in T, \text{ y esto ocurre si si } (\textit{por } S1),\\
&v_a(R_s(\varphi[b^{'}, b, a_1, a_2, \ldots, a_n])) = 1 \;\; \forall b \in T, \text{ lo cual por } S3 \text{ equivale a}\\
&\; v_a(\forall t R_s\varphi[b^{'}, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1.
\end{aligned}$$

□

$AT4$ **es** $\mathcal{LT}$**-Válido:**

Demostración. Supongamos que las variables libres de φ están entre $t_1, \ldots, t_n$ y sean $b, b^{'}, a_1, \ldots, a_n$ cualesquiera en T.

$$\begin{aligned}
v_a(R_s(R_t(\varphi))[b^{'}, b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ si si } &\qquad (por S1),\\
v_{b'}(R_t(\varphi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ si si } &\qquad (por S1),\\
v_b(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ si si } &\qquad (por S1),\\
v_a(R_t(\varphi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 &
\end{aligned}$$

y como s no aparece en $(R_t(\varphi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n])$, entonces

$$(R_t(\varphi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) \leftrightarrow (R_t(\varphi)[b^{'}, b, a_1, a_2, \ldots, a_n]).$$

Luego la última igualdad equivale a $v_a(R_t(\varphi)[b^{'}, b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$. □

$AT5$ **es $\mathcal{LT}$-Válido:**

Demostración. Para cualesquier $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ en T,

$$
\begin{aligned}
v_a(R_t(t_i = t_j)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ si si} & \qquad (por S1), \\
v_b((t_i = t_j)[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ si si} & \qquad (por S2), \\
a_i = a_j \text{ si si} & \qquad (por S2), \\
v_a((t_i = t_j)[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1 \text{ si si} & \\
v_a((t_i = t_j)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1, &
\end{aligned}
$$

ya que este resultado tan solo depende de los valores a_i y a_j que se asignen a las únicas variables libres t_i y t_j de la fórmula (b no tiene aquí ninguna acción). Se concluye que $v_a(R_t(t_i = t_j) \leftrightarrow t_i = t_j) = 1$. □

Hemos terminado así la demostración del Lema 1; probemos enseguida el **Lema 2**:

La regla R preserva $\mathcal{LT}$-validez:

Demostración. Supongamos que φ es $\mathcal{LT}$-válida y demostremos que $\forall t R_t(\varphi)$ también lo es. Como antes, sean $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos cualesquiera de T y supongamos que las variables libres de φ están entre $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Como φ es válida, $v_b(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ para todo b de T.
Pero por $S1$, $v_a(R_t(\varphi)[b, a, a_1, \ldots, a_n]) = v_b(\varphi[a_1, \ldots, a_n])$, para toda a y todo b de T, luego $v_a(R_t(\varphi)[b, a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ para toda a y todo b de T, luego por $S3$, $v_a(\forall t R_t(\varphi)[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ para todo a de T. En consecuencia $\forall t R_t(\varphi)$ es $\mathcal{LT}$-válida. □

Es realmente trivial ver que **modus ponens preserva $\mathcal{LT}$-validez**, ya que la forma como se extendieron las valuaciones con respecto a los conectivos fué la usual, y si $v_a(\varphi \to \psi) = 1$ y $v_a(\varphi) = 1$, entonces $v_a(\psi) = 1$.

RE **preserva $\mathcal{LT}$-validez**: Su demostración es la usual y basta hacerla por inducción en fórmulas sobre la complejidad de las fórmulas.

La regla RR preserva $\mathcal{LT}$-validez:

Demostración. Supongamos que $\forall t R_t(\varphi)$ es $\mathcal{LT}$-válida y que t no ocurre libre en φ. Como antes, dada cualquier $\mathcal{LT}$-estructura y $a, b, a_1, \ldots, a_n$ cualesquiera en T, entonces $v_a(\forall t R_t(\varphi)[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$; estamos suponiendo que las variables libres de φ están entre $t_1, t_2, \ldots, t_n$, variables distintas de t. Por $S3$,

$v_a(R_t(\varphi)[b, a_1, \ldots, a_n]) = 1$ para todo b en T. Pero Como t no ocurre libre en φ, esta igualdad equivale a $v_a(R_b(\varphi)[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ para todo b en T; por $S1$, la igualdad anterior equivale a $v_b(\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 1$ para todo b en T. Se concluye que φ es $\mathcal{LT}$-válida. □

En esta forma queda terminada la prueba del Lema 2 y con ello la consistencia del sistema $\mathcal{LT}$.

4. Completitud

Nos proponemos finalmente demostrar que el cálculo proposicional localizado temporalmente es completo, es decir, que toda fórmula $\mathcal{LT}$-válida es deducible como un teorema de sistema $\mathcal{LT}$ que hemos dado.

En general las pruebas de completitud son difíciles, por lo cual nuestra estrategia será reducirla a un caso ya conocido.

Combinando finitas veces con RE las equivalencias

$$R_t(\neg A) \leftrightarrow \neg R_t(A) \qquad (AT1)$$

$$R_t(A \star B) \leftrightarrow (R_t(A) \star R_t(B)) \qquad (Corol\ 1.)$$

para cualquier conectivo binario $\star$,

$$R_t(\forall s A) \leftrightarrow \forall s R_t(A) \qquad (AT3)$$

$$y \quad R_t(t_i = t_j) \leftrightarrow (t_i = t_j) \qquad (AT5),$$

podemos para cualquier fórmula φ hallar otra φ' equivalente a φ y que posea los operadores R lo más internamente posible, de tal forma que sólo afecten variables proposicionales.
Por ejemplo,

$$\begin{aligned} R_t[p_1 \to ((t_2 = t_5) \to (p_1 \vee (\neg p_2)))] &\leftrightarrow R_t(p_1) \to R_t[(t_2 = t_5) \to (p_1 \vee (\neg p_2))] \\ &\leftrightarrow R_t(p_1) \to [R_t(t_2 = t_5) \to R_t(p_1 \vee (\neg p_2))] \\ &\leftrightarrow R_t(p_1) \to [(t_2 = t_5) \to (R_t(p_1) \vee \neg R_t(p_2))] \quad (\varphi'). \end{aligned}$$

Si reemplazamos a $R_t(p_i)$ por $P_i(t)$, lo podemos interpretar como un predicado unario, ya que su veracidad sólo depende del valor que se dé a t.

Entonces el sistema anterior será equivalente a un cálculo de predicados monádicos con igualdad, el cual se sabe que es completo y en consecuencia nuestro sistema inicial también será completo.

Llevemos a cabo la idea anterior formalmente:

DEFINICIÓN 1. Una fórmula φ del cálculo proposicional localizado temporalmente se halla en forma normal si:

i. Todas las ocurrencias de sus variables proposicionales se hallan afectadas por operadores R.
ii. Todos los operadores R en φ ocurren solamente en subfórmulas de la forma $R_t(p_i)$, con p_i variable proposicional.

Por ejemplo, la fórmula (φ') anterior se halla en forma normal.

LEMA 3. Dada cualquier fórmula φ del cálculo $\mathcal{LT}$, existe otra φ^* en forma normal tal que

i. φ es válida si y sólo si φ^* es válida y
ii. $\vdash_{lt} \varphi^*$ si y sólo si $\vdash_{lt} \varphi$.

Demostración.

1^{er} paso: Si en φ hay al menos una ocurrencia de una variable proposicional que no se halle dentro del alcance de un operador R, elegimos una variable temporal t que no ocurra en φ y formamos φ_1 igual a $\forall t R_t(\varphi)$.
Si $\vdash_{lt} \varphi_1$ entonces por la regla R, $\vdash_{lt} \forall r R_t(\varphi)$.
Si $\vdash_{lt} \forall t R_t(\varphi)$, como t no ocurre en φ, podemos aplicar la regla RR y obtener $\vdash_{lt} \varphi$.
Como tanto la regla R como la regla RR conservan validez, de lo anterior se concluye que $\vDash_{lt} \varphi$ si si $\vDash_{lt} \varphi_1$.

2^o paso: Usando la regla RE conjuntamente con $AT1$, $AT3$, $AT5$ y el Corolario 1, llevamos los operadores R de φ_1 lo más internamente posible (como en el ejemplo dado). Cuando se aplica $AT3$, puede ser conveniente efectuar cambios alfabéticos de variables temporales, para que las transformaciones sean reversibles, es decir, para que sean cadenas de equivalencias.
Luego eliminamos iteraciones consecutivas del operador R, usando para ello $AT4$. Obtenemos así la fórmula φ^* buscada, ya que φ^* estará en forma normal.
Como los pasos que llevan de φ_1 a φ^* son equivalencias (deductivas) dentro del sistema deductivo $\mathcal{LT}$, entonces $\vdash_{lt} \varphi_1$ si si $\vdash_{lt} \varphi^*$.
Y puesto que los axiomas son válidos y las reglas deductivas preservan $\mathcal{LT}$-válidez, entonces $\models_{lt} \varphi_1$ si si $\models_{lt} \varphi^*$.

Se concluye finalmente que $\vdash_{lt} \varphi$ si si $\vdash_{lt} \varphi^*$ y que $\models_{lt} \varphi$ si si $\models_{lt} \varphi^*$, o sea que todas las afirmaciones sobre deducibilidad y validez que se hagan sobre φ^*, serán también ciertas para φ.

Será entonces suficiente demostrar el teorema de completitud para φ^*, es decir, para fórmulas que se hallen en forma normal.

$\square$

Definamos a continuación una "traducción" T del conjunto de fórmulas del sistema $\mathcal{LT}$ que se hallan en forma normal, en el cálculo de predicados monádicos con igualdad:

$T(\varphi^*)$ es la fórmula obtenida al reemplazar en φ^* a cada $R_t(p_i)$ por $P_i(t)$.

LEMA 4. Si φ^* es $\mathcal{LT}$-válida, entonces $T(\varphi^*)$ es válida en el cálculo de predicados monádicos.

Probemos la forma contrarrecíproca: si $T(\varphi^*)$ no es válida, entoces φ^* no es $\mathcal{LT}$-válida.

Demostración. Supongamos que $T(\varphi^*)$ no es válida en el cálculo de predicados monádicos; entonces existe una estructura del tipo del lenguaje que la falsifica, digamos

$$\mathcal{E} = (T, (P_i^{\mathcal{E}})_i),$$

en la cual T es un conjunto no vacío y para cada i, el conjunto $P_i^{\mathcal{E}}$ es un subconjunto de T, formado por aquellos t tales que $P_i(t)$ es verdadero.

Como $\mathcal{E} \not\models T(\varphi^*)$, entonces $P_i^{\mathcal{E}}$ es una interpretación de P_i en $\mathcal{E}$ tal que $(T, (P_i^{\mathcal{E}})_i)$ falsifica a $T(\varphi^*)$.

Puesto que la fórmula atómica $P_k(a)$ es verdadera en $\mathcal{E}$ si y sólo si $a \in P_k^{\mathcal{E}}$ ($\mathcal{E} \models P_i(a)$ si si $a \in P_i^{\mathcal{E}}$), entonces podemos definir una estructura de tipo $\mathcal{LT}$

$$\mathcal{S} = (T, (v_a)_{a \in T}),$$

definiendo $v_a(p_i) = 1$ si si $a \in P_i^{\mathcal{E}}$.

Así $\mathcal{E} \models P_i(a)$ si si $v_a(p_i) = 1$ si si $R_a(p_i)$ o sea que $p_i(a)$ en $\mathcal{E}$ y $R_a(P_i)$ en S adquieren simultáneamente los mismos valores de verdad y en consecuencia, si $a_2, a_2, \ldots, a_n$ son los valores que se deben dar a las variables libres de $T(\varphi^*)$ para que se falsifique en $\mathcal{E}$, esos mismos valores falsificarán φ^* en S, quedando demostrado lo que queríamos. $\square$

METATEOREMA 1. El cálculo proposicional $\mathcal{LT}$ estudiado es completo.

Demostración. Si φ es $\mathcal{LT}$-válida, entonces φ^* es $\mathcal{LT}$-válida (Lema 3) y en consecuencia $T(\varphi^*)$ es válida en el cálculo de predicados monádicos con igualdad, (Lema 4) y como éste es completo,(ver [1], pg. 170) existirá una deducción en él de $T(\varphi^*)$, la cual efectuando las "traducciones" inversas adecuadas, se transformará en una prueba de φ^* en $\mathcal{LT}$, es decir $\vdash_{lt} \varphi^*$ y entonces por el Lema 3 se concluye que $\vdash_{lt} \varphi$. □

Hemos culminado así el trabajo, mostrando que nuestro cálculo proposicional localizado temporalmente es válido y completo.

Referencias

[1] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*. D. van Nostrand Company, London 1979.

[2] J. M. Muñoz Q, *"Consistencia, validez y completitud de un sistema proposicional de lógica temporal"*. Boletín de Matematicas, **XXIII** (1992).

[3] Rescher, and Urquhart, A. *Temporal Logic*. Springer-Verlag, Wien, New York, 1971.