Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IX No.2 (2002), pp. 67–82

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DÉBIL PARA EL PROBLEMA DE CAUCHY DEL GAS DINÁMICO ISENTRÓPICO

Juan Carlos Hernández Rincón (*)

Resumen. En este artículo, se calculan cuatro pares de entropía débil-flujo (η_i, q_i), $i = 1, 2, 3, 4$ para el sistema del gas dinámico isentrópico en coordenadas eulerianas

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$
$$(\rho u)_t + \Big(\rho u^2 + p(\rho)\Big)_x = 0.$$

A partir de estos cuatro pares de entropía débil-flujo, los cuales satisfacen la ecuación

$$\langle \nu, \eta_i q_j - \eta_j q_i\rangle = \langle \nu, \eta_i\rangle\langle \nu, q_j\rangle - \langle \nu, \eta_j\rangle\langle \nu, q_i\rangle \quad (i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j),$$

se muestra que las medidas de probabilidad ν con soporte pequeño determinadas por la sucesión de soluciones aproximadas deben ser medidas de Dirac bajo la fuerte restricción $\rho \geq \alpha > 0$, obteniendo como consecuencia directa la existencia de solución débil para el problema de Cauchy del gas dinámico isentrópico con exponente adiabático $1 < \gamma < 3$.

Palabras clave: Gas isentrópico, entropía-flujo de entropía, medida de Dirac, solución débil.

1. PRELIMINARES

1.1 Definición (Ley de conservación). Las ecuaciones de un sistema de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \qquad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \tag{1.1}$$

donde $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$, $\quad n \geq 1$ y $f(u) = \Big(f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u)\Big)^{\mathrm{t}}$, son comunmente llamadas *leyes de conservación.*

(*) Juan C. Hernández, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

1.2 Ejemplo (Ley de conservación). Un ejemplo prototipo de un sistema de la forma (1.1) es el sistema del gas dinámico isentrópico (entropía constante), el cual es descrito en coordenadas eulerianas por el siguiente par de leyes de conservación

$$\rho_t + \big(\rho u\big)_x = 0 \qquad \text{(ley de conservación de masa)} \tag{1.2}$$

$$\big(\rho u\big)_t + \Big(\rho u^2 + p(\rho)\Big)_x = 0 \qquad \text{(ley de conservación de momento)}, \tag{1.3}$$

donde $p(\rho) = k^2\rho^\gamma$ es la presión que satisface $p'(\rho) > 0$, siendo k una constante no nula y $\gamma > 1$ el exponente adiabático ($1 < \gamma < 3$ para casi todos los gases), ρ es la densidad del gas y u la velocidad.

El sistema dado por el par de leyes de conservación (1.2)-(1.3) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} &\rho_t + m_x = 0 \\ &m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right)_x = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde $m = \rho u$ denota la masa.

Considerando el par de leyes de conservación

$$\begin{aligned} u_t + f(u,v)_x = 0 \\ v_t + g(u,v)_x = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde u y v están en $\mathbb{R}$, haciendo $U = (u,v)^{\mathrm{t}}$ y $F(U) = (f,g)^{\mathrm{t}}$ el sistema (1.5) se pueden escribir en forma matricial como

$$U_t + dF(U)U_x = 0, \tag{1.6}$$

donde $dF(U)$ es la matriz Jacobiana de $F(U)$.
En particular, el sistema (1.4) puede ser expresado en la forma (1.6) con

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} \;\text{ y }\; F(U) = \begin{pmatrix} m \\ \dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho) \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

1.3 Definición (Sistema hiperbólico). Se dice que el sistema (1.6) es hiperbólico si la matriz $dF(U)$ tiene valores propios reales. El sistema (1.6) es llamado estrictamente hiperbólico si los valores propios son reales y distintos, es decir $\lambda_1 < \lambda_2$. Si λ_1 y λ_2 coinciden en algunos puntos o dominios, el sistema (1.6) es llamado no estrictamente hiperbólico o hiperbólico degenerado.

1.4 Definición (genuinamente no lineal, lineal degenerado). Sean r_{λ_1} y r_{λ_2} los vectores propios a derecha correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2, el sistema (1.6) es genuinamente no lineal en el campo característico λ_1 si

$$\nabla\lambda_1 \cdot r_{\lambda_1} \neq 0 \tag{1.8}$$

y genuinamente no lineal en el campo característico λ_2 si

$$\nabla\lambda_2 \cdot r_{\lambda_2} \neq 0. \tag{1.9}$$

Si $\nabla\lambda_1 \cdot r_{\lambda_1} = 0$ o $\nabla\lambda_2 \cdot r_{\lambda_2} = 0$ en algún dominio D, el sistema (1.6) es llamado linealmente degenerado en D sobre el campo característico λ_1 o sobre el campo característico λ_2.

Para el sistema (1.4), donde

$$dF(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + p'(\rho) & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

tenemos que los valores propios son solución de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + p'(\rho) & \lambda - \frac{2m}{\rho} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{2m}{\rho}\lambda + \frac{m^2}{\rho^2} - p'(\rho) = 0, \tag{1.11}$$

así los valores propios del sistema son

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - \sqrt{p'(\rho)} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{m}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)}, \tag{1.12}$$

con correspondientes vectores propios a derecha

$$r_{\lambda_1} = (1, \lambda_1)^{\mathrm{t}} \quad \text{y} \quad r_{\lambda_2} = (1, \lambda_2)^{\mathrm{t}}. \tag{1.13}$$

De (1.12) se obtiene que

$$\nabla\lambda_1 = \left(-\frac{m}{\rho^2} - \frac{p''(\rho)}{2\sqrt{p'(\rho)}}, \frac{1}{\rho}\right) \quad \text{y} \quad \nabla\lambda_2 = \left(-\frac{m}{\rho^2} + \frac{p''(\rho)}{2\sqrt{p'(\rho)}}, \frac{1}{\rho}\right), \tag{1.14}$$

luego

$$\nabla\lambda_1 \cdot r_{\lambda_1} = -\frac{\rho p''(\rho) + 2p'(\rho)}{2\rho\sqrt{p'(\rho)}} \quad \text{y} \quad \nabla\lambda_2 \cdot r_{\lambda_2} = \frac{\rho p''(\rho) + 2p'(\rho)}{2\rho\sqrt{p'(\rho)}}. \tag{1.15}$$

Como para el gas isentrópico $p(\rho) = k^2\rho^\gamma$, tenemos que

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - \sqrt{\gamma k^2 \rho^{\gamma-1}} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{m}{\rho} + \sqrt{\gamma k^2 \rho^{\gamma-1}}, \tag{1.16}$$

$$\nabla\lambda_1 \cdot r_{\lambda_1} = -\frac{(\gamma k^2)^{\frac{1}{2}}}{2}(\gamma+1)\rho^{\frac{\gamma-3}{2}} \quad \text{y} \quad \nabla\lambda_2 \cdot r_{\lambda_2} = \frac{(\gamma k^2)^{\frac{1}{2}}}{2}(\gamma+1)\rho^{\frac{\gamma-3}{2}}. \tag{1.17}$$

De (1.16) se sigue que el sistema del gas dinámico isentrópico es estrictamente hiperbólico en el dominio $\{(x,t) : \rho(x,t) > 0\}$ e hiperbólico degenerado en el dominio $\{(x,t) : \rho(x,t) = 0\}$. De (1.17) se obtiene que el sistema es genuinamente no lineal[1] en $\{(x,t) : \rho(x,t) > 0\}$ y linealmente degenerado en $\{(x,t) : \rho(x,t) = 0\}$ si $\gamma > 3$.

Ahora consideramos el problema de Cauchy dado por el sistema (1.2)-(1.3) para $1 < \gamma < 3$ con valor inicial acotado y medible

$$\big(\rho(x,0), u(x,0)\big) = \big(\rho_0(x), u_0(x)\big), \quad \rho_0(x) \geq 0. \tag{1.18}$$

1.5 Definición (Solución débil). Una solución débil o generalizada al problema de Cauchy $(1.2)-(1.3)-(1.18)$ es una pareja de funciones $\big(\rho(x,t), u(x,t)\big)$ medibles y acotadas tal que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\rho\phi_t + (\rho u)\phi_x)dxdt + \int_{-\infty}^\infty \rho_0\phi(x,0)dx = 0 \tag{1.19}$$

y

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left((\rho u)\phi_t + \Big(\rho u^2 + p(\rho)\Big)\phi_x\right)dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0\phi(x,0)dx = 0, \tag{1.20}$$

para toda $\phi \in C_0^1\big(\mathbb{R} \times (0,+\infty)\big)$.[2]

1.6 Definición (Entropía-flujo). Una entropía $\eta = \eta(u,v)$ para el sistema (1.6) y su flujo de entropía $q = q(u,v)$ asociado, son funciones que satisfacen

$$\nabla q = \nabla\eta dF(U). \tag{1.21}$$

A la pareja (η, q) que satisface (1.21) se le llama un par entropía-flujo del sistema (1.6).

1.7 Ejemplo (Entropía-flujo). Un par entropía-flujo para el sistema (1.2)-(1.3) son funciones $\eta(\rho,u)$ y $q(\rho,u)$ que satisfacen

$$\nabla q = \nabla\eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + p'(\rho) & 2u \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

---

[1] "Para sistemas genuinamente no lineales, se puede probar que las soluciones clásicas generalmente no existen" [4].

[2] $C_0^1(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones $\phi \in C^1(\Omega)$ con soporte compacto en Ω.

Para el sistema (1.4) una entropía-flujo es un par de funciones $\eta(\rho,m)$ y $q(\rho,m)$ tales que

$$\nabla q = \nabla\eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2}+p'(\rho) & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Como el sistema (1.2)-(1.3) es equivalente al sistema (1.4), ambos sistemas admiten los mismos pares de entropía-flujo.

La ecuación (1.3) se puede escribir como

$$\rho_t u + \rho u_t + \big(\rho u\big)_x u + \rho u u_x + p(\rho)_x = 0, \tag{1.24}$$

sustituyendo en esta la ecuación (1.2), tenemos que

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \int_0^\rho \frac{p'(s)}{s}ds\right)_x = 0, \tag{1.25}$$

así obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \rho_t+\big(\rho u\big)_x = 0 \\ u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \int_0^\rho \frac{p'(s)}{s}ds\right)_x = 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

El sistema (1.26) se puede expresar en la forma (1.6) con

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \frac{1}{2}u^2 + \int_0^\rho \frac{p'(s)}{s}ds \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad dF(U) = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \dfrac{p'(\rho)}{\rho} & u \end{pmatrix}. \tag{1.27}$$

Los sistemas (1.2)-(1.3) y (1.26) tienen los mismos pares de entropía-flujo por ser equivalentes, luego cualquier par de entropía-flujo $\big(\eta(\rho,u), q(\rho,u)\big)$ del sistema (1.2)-(1.3) satisface

$$(q_\rho, q_u) = (\eta_\rho, \eta_u) \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{p'(\rho)}{\rho} & u \end{pmatrix}, \tag{1.28}$$

de donde,

$$q_\rho = u\eta_\rho + \frac{p'(\rho)}{\rho}\eta_u \tag{1.29}$$

y

$$q_u = \rho\eta_\rho + u\eta_u. \tag{1.30}$$

Como

$$\eta_\rho + u\eta_{\rho u} + \frac{p'(\rho)}{\rho}\eta_{uu} = q_{\rho u} = q_{u\rho} = \eta_\rho + \rho\eta_{\rho\rho} + u\eta_{u\rho}, \tag{1.31}$$

se obtiene que cualquier entropía $\eta(\rho,u)$ del sistema (1.2)-(1.3) satisface la ecuación

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{p'(\rho)}{\rho^2}\eta_{uu}. \tag{1.32}$$

1.8 Definición (Entropía débil). Una entropía $\eta = \eta(\rho, u)$ del sistema $(1.2) - (1.3)$ es llamada una entropía débil si $\eta(0, u) = 0$.

Una entropía débil $\eta(\rho, u)$ del sistema (1.2)-(1.3) es una solución de la ecuación (1.32) con las condiciones iniciales

$$\eta(0, u) = 0, \qquad \eta_\rho(0, u) = g(u), \tag{1.33}$$

donde $g(u)$ es una función arbitraria.

1.9 Ejemplo (Entropía débil-flujo). Aquí se calculan cuatro pares de entropía débil-flujo para el sistema (1.2)-(1.3), obteniendo la entropía débil como solución al problema de valores iniciales (1.32)-(1.33) dada una $g(u)$ particular y su flujo asociado de las ecuaciones (1.29) y (1.30).

a)

$$\begin{cases} \eta_{\rho\rho} = \frac{p'(\rho)}{\rho^2}\eta_{uu} \\ \eta(0, u) = 0 \\ \eta_\rho(0, u) = 1, \end{cases}$$

$$\big(\eta(\rho, u), q(\rho, u)\big) = (\rho, u\rho). \tag{1.34}$$

b)

$$\begin{cases} \eta_{\rho\rho} = \frac{p'(\rho)}{\rho^2}\eta_{uu} \\ \eta(0, u) = 0 \\ \eta_\rho(0, u) = u, \end{cases}$$

$$\big(\eta(\rho, u), q(\rho, u)\big) = \Big(\rho u, u^2\rho + p(\rho)\Big). \tag{1.35}$$

c)

$$\begin{cases} \eta_{\rho\rho} = \frac{p'(\rho)}{\rho^2}\eta_{uu} \\ \eta(0, u) = 0 \\ \eta_\rho(0, u) = \frac{1}{2}u^2 - \frac{k^2}{\gamma-1}a^{\gamma-1}, \end{cases}$$

$$\big(\eta(\rho, u), q(\rho, u)\big) = \left(\frac{1}{2}u^2\rho + \rho\int_a^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds, \frac{1}{2}u^3\rho + u\left(p(\rho) + \rho\int_a^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds\right)\right). \tag{1.36}$$

d)

$$\begin{cases} \eta_{\rho\rho} = \frac{p'(\rho)}{\rho^2}\eta_{uu} \\ \eta(0,u) = 0 \\ \eta_\rho(0,u) = u^3 - \frac{6k^2}{\gamma-1}a^{\gamma-1}u, \end{cases}$$

$$\big(\eta(\rho,u), q(\rho,u)\big) = \Bigg(u^3\rho + 6u\rho\int_a^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds, u^4\rho + 3u^2\rho^2\left(\frac{p(\rho)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}\int_a^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds\right)$$
$$+6\left(p(\rho)\int_a^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds - \int_a^\rho \frac{p^2(s)}{s^2}ds\right)\Bigg). \tag{1.37}$$

Haciendo $m = \rho u$ en los pares de entropía débil-flujo (1.34) a (1.37), se obtienen cuatro pares de entropía-flujo para el sistema (1.4),

$$\big(\eta_1(\rho,m), q_1(\rho,m)\big) = (\rho, m), \tag{1.38}$$

$$\big(\eta_2(\rho,m), q_2(\rho,m)\big) = \left(m, \frac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right), \tag{1.39}$$

$$\big(\eta_3(\rho,m), q_3(\rho,m)\big) = \left(\frac{m^2}{2\rho} + \rho\int^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds, \frac{m^3}{2\rho^2} + \left(\frac{p(\rho)}{\rho} + \int^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds\right)m\right), \tag{1.40}$$

$$\big(\eta_4(\rho,m), q_4(\rho,m)\big) = \Bigg(\frac{m^3}{\rho^2} + 6m\int^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds, \frac{m^4}{\rho^3} + 3\left(\frac{p(\rho)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}\int^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds\right)m^2$$
$$+6\left(p(\rho)\int^\rho \frac{p(s)}{s^2}ds - \int^\rho \frac{p^2(s)}{s^2}ds\right)\Bigg). \tag{1.41}$$

Los pares de entropía-flujo (1.38) a (1.41) serán utilizados para establecer la existencia de solución débil al problema de Cauchy del gas dinámico isentrópico con exponente adiabático $1 < \gamma < 3$.

2. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DÉBIL

Un aspecto importante en la teoría de sistemas no lineales de leyes de conservación es la existencia de solución. Se puede obtener la existencia de solución global débil o generalizada al problema de Cauchy para un sistema hiperbólico no lineal de leyes de conservación

$$\begin{cases} U_t + f(U)_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ U(x,0) = U_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

como el límite de soluciones al problema de Cauchy para el sistema parabólico

$$\begin{cases} U_t + f(U)_x = \epsilon U_{xx}, & \epsilon > 0, \\ U(x,0) = U_0(x), \end{cases} \tag{2.2}$$

cuando los coeficientes de viscosidad ϵ tienden a cero.[3] Este método es conocido como el *método de viscosidad* ([1],[2],[4]). El mayor obstáculo en el uso del método de viscosidad es obtener la convergencia de la sucesión $\{U^\epsilon\}$ de soluciones viscosas del problema (2.2) a una solución débil del problema de Cauchy (2.1). Para mostrar esta convergencia usamos la teoría de la *compacidad compensada* ([2],[3],[4],[5]), más especificamente, el teorema de medidas parametrizadas de Tartar ([2],[5]), el cual asegura la existencia de una subsucesión (igualmente denotada por $\{U^\epsilon\}$) de la sucesión $\{U^\epsilon\}$ de soluciones viscosas y de una familia de medidas de probabilidad (o medidas parametrizadas de Young) $\nu_{x,t}$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, así como también el siguiente resultado ([2],[4]).

2.1 Teorema (Convergencia). *$U^\epsilon \to U$ en $L^p_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ cuando $\epsilon \to 0^+$ para todo $1 \le p < \infty$ si y solamente si cada $\nu_{x,t}$ es una medida de Dirac para $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.*

Con el propósito de mostrar la existencia de solución débil al problema de Cauchy (1.2)-(1.3)-(1.18) del gas isentrópico, usaremos el método de viscosidad. Para esto, consideramos primero el problema de Cauchy para el sistema parabólico asociado con (1.4)

$$\begin{cases} \rho^\epsilon_t + m^\epsilon_x = \epsilon \rho^\epsilon_{xx} \\ m^\epsilon_t + \left(\frac{(m^\epsilon)^2}{\rho^\epsilon} + p(\rho^\epsilon) \right)_x = \epsilon m^\epsilon_{xx} \end{cases} \tag{2.3}$$

con valor inicial acotado y medible

$$\big(\rho^\epsilon(x,0), m^\epsilon(x,0)\big) = \big(\rho_0(x), m_0(x)\big), \quad \rho_0(x) \ge 0, \tag{2.4}$$

donde $m^\epsilon = \rho^\epsilon u^\epsilon$ y $\epsilon > 0$.
Para cada ϵ fijo existe solución viscosa $U^\epsilon = \big(\rho^\epsilon(x,t), m^\epsilon(x,t)\big)$ al problema de Cauchy (2.3)-(2.4), obteniendo así una sucesión de soluciones viscosas $\{U^\epsilon\}$ y una familia de medidas de probabilidad determinada por dicha sucesión.

Para probar que las medidas de probabilidad $\nu_{x,t}$ de la familia determinada por la sucesión de soluciones viscosas $\big(\rho^\epsilon, m^\epsilon\big)$ al problema de Cauchy (2.3)-(2.4)

[3] De la teoría de las ecuaciones parabólicas, para cada ϵ fijo existe solución U^ϵ, llamada solución viscosa.

son medidas de Dirac cuando $\rho \geq \alpha > 0$, sin pérdida de generalidad podemos fijar $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ y considerar solamente una medida de probabilidad $\nu = \nu_{x,t}$. También usaremos los cuatro pares de entropía-flujo (1.38) a (1.41) y la ecuación

$$\langle \nu, \eta_i q_j - \eta_j q_i \rangle = \langle \nu, \eta_i \rangle \langle \nu, q_j \rangle - \langle \nu, \eta_j \rangle \langle \nu, q_i \rangle \qquad i \neq j, \tag{2.5}$$

donde (η_i, q_i) y (n_j, q_j) son pares de entropía-flujo del sistema (1.4).
Antes de probar que la medida de probabilidad ν es una medida de Dirac, se enuncia y demuestra el siguiente lema.

2.2 Lema (Entropía-flujo). *Si* $(\eta, q) = \big(\eta(\rho,m), q(\rho,m)\big)$ *es una entropía-flujo del sistema (1.4) entonces* $(Q\eta, Q^*q)$ *es también una entropía-flujo del sistema (1.4), donde*

$$Q\eta = \eta(\rho,m) - \eta(\overline{\rho},\overline{m}) - \nabla\eta(\overline{\rho},\overline{m}) \begin{pmatrix} \rho - \overline{\rho} \\ m - \overline{m} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

y

$$Q^*q = q(\rho,m) - q(\overline{\rho},\overline{m}) - \nabla\eta(\overline{\rho},\overline{m}) \begin{pmatrix} m - \overline{m} \\ \frac{m^2}{\rho} + p(\rho) - \frac{\overline{m}^2}{\overline{\rho}} - p(\overline{\rho}) \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Demostración.
Siendo (η, q) una entropía-flujo del sistema (1.4), se tiene que

$$(q_\rho, q_m) = (\eta_\rho, \eta_m) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + p'(\rho) & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix},$$

de donde,

$$q_\rho = \Big(-\frac{m^2}{\rho^2} + p'(\rho)\Big)\eta_m \quad \text{y} \quad q_m = \eta_\rho + \frac{2m}{\rho}\eta_m. \tag{2.8}$$

Usando (2.6), (2.7) y (2.8) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\Big((Q^*q)_\rho,(Q^*q)_m\Big) &= \left(q_\rho-\Big(-\frac{m^2}{\rho^2}+p'(\rho)\Big)\eta_m(\overline{\rho},\overline{m}),q_m-\eta_\rho(\overline{\rho},\overline{m})-\frac{2m}{\rho}\eta_m(\overline{\rho},\overline{m})\right)\\
&=\Bigg(\Big(-\frac{m^2}{\rho^2}+p'(\rho)\Big)\eta_m(\rho,m)-\Big(-\frac{m^2}{\rho^2}+p'(\rho)\Big)\eta_m(\overline{\rho},\overline{m}),\\
&\qquad\qquad \eta_\rho(\rho,m)+\frac{2m}{\rho}\eta_m(\rho,m)-\eta_\rho(\overline{\rho},\overline{m})-\frac{2m}{\rho}\eta_m(\overline{\rho},\overline{m})\Bigg)\\
&=\Bigg(\Big(-\frac{m^2}{\rho^2}+p'(\rho)\Big)\Big(\eta(\rho,m)-\eta(\overline{\rho},\overline{m})\Big)_m,\\
&\qquad\qquad \Big(\eta(\rho,m)-\eta(\overline{\rho},\overline{m})\Big)_\rho+\frac{2m}{\rho}\Big(\eta(\rho,m)-\eta(\overline{\rho},\overline{m})\Big)_m\Bigg)\\
&=\left(\Big(-\frac{m^2}{\rho^2}+p'(\rho)\Big)(Q\eta)_m,(Q\eta)_\rho+\frac{2m}{\rho}(Q\eta)_m\right),
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\Big((Q^*q)_\rho,(Q^*q)_m\Big)=\Big((Q\eta)_\rho,(Q\eta)_m\Big)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{m^2}{\rho^2}+p'(\rho) & \frac{2m}{\rho}\end{pmatrix}, \tag{2.9}
$$

entonces $(Q\eta,Q^*q)$ es una entropía-flujo del sistema (1.4). □

Ahora se dará una prueba diferente del principal resultado.

2.3 Teorema (Medida de Dirac). *Si la medida de probabilidad ν satisface*

$$
\langle\nu,\eta_iq_j-\eta_jq_i\rangle=\langle\nu,\eta_i\rangle\langle\nu,q_j\rangle-\langle\nu,\eta_j\rangle\langle\nu,q_i\rangle \quad (i,j=1,2,3,4;\quad i\neq j),
$$

donde (n_i,q_i) son pares de entropía-flujo para el sistema (1.4) del gas dinámico isentrópico con $0<\gamma<1$ y $Supp\,\nu\subset\{(\rho,u):\rho\geq\alpha>0\}$ es pequeño entonces ν es una medida de Dirac.

Demostración.
Sean

$$
\overline{v}=(\overline{\rho},\overline{m})=\big(\langle\nu,\rho\rangle,\langle\nu,m\rangle\big) \quad \text{y} \quad \overline{u}=\frac{\overline{m}}{\overline{\rho}}. \tag{2.10}
$$

Para (x,t) fijo $\overline{v}$ es un vector cuyas componentes son escalares y usando los pares de entropía-flujo (1.38) y (1.39), se sigue que

$$
(Q\eta_1,Q^*q_1)=(\rho-\overline{\rho},m-\overline{m}) \tag{2.11}
$$

y

$$(Q\eta_2, Q^*q_2) = \Big(m - \overline{m}, \rho u^2 + p(\rho) - \overline{\rho}\, u^2 - p(\overline{\rho})\Big), \tag{2.12}$$

son aún pares de entropía-flujo del sistema (1.4). Considerando ahora los pares de entropía-flujo (1.40) y (1.41), tal que η_3, η_4 y q_3, q_4 satisfacen respectivamente las ecuaciones (2.6) y (2.7), tenemos que

$$(Q\eta_3, Q^*q_3) = \left(\frac{1}{2}\rho(u-\overline{u})^2 + Q_1, \frac{1}{2}m(u-\overline{u})^2 + (u-\overline{u})\Big(p(\rho) - p(\overline{\rho})\Big) + uQ_1\right) \tag{2.13}$$

y

$$(Q\eta_4, Q^*q_4) = \left(6m\int_{\overline{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds + \rho(u-\overline{u})^2(u+2\overline{u}) - 6\frac{\overline{u}}{\overline{\rho}}p(\overline{\rho})(\rho-\overline{\rho}), 6u^2\rho\int_{\overline{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds\right.$$
$$\left. + 6Q_2 + 3p(\rho)\big(u^2 - \overline{u}^2\big) + u\rho(u-\overline{u})^2(u+2\overline{u}) - 6\frac{\overline{u}}{\overline{\rho}}p(\overline{\rho})(m-\overline{m})\right), \tag{2.14}$$

donde

$$Q_1 = \rho\int_{\overline{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds - \frac{p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}(\rho-\overline{\rho}) \quad \text{y} \quad Q_2 = \int_{\overline{\rho}}^{\rho}\left(p(\rho)\frac{p(s)}{s^2} - \frac{p^2(s)}{s^2}\right)ds. \tag{2.15}$$

Del lema 2.2, tenemos que (2.13) y (2.14) también son pares de entropía-flujo del sistema (1.4).

Por hipótesis, (2.11) a (2.14) satisfacen la ecuación

$$\left\langle \nu, \begin{vmatrix} Q\eta_i & Q^*q_i \\ Q\eta_j & Q^*q_j \end{vmatrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} \langle \nu, Q\eta_i\rangle & \langle \nu, Q^*q_i\rangle \\ \langle \nu, Q\eta_j\rangle & \langle \nu, Q^*q_j\rangle \end{vmatrix} \quad (i,j = 1,2,3,4; \quad i \neq j), \tag{2.16}$$

luego

$$\langle \nu, Q\eta_1 Q^*q_2 - Q\eta_2 Q^*q_1\rangle = \Big\langle \nu, \Big(p(\rho) - p(\overline{\rho})\Big)(\rho-\overline{\rho}) - (u-\overline{u})^2\rho\overline{\rho}\Big\rangle = 0, \tag{2.17}$$

$$\langle \nu, Q\eta_1 Q^*q_3 - Q\eta_3 Q^*q_1\rangle = \left\langle \nu, (u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})p(\rho)\right.$$
$$\left. -\rho\overline{\rho}(u-\overline{u})\int_{\overline{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds - \frac{1}{2}\overline{\rho}\rho(u-\overline{u})^3\right\rangle = 0, \tag{2.18}$$

$$\langle \nu, Q\eta_1 Q^*q_4 - Q\eta_4 Q^*q_1\rangle = \left\langle \nu, 3(\rho-\overline{\rho})\Big(2Q_2 + \big(u^2 - \overline{u}^2\big)p(\rho)\Big)\right.$$

$$-\overline{\rho}\rho(u-\overline{u})^3(u+2\overline{u})-6\overline{\rho}\rho u(u-\overline{u})\int_{\overline{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds\Big\rangle=0. \quad (2.19)$$

De (2.18) se sigue que

$$\Big\langle\nu,-\frac{1}{2}\rho\overline{\rho}(u-\overline{u})^3-\rho\overline{\rho}(u-\overline{u})\int_{\overline{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds\Big\rangle=\big\langle\nu,-(u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})p(\rho)\big\rangle, \quad (2.20)$$

por lo tanto

$$\langle\nu,Q\eta_2Q^*q_3-Q^*q_2Q\eta_3\rangle=\Big\langle\nu,\Big(p(\rho)-p(\overline{\rho})\Big)\Big(\frac{1}{2}\rho(u-\overline{u})^2-Q_1\Big)\Big\rangle. \quad (2.21)$$

También tenemos que

$$\begin{aligned}\langle\nu,Q^*q_2\rangle\langle\nu,Q\eta_3\rangle=\big\langle\nu,\rho u^2-\overline{\rho}\,\overline{u}^2\big\rangle&\Big\langle\nu,\frac{1}{2}\rho(u-\overline{u})^2+\rho\int_{\overline{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds\Big\rangle\\&+\big\langle\nu,p(\rho)\big\rangle\langle\nu,Q_1\rangle+\frac{1}{2}\langle\nu,p(\rho)\rangle\big\langle\nu,\rho(u-\overline{u})^2\big\rangle\\&-\big\langle\nu,p(\overline{\rho})Q_1\big\rangle-\frac{1}{2}\big\langle\nu,\rho p(\overline{\rho})(u-\overline{u})^2\big\rangle. \quad (2.22)\end{aligned}$$

Además de (2.16) se sigue que

$$\langle\nu,Q\eta_2Q^*q_3-Q^*q_2Q\eta_3\rangle+\langle\nu,Q^*q_2\rangle\langle\nu,Q\eta_3\rangle=0, \quad (2.23)$$

reemplazando (2.21) y (2.22) en (2.23), obtenemos

$$\begin{aligned}&\big\langle\nu,\rho u^2-\overline{\rho}\,\overline{u}^2\big\rangle\Big\langle\nu,\frac{1}{2}\rho(u-\overline{u})^2+\rho\int_{\overline{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds\Big\rangle+\langle\nu,p(\rho)\rangle\langle\nu,Q_1\rangle\\&-\langle\nu,p(\rho)Q_1\rangle+\frac{1}{2}\langle\nu,p(\rho)\rangle\big\langle\nu,\rho(u-\overline{u})^2\big\rangle-\frac{1}{2}\big\langle\nu,\rho p(\overline{\rho})(u-\overline{u})^2\big\rangle\\&\qquad+\Big\langle\nu,\rho(u-\overline{u})^2\Big(p(\rho)-p(\overline{\rho})\Big)\Big\rangle=0. \quad (2.24)\end{aligned}$$

Restando el producto de la ecuación (2.18) por $6\overline{u}$ de (2.19), se obtiene

$$\Big\langle\nu,3(\rho-\overline{\rho})\Big(2Q_2+(u-\overline{u})^2p(\rho)\Big)-\overline{\rho}\rho(u-\overline{u})^4-6\overline{\rho}\rho(u-\overline{u})^2\int_{\overline{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds\Big\rangle=0. \quad (2.25)$$

Definiendo

$$O_{ij} = \big\langle \nu, O\big((u-\overline{u})^i(\rho-\overline{\rho})^j\big)\big\rangle, \tag{2.26}$$

usando la *fórmula de Taylor* y (2.24) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{p'(\overline{\rho})}{2}+\frac{\overline{\rho}p''(\overline{\rho})}{4}\right)\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho}^2)\big\rangle\big\langle \nu,(u-\overline{u})^2\big\rangle+\left(\frac{p'(\overline{\rho})}{2}+\frac{\overline{\rho}p''(\overline{\rho})}{4}\right)\\
&\times\big\langle \nu,(u-\overline{u})^2(\rho-\overline{\rho})^2\big\rangle+\frac{1}{2}\overline{\rho}^2\big\langle \nu,(u-\overline{u})^2\big\rangle^2+\frac{2p'^2(\overline{\rho})-5\overline{\rho}p'(\overline{\rho})p''(\overline{\rho})}{12\overline{\rho}^2}\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^4\big\rangle\\
&+\frac{p''(\overline{\rho})p'(\overline{\rho})}{4\overline{\rho}}\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^2\big\rangle^2+\frac{1}{2}\overline{\rho}p'(\overline{\rho})\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})(u-\overline{u})^2\big\rangle-\frac{p'^2(\overline{\rho})}{2\overline{\rho}}\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^3\big\rangle\\
&+O_{21}\cdot O_{20}+O_{20}\cdot O_{03}+O_{02}\cdot O_{03}+O_{21}\cdot O_{02}+O_{23}+O_{05}=0,
\end{aligned}\tag{2.27}$$

también de (2.25) resulta que

$$\begin{aligned}
&\Bigg\langle \nu,\frac{3p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^2}(\rho-\overline{\rho})^3+\left(\frac{2p''(\overline{\rho})p(\overline{\rho})+p'^2(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^2}-\frac{2p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^3}\right)(\rho-\overline{\rho})^4\\
&\qquad -\overline{\rho}^2(u-\overline{u})^4-3p(\overline{\rho})(u-\overline{u})^2(\rho-\overline{\rho})\Bigg\rangle+O_{05}+O_{41}+O_{23}=0,
\end{aligned}\tag{2.28}$$

multiplicando (2.27) por $\frac{6p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}p'(\overline{\rho})}$ y sumando este producto con (2.28), se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2p'^2(\overline{\rho})-p''(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{2\overline{\rho}^2}-\frac{p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^3}\right)\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^4\big\rangle+\frac{3p(\overline{\rho})p''(\overline{\rho})}{2\overline{\rho}^2}\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^2\big\rangle^2\\
&+\left(\frac{3p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}+\frac{3p(\overline{\rho})p''(\overline{\rho})}{2p'(\overline{\rho})}\right)\Big(\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^2\big\rangle\big\langle \nu,(u-\overline{u})^2\big\rangle+\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^2(u-\overline{u})^2\big\rangle\Big)\\
&+\frac{3\overline{\rho}p(\overline{\rho})}{p'(\overline{\rho})}\big\langle \nu,(u-\overline{u})^2\big\rangle^2=\overline{\rho}^2\big\langle \nu,(u-\overline{u})^4\big\rangle+O_{05}+O_{41}+O_{23}+O_{21}\cdot O_{20}\\
&\qquad\qquad +O_{20}\cdot O_{03}+O_{02}\cdot O_{03}+O_{21}\cdot O_{02}.
\end{aligned}\tag{2.29}$$

Ya que

$$\langle \nu, Q\eta_3\rangle=\left\langle \nu,\frac{1}{2}\overline{\rho}(u-\overline{u})^2+\frac{p'(\overline{\rho})}{2\overline{\rho}}(\rho-\overline{\rho})^2\right\rangle+O_{21}+O_{03}, \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nu, Q^*q_3\rangle=&\left\langle \nu,p'(\overline{\rho})(u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})+\frac{p'(\overline{\rho})}{2\overline{\rho}}\overline{u}(\rho-\overline{\rho})^2+\frac{1}{2}\overline{\rho}\,\overline{u}(u-\overline{u})^2\right\rangle\\
&+O_{21}+O_{12}+O_{30}+O_{03},
\end{aligned}\tag{2.31}$$

$$\langle \nu, Q\eta_4\rangle = \left\langle \nu, 6(u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})\frac{p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}} + 3\frac{\overline{u}}{\overline{\rho}}p'(\overline{\rho})(\rho-\overline{\rho})^2 + 3\overline{u}\,\overline{\rho}(u-\overline{u})^2 \right\rangle$$
$$+O_{21} + O_{30} + O_{12} + O_{03}, \tag{2.32}$$
$$\langle \nu, Q^* q_4\rangle = \Big\langle \nu, \frac{3p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^2}(\rho-\overline{\rho})^2 + 6\overline{u}p'(\overline{\rho})(u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})$$
$$+3\Big(\overline{\rho}\,\overline{u}^2 + p(\overline{\rho})\Big)(u-\overline{u})^2 + 3\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}}p'(\overline{\rho})(\rho-\overline{\rho})^2$$
$$+6\frac{\overline{u}}{\overline{\rho}}p(\overline{\rho})(u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})\Big\rangle + O_{30} + O_{21} + O_{12} + O_{03}, \tag{2.33}$$

tenemos que

$$\langle \nu, Q\eta_3\rangle\langle \nu, Q^* q_4\rangle - \langle \nu, Q\eta_4\rangle\langle \nu, Q^* q_3\rangle = \frac{3}{2}\overline{\rho}p(\overline{\rho})\Big\langle \nu, (u-\overline{u})^2\Big\rangle^2$$
$$+ \frac{3p'^2(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{2\overline{\rho}^3}\Big\langle \nu, (\rho-\overline{\rho})^2\Big\rangle^2 + \frac{3p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}\Big\langle \nu, (\rho-\overline{\rho})^2\Big\rangle\Big\langle \nu, (u-\overline{u})^2\Big\rangle$$
$$- \frac{6p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}\langle \nu, (\rho-\overline{\rho})(u-\overline{u})\rangle^2 + O_{20}\cdot O_{30} + O_{20}\cdot O_{21} + O_{20}\cdot O_{12}$$
$$+ O_{20}\cdot O_{03} + O_{02}\cdot O_{30} + O_{02}\cdot O_{21} + O_{02}\cdot O_{12} + O_{02}\cdot O_{03}$$
$$+ O_{11}\cdot O_{21} + O_{11}\cdot O_{12} + O_{11}\cdot O_{30} + O_{11}\cdot O_{03}. \tag{2.34}$$

Además,

$$\langle \nu, Q\eta_3 Q^* q_4 - Q\eta_4 Q^* q_3\rangle = \Big\langle \nu, \frac{3}{2}\overline{\rho}p(\overline{\rho})(u-\overline{u})^4 - 3\frac{p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}(u-\overline{u})^2(\rho-\overline{\rho})^2$$
$$+\frac{3}{2}\frac{p'^2(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^3}(\rho-\overline{\rho})^4\Big\rangle + O_{41} + O_{23} + O_{05}. \tag{2.35}$$

Sustituyendo (2.34) y (2.35) en (2.16) tenemos que

$$\frac{3}{2}\overline{\rho}p(\overline{\rho})\Big\langle \nu, (u-\overline{u})^4\Big\rangle - \frac{3p(\overline{\rho})p'(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}\Big\langle \nu, (u-\overline{u})^2(\rho-\overline{\rho})^2\Big\rangle + \frac{3}{2}\frac{p'^2(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^3}\Big\langle \nu, (\rho-\overline{\rho})^4\Big\rangle$$
$$= \frac{3}{2}\overline{\rho}p(\overline{\rho})\Big\langle \nu, (u-\overline{u})^2\Big\rangle^2 + \frac{3}{2}\frac{p'^2(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^3}\Big\langle \nu, (\rho-\overline{\rho})^2\Big\rangle^2$$
$$+ \frac{3p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}\Big\langle \nu, (\rho-\overline{\rho})^2\Big\rangle\Big\langle \nu, (u-\overline{u})^2\Big\rangle - \frac{6p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}\langle \nu, (u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})\rangle^2$$
$$+ O_{20}\cdot O_{30} + O_{20}\cdot O_{21} + O_{20}\cdot O_{12} + O_{20}\cdot O_{03} + O_{02}\cdot O_{30} + O_{02}\cdot O_{21}$$
$$+ O_{02}\cdot O_{12} + O_{02}\cdot O_{03} + O_{11}\cdot O_{21} + O_{11}\cdot O_{12} + O_{11}\cdot O_{30} + O_{11}\cdot O_{03}$$
$$+ O_{41} + O_{23} + O_{05}. \tag{2.36}$$

Sumando (2.36) con el producto de $\frac{2\gamma k^2\overline{\rho}^{\gamma-1}}{\gamma+1}$ por (2.29), se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{\overline{\rho}}{2(\gamma+1)}\Big(3(\gamma+1)p(\overline{\rho})-4k^2\gamma\overline{\rho}^{\gamma}\Big)\big\langle\nu,(u-\overline{u})^4\big\rangle+\Bigg[\frac{2k^2\gamma\overline{\rho}^{\gamma-3}}{\gamma+1}\Bigg(p'^2(\overline{\rho})\\
&\qquad\qquad-\frac{p''(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{2}-\frac{p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}\Bigg)+\frac{3}{2}\frac{p'^2(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^3}\Bigg]\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^4\big\rangle\\
&+\frac{3\overline{\rho}p(\overline{\rho})}{2(\gamma+1)p'(\overline{\rho})}\Big(2k^2\gamma\overline{\rho}^{\gamma-1}-(\gamma+1)p'(\overline{\rho})\Big)\big\langle\nu,(u-\overline{u})^2\big\rangle^2\\
&+\frac{6p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}\langle\nu,(u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})\rangle^2+\frac{3p(\overline{\rho})}{2(\gamma+1)\overline{\rho}^3}\Big(2k^2\gamma\overline{\rho}^{\gamma}p''(\overline{\rho})\\
&\quad-(\gamma+1)p'^2(\overline{\rho})\Big)\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^2\big\rangle^2+\Bigg[\frac{6k^2\gamma\overline{\rho}^{\gamma-1}p(\overline{\rho})}{\gamma+1}\Bigg(\frac{1}{\overline{\rho}}+\frac{p''(\overline{\rho})}{2p'(\overline{\rho})}\Bigg)\\
&\quad-\frac{3p'(\overline{\rho})p(\overline{\rho})}{\overline{\rho})}\Bigg]\Big(\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^2\big\rangle\big\langle\nu,(u-\overline{u})^2\big\rangle+\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^2(u-\overline{u})^2\big\rangle\Big)\\
&+O_{05}+O_{41}+O_{23}+O_{21}\cdot O_{20}+O_{20}\cdot O_{03}+O_{02}\cdot O_{03}+O_{21}\cdot O_{02}\\
&+O_{20}\cdot O_{30}+O_{20}\cdot O_{12}+O_{02}\cdot O_{12}+O_{11}\cdot O_{21}+O_{11}\cdot O_{12}+O_{11}\cdot O_{30}\\
&+O_{11}\cdot O_{03}=0,
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

sustituyendo en esta ecuación $p(\rho)$ por $k^2\rho^\gamma$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{(3-\gamma)k^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{\gamma+1}\big\langle\nu,(u-\overline{u})^4\big\rangle+\frac{(5\gamma+1)k^6\gamma^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{3\gamma-5}\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^4\big\rangle\\
&\quad+\frac{3(3-\gamma)k^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{\gamma+1}\big\langle\nu,(u-\overline{u})^2\big\rangle^2+6\gamma k^4\overline{\rho}^{2\gamma-2}\langle\nu,(u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})\rangle^2\\
&\quad+\frac{3(\gamma-3)k^6\gamma^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{3\gamma-5}\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^2\big\rangle^2+O_{05}+O_{41}+O_{23}+O_{21}\cdot O_{20}\\
&\quad+O_{20}\cdot O_{03}+O_{02}\cdot O_{03}+O_{21}\cdot O_{02}+O_{20}\cdot O_{30}+O_{20}\cdot O_{12}+O_{02}\cdot O_{12}\\
&\quad+O_{11}\cdot O_{21}+O_{11}\cdot O_{12}+O_{11}\cdot O_{30}+O_{11}\cdot O_{03}=0.
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

De la *desigualdad de Hölder* se sigue que

$$\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^2\big\rangle^2\leq\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^4\big\rangle, \tag{2.39}$$

de aquí, como $1<\gamma<3$, se tiene que

$$\frac{3(\gamma-3)k^6\gamma^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{3\gamma-5}\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^2\big\rangle^2\geq\frac{3(\gamma-3)k^6\gamma^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{3\gamma-5}\big\langle\nu,(\rho-\overline{\rho})^4\big\rangle, \tag{2.40}$$

empleando esta desigualdad y (2.38) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{(3-\gamma)k^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{\gamma+1}\big\langle \nu,(u-\overline{u})^4\big\rangle+\frac{(5\gamma+1)k^6\gamma^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{3\gamma-5}\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^4\big\rangle\\
&+\frac{3(3-\gamma)k^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{\gamma+1}\big\langle \nu,(u-\overline{u})^2\big\rangle^2+6\gamma k^4\overline{\rho}^{2\gamma-2}\langle \nu,(u-\overline{u})(\rho-\overline{\rho})\rangle^2\\
&+\frac{3(\gamma-3)k^6\gamma^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{3\gamma-5}\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^4\big\rangle+O_{05}+O_{41}+O_{23}+O_{21}\cdot O_{20}\\
&+O_{20}\cdot O_{03}+O_{02}\cdot O_{03}+O_{21}\cdot O_{02}+O_{20}\cdot O_{30}+O_{20}\cdot O_{12}+O_{02}\cdot O_{12}\\
&+O_{11}\cdot O_{21}+O_{11}\cdot O_{12}+O_{11}\cdot O_{30}+O_{11}\cdot O_{03}\leq 0,
\end{aligned}\tag{2.41}$$

de donde

$$\frac{(3-\gamma)k^2}{2(\gamma+1)}\overline{\rho}^{\gamma+1}\big\langle \nu,(u-\overline{u})^4\big\rangle+\frac{4(\gamma-1)k^6\gamma^2}{\gamma+1}\overline{\rho}^{3\gamma-5}\big\langle \nu,(\rho-\overline{\rho})^4\big\rangle\leq 0,\tag{2.42}$$

entonces ν es una *medida de Dirac* y el punto soporte es $(\overline{\rho},\overline{u})$. □

Como consecuencia del método de viscosidad y de los teoremas 2.1 y 2.3 tenemos el siguiente resultado, el cual establece la existencia de solución débil para el problema de Cauchy del gas dinámico isentrópico cuando las soluciones viscosas $\big(\rho^\epsilon(x,t),m^\epsilon(x,t)\big)$ son tales que $\rho^\epsilon(x,t)>0$.

2.4 Teorema (Existencia de solución débil). *Si la sucesión de soluciones viscosas $(\rho^\epsilon,m^\epsilon)$ al problema de Cauchy (2.3)-(2.4) es tal que $\rho^\epsilon>0$, entonces existe una subsucesión $\big\{(\rho^\epsilon,m^\epsilon)\big\}$ convergente en $L^1_{loc}\big(\mathbb{R}\times(0,+\infty)\big)$, es decir,*

$$\big(\rho^\epsilon,\rho^\epsilon u^\epsilon\big)\to\big(\rho,\rho u\big)\quad \text{en } L^1_{loc}\big(\mathbb{R}\times(0,+\infty)\big),\tag{2.43}$$

cuando $\epsilon\to 0^+$, donde el par de funciones límite (ρ,u) es solución débil al problema de Cauchy (1.2)-(1.3)-(1.18).

REFERENCIAS

[1] R. J. Diperna, *Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics*, Commun. Math. Phys. **91** (1983), 1-30.

[2] Y. G. Lu, *Compensated Compactness Method and Hyperbolic Conservation Laws*, CRC, USA, 2002.

[3] F. Murat, *Compacité par compensation*, Scuola Norm. Sup. Pisa **5** (1978), 489-507.

[4] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[5] T. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, In: Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt symposium **4** (1979), 183-200.