Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VIII No. 2 (2001), pp. 60 – 67

REGULARIDAD POR DEBAJO DEL UMBRAL DE CONTINUIDAD

TATIANA TORO (*)

1. Introducción

La meta principal de este artículo es mostrar que (bajo las hipótesis adecuadas) el comportamiento en la frontera de la soluciones de la ecuación de Laplace en un dominio dado, determina completamente la regularidad de la frontera.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un dominio NTA (la definición se halla a continuación) el problema de Dirichlet tiene una solución. Además la frontera de Martin coincide con la frontera topológica ([JK1]), i.e. para cada función continua y acotada, $f \in C_b(\mathbb{R}^{n+1})$, existe una función u que satisface

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

y para cada $X \in \Omega$ la solución u puede ser representada de la siguiente manera

$$u(X) = \int_{\partial\Omega} f(Q)\, d\omega^X(Q) \tag{1.2}$$

donde $\{\omega^X\}_{X\in\Omega}$ es una familia de medidas de probabilidad. ω^X es la *medida armónica* de Ω con polo X.

> **Pregunta.** *Qué información nos brinda la regularidad de ω^X sobre la geometría de la frontera de Ω?*

(*) Este artículo está basado en la charla dada por el autor durante el simposio organizado, en Diciembre del 2001, para celebrar los 50 años de la fundación del departamento de Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Los resultados presentados son parte de un trabajo conjunto con C. Kenig
El autor está parcialmente financionado por la NSF.

Para responder esta pregunta tan general debemos recordar la definición de dominio no-tangencialmente accesible (NTA). Una *bola M-no-tangencial* $B(X,r)$, en un dominio Ω, es una bola en Ω cuya distancia a $\partial\Omega$ es comparable con su radio; i.e. $Mr > d(B(X,r),\partial\Omega) > M^{-1}r$. Para X_1, $X_2 \in \Omega$ una *cadena de Harnack* de X_1 a X_2 en Ω es una sucesión finita de bolas M-no-tangenciales, tal que la primera bola contiene a X_1, y la última contiene a X_2, y tal que dos bolas consecutivas tienen interesección no vacía. El número de bolas en la cadena es la longitud de la cadena.

Definición 1.1 ([JK1]). *Un dominio acotado (resp. no acotado) Ω en $\mathbb{R}^{n+1}$ es no-tangencialmente accesible si existen constantes $M > 1$ y $R > 0$ (resp. $R = \infty$) tales que:*

1. *Condición del sacacorchos. Para cualquier $Q \in \partial\Omega$, $r < R$ (resp. $r > 0$) existe $A = A(r,Q) \in \Omega$ tal que $M^{-1}r < |A - Q| < r$ y $d(A,\partial\Omega) > M^{-1}r$.*
2. *Ω^c satisface la condición del sacacorchos.*
3. *Condición de la cadena de Harnack. Si $\epsilon > 0$ y X_1, $X_2 \in \Omega \cap B(\frac{r}{4},Q)$ para algún $Q \in \partial\Omega$, $r < R$ (resp. $r > 0$), $d(X_j,\partial\Omega) > \epsilon$ y $|X_1 - X_2| < 2^k\epsilon$, entonces existe una cadena de Harnack de X_1 a X_2 de longitud Mk y tal que el diámetro de cada bola está acotado inferiormente por $M^{-1}\min\{\operatorname{dist}(X_1,\partial\Omega), \operatorname{dist}(X_2,\partial\Omega)\}$.*

Cuando Ω es un dominio no acotado requerimos como parte de la definición de dominio NTA que $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\partial\Omega$ divida a $\mathbb{R}^{n+1}$ en dos componentes conexas distintas Ω y $\operatorname{int}\Omega^c \neq \emptyset$.

En un dominio NTA Ω, la función de Green $G(X,-)$, con polo en X, satisface

$$\begin{cases} \Delta G(X,-) = -\delta_{\{X\}} & \text{en } \Omega \\ G(X,-) = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

En particular si $X \in \Omega\backslash B(Q_0,r_0)$ para $Q_0 \in \partial\Omega$ y $r_0 > 0$ entonces

$$\begin{cases} \Delta G(X,-) = 0 & \text{en } \Omega \cap B(Q_0,r_0) \\ G(X,-) = 0 & \text{en } \partial\Omega \cap B(Q_0,r_0) \\ G(X,-) > 0 & \text{en } \Omega \cap B(Q_0,r_0). \end{cases}$$

Además si $\phi \in C_c^\infty(B(Q_0,r_0))$ entonces

$$\int_{\Omega\cap B(Q_0,r_0)} \Delta\phi(Y)G(X,Y)dY = \int_{\partial\Omega\cap B(Q_0,r_0)} \phi(Q)d\omega^X(Q).$$

Si Ω es un dominio NTA no acotado, tomando el límite de múltiplos adecuados de las funciones de Green con polos que tienden a infinito, obtenemos el siguiente resultado (ver la sección 3 de [KT1]).

Proposición 1.1. [KT1]. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio NTA no acotado. Existe entonces una única función (salvo multiplicación por una constante positiva) u* *que satisface:*

$$\left\{\begin{array}{rl} \Delta u = 0 & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \\ u > 0 & en\ \Omega \end{array}\right. \tag{1.4}$$

y

(1.5)

$$\int_\Omega u(Y)\Delta\varphi(Y)\,dY = \int_{\partial\Omega}\varphi(Q)d\omega(Q) \quad \textit{para toda función} \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

La función u es la función de Green con polo en el infinito, ω es la medida armónica correspondiente.

Comentario 1.1. *Si Ω es un dominio NTA no acotado cuya frontera es C^1 (i.e. localmente Ω es el área sobre el grafo de una función C^1) entonces el teorema de Green asegura que $\forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$*

$$\int_\Omega u(Y)\Delta\varphi(Y)\,dY = \int_{\partial\Omega}\varphi(Q)h(Q)\,d\sigma(Q), \tag{1.6}$$

donde

$$h(Q) = \frac{\partial u}{\partial n}(Q) = \nabla u \cdot \overrightarrow{n} = \frac{d\omega}{d\sigma}, \tag{1.7}$$

y $\overrightarrow{n}$ denota el vector unitario normal interno de $\partial\Omega$. En este caso h es el núcleo de Poisson con polo en el infinito. En particular si $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}_+$ la función $u(x_1, ..., x_{n+1}) = x_{n+1}$ es una función armónica positiva en Ω con valor 0 en $\partial\Omega$. Además $h \equiv 1$.

> **Pregunta.** *Cómo influye la regularidad de h y/o ω sobre la regularidad y la geometría de la frontera del dominio?*

2. Resultados clásicos y un ejemplo preocupante

De ahora en adelante suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un dominio NTA no acotado. Antes de reponder la pregunta anterior nos gustaría recordar los resultados clásicos de regularidad en la frontera para las soluciones del Laplaciano. Queremos hacer resaltar el paralelismo que existen entre estos dos tipos de resultados.

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } \Omega \text{ es } C^\infty,\ \vec{n} \in C^\infty & \Longrightarrow & \log h \in C^\infty \\ \text{Si } \Omega \text{ es } C^{k+1,\alpha},\ \vec{n} \in C^{k,\alpha} & \Longrightarrow & \log h \in C^{k,\alpha} \\ \text{Si } \Omega \text{ es } C^{1,\alpha},\ \vec{n} \in C^{0,\alpha} & \Longrightarrow & \log h \in C^{0,\alpha} \end{array}$$

Kellogg

Pregunta. *Qué pasa cuando $\alpha \to 0$?*

$$\text{Si } \Omega \text{ es } C^1, \quad \vec{n} \in C^0 \quad \Longrightarrow \quad \log h \in \text{VMO}(\partial\Omega)$$

Jerison-Kenig

Este último resultado debe entenderse como un ejemplo en que resultado límite falla. Esto indica que la clase de funciones continuas no es la clase *correcta* en esta situación. A grosso modo, la clase de funciones en VMO, consiste de aquellas funciones cuya oscilación promedio en bolas de radio r se desvanece a medida que el radio disminuye hacia 0. La definición de VMO aparece en la sección 3 (ver definición 3.5).

Los siguientes resultados responden a la pregunta de la sección anterior para nociones tradicionales de regularidad. Nótese la simetría entre estos resultados y los presentados anteriormente.

Si Ω es $C^{1,\alpha}$, $\log h \in C^{k,\alpha} \implies \Omega$ es $C^{k+1,\alpha}$, $\vec{n} \in C^{k,\alpha}$

Kinderlehrer-Nirenberg

Isakov

Si Ω es C^1, $\log h \in C^{0,\alpha} \implies \Omega$ es $C^{1,\alpha}$, $\vec{n} \in C^{0,\alpha}$

Alt-Caffarelli

Si Ω es C^1, $h \equiv 1 \implies \Omega = \mathbb{R}^{n+1}_+$, $\vec{n} = e_{n+1}$, (módulo translación y rotación)

Alt-Caffarelli

El número $\beta \in (0,1)$ que aparece en el primer resultado de Alt y Caffarelli, depende a priori de n y de $\alpha \in (0,1)$. Jerison demostró que $\beta = \alpha$. Para los detalles de los resultados mencionados previamente ver [KN], [AC] and [J]. En realidad, Alt y Caffarelli demostraron un resultado más general que el anterior (ver la sección 3). En particular no es necesario que el dominio Ω sea C^1. Por otra parte algunas de la hipótesis sobre la regularidad y la geometría del dominio son necesarias como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. *CONO DE KOWALSKI-PREISS*

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : |x_4| < \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right\}\\ &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_4 = r\cos\theta; r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2},\ \theta \in [\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]\right\}\end{aligned}$$

La función $u(x) = -\frac{r}{2\sqrt{2}}\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ *verifica*

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & en\ \Omega\\ u > 0 & en\ \Omega\\ u = 0 & en\ \partial\Omega\\ \frac{\partial u}{\partial n} = h = 1 & en\ \partial\Omega\backslash\{0\}.\end{cases}$$

Nótese que $\partial\Omega$ no es un hiperplano y que $\vec{n}$ no es constante. Este cono tiene otras propiedades muy interesantes, véase [KP].

3. Resultados

Necesitamos introducir un par de definiciones para poder establecer los resultados de Alt y Caffarelli en su forma más general, y presentar nuestros resultados.

Definición 3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto de perímetro localmente finito (ver definición en* [EG]*), $\partial\Omega$ es* regular en el sentido de Ahlfors *si existe una constante $C > 1$ tal que para cada $Q \in \partial\Omega$ y $r > 0$, la medida de superficie de la frontera, $\sigma = \mathcal{H}^n \llcorner \partial\Omega$ satisface*

$$C^{-1} r^n \leq \sigma(B(Q,r)) \leq C r^n. \tag{3.1}$$

Definición 3.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, decimos que Ω tiene la* propiedad de separación *si para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ existe $R > 0$ tal que para $Q \in \partial\Omega \cap K$ y $r \in (0, R]$ existe in plano n-dimensional $\mathcal{L}(Q,r)$ que contiene a Q y un vector unitario normal a $\mathcal{L}(Q,r)$, $\overrightarrow{n_{Q,r}}$ tal que*

(3.2)

$$\mathcal{T}^+(Q,r) = \left\{ X = (x,t) = x + t\overrightarrow{n_{Q,r}} \in B(Q,r) : x \in \mathcal{L}(Q,r), t > \frac{1}{4}r \right\} \subset \Omega,$$

y

(3.3)

$$\mathcal{T}^-(Q,r) = \left\{ X = (x,t) = x + t\overrightarrow{n_{Q,r}} \in B(Q,r) : x \in \mathcal{L}(Q,r), t < -\frac{1}{4}r \right\} \subset \Omega^c.$$

Además si Ω es un dominio no acotado también se requiere que $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \partial\Omega$ divida $\mathbb{R}^{n+1}$ en dos componentes conexas distintas Ω y $\operatorname{int} \Omega^c \neq \emptyset$.

La notación $(x,t) = x + t\overrightarrow{n_{Q,r}}$ se usa para denotar un punto en $\mathbb{R}^{n+1}$. La primera componente, x, en el par pertenece a un plano n-dimensional cuyo vector unitario normal es $\overrightarrow{n_{Q,r}}$. La segunda componente t pertenece a $\mathbb{R}$.

Definición 3.3. *Si $\delta \in (0, \delta_n)$, y $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, decimos que Ω es un* dominio plano en el sentido de Reifenberg *(con constante δ) si Ω tiene la propiedad de separación, y*

- $\theta(Q,r) \leq \delta$, $\forall Q \in \partial\Omega$ $\forall r \in (0,1)$.
- $\theta(Q,r) < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, $\forall Q \in \partial\Omega$ $\forall r \geq 1$ *(si Ω es no acotado).*

La cantidad $\theta(Q,r)$ mide qué tan lejos esta $\partial\Omega$ de un plano n-dimensional en el punto Q y en el radio r, i.e.

$$\theta(Q,r) = \frac{1}{r} \inf_{L \ni Q} D[\partial\Omega \cap B(Q,r), L \cap B(Q,r)], \tag{3.4}$$

donde D denota la distancia de Hausdorff.

Nótese que esta definición sólo contiene información cuando δ es pequeño. El hecho que $\theta(Q,r) < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, $\forall Q \in \Omega$, $\forall r \geq 1$ asegura que el cono de Kowalski-Preiss no es un dominio plano en el sentido de Reifenberg.

Proposición 3.1. [KT2] *Existe $\delta_n > 0$ tal que si $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un dominio plano en el sentido de Reifenberg con constante δ y $\delta \in (0, \delta_n)$ entonces Ω es un dominio NTA.*

De ahora en adelante tomamos δ suficientemente pequeño para asegurar que todo dominio plano en el sentido de Reifenberg con constante δ es un dominio NTA. De nuevo todos nuestros dominios son no acotados.

Definición 3.4. *Sea $\delta \in (0, \delta_n)$. Un conjunto de perímetro localmente finito $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un* dominio de Reifenberg regular *con constante δ, si Ω es un dominio plano en el sentido de Reifenberg con constante δ, cuya frontera es regular en el sentido de Ahlfors.*

Si Ω es un dominio de Reifenberg regular con constante δ la medida de superficie de la frontera σ y la medida armónica ω son mutuamente absolutamente continuas (ver [DJ, S]). La derivada de Radon-Nikodyn $h = \frac{d\omega}{d\sigma}$ denota el núcleo de Poisson correspondiente.

Teorema 3.1. [AC] *Supóngase que*

1. *$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un dominio de Reifenberg regular con constante δ suficientemente pequeña;*
2. *$\log h \in C^{0,\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$.*

Entonces Ω es un dominio $C^{1,\alpha}$ para algún $\alpha \in (0,1)$ que depende de β y de n, i.e. $\overrightarrow{n} \in C^{0,\alpha}$. Además si $h \equiv 1$ entonces Ω es $\mathbb{R}^{n+1}_+$ módulo una translación y una rotación.

Pregunta. *Qué pasa cuando $\alpha \to 0$ (i.e. cuando $\log h \in C^0$)?*

De nuevo la clase de funciones continuas no nos brinda el resultado correcto. Definimos ahora la clase VMO mencionada anteriormente.

Definición 3.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio de Reifenberg regular con constante suficientemente pequeña. Sea $f \in L^2_{\text{loc}}(d\sigma)$, decimos que $f \in \text{BMO}(\partial\Omega)$ si*

$$\sup_{r>0} \sup_{Q \in \partial\Omega} \|f\|_*(B(Q,r)) < \infty, \tag{3.5}$$

donde

$$\|f\|_*(B(Q,r)) = \sup_{0<s<r} \Big(⨍_{B(Q,s)} |f - f_{Q,s}|^2 d\sigma \Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.6}$$

$\sigma = \mathcal{H}^n \llcorner \partial\Omega$, y $f_{Q,s} = ⨍_{B(Q,s)} f\, d\sigma$. La clase $\text{VMO}(\partial\Omega)$ es la clausura en $\text{BMO}(\partial\Omega)$ de las funciones acotadas y uniformemente continuas definidas en $\partial\Omega$.

El siguiente resultado es análogo al resultado de Alt y Caffarelli, y corresponde a un resultado de frontera libre por debajo del umbral de continuidad.

Teorema 3.2. [KT3] *Supóngase que*

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *es un dominio de Reifenberg regular con constante δ suficientemente pequeña;*
2. $\log h \in \mathrm{VMO}(\partial\Omega)$.

Entonces $\overrightarrow{n} \in \mathrm{VMO}(\partial\Omega)$. Si $h = 1$ σ-a.e en $\partial\Omega$ entonces Ω es $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ módulo una translación y una rotación.

Cuando $n = 1$ Pommerenke demostró este teorema en el caso acotado usando métodos de variable compleja (ver [P]).

Para terminar nos gustaría resaltar un resultado que juega un papel clave en la demostración del Teorema 3.2, el cual es una una generalización de un resultado de Alt y Caffarelli.

Teorema 3.3. [KT4] *Existe $\delta_n > 0$ tal que si $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un dominio de Reifenberg regular con constante δ, con $\delta \in (0, \delta_n)$ y v y k satisfacen*

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \textit{en } \Omega \\ v > 0 & \textit{en } \Omega \\ v = 0 & \textit{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

y

$$\int_{\Omega} v\Delta\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi k \, d\sigma \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}\mathbb{R}^{n+1} \tag{3.8}$$

con

$$\sup_{X\in\Omega} |\nabla v(X)| \leq 1 \quad y \quad k(Q) \geq 1 \quad \sigma - a.e. \; Q \in \partial\Omega, \tag{3.9}$$

entonces $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}_{+}$ módulo una rotación y una translación.

Referencias

[AC] H. W. Alt & L. A. Caffarelli, Existence and Regularity for a minimum problem with free boundary, *J. Reine Angew. Math.* **325** (1981), 105–144.

[DJ] G. David & D. Jerison, Lipschitz Approximation to Hypersurfaces, Harmonic Measure, and Singular Integrals, *Indiana Univ. Math. J.* **39** (1990), 831–845.

[EG] L. C. Evans & R. F. Gariepy, *Measure Theory and Find Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[J] D. Jerison, Regularity of the Poisson Kernel and Free Boundary Problems, *Colloquium Mathematicum*, 60–61, (1990), 547–567.

[JK1] D. Jerison & C. Kenig, Boundary Behavior of Harmonic Functions in Nontangentially Accessible Domains, *Adv. in Math.* **46** (1982), 80–147.

[KT1] C. Kenig & T. Toro, Free Boundary Regularity for harmonic measures and Poisson kernels, *Ann. of Math.* **150** (1999), 369–454.

[KT2] C. Kenig & T. Toro, Harmonic measure on locally flat domains, *Duke Math. Journal* **87** (1997), 509–551.

[KT3] C. Kenig & T. Toro, Poisson Kernel Characterization of Reifenberg Flat Chord Arc Domains, por aparecer en Annales Scientifiques de l' Ecole Normale Supérieure.

[KT4] C. Kenig & T. Toro, On the Free Boundary Regularity Theorem of Alt and Caffarelli, por aparecer.

[KN] D. Kinderlehrer & L. Nirenberg, Regularity in Free Boundary problems, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **4** (1977), 373-391.

[KP] O. Kowalski & D. Preiss, Besicovitch-type properties of measures and submanifolds, *J reine angew. Math.*, **379**, (1987), 115-151.

[P] Ch. Pommerenke, On Univalent Functions, Bloch Functions and VMOA, *Math. Ann.*, **236** (1978), 199-208.

[S] S. Semmes, Analysis vs. Geometry on a Class of Rectifiable Hypersurfaces, *Indiana Univ. J.*, **39** (1990), 1005-1035.