Políticas Anti-Fraude y Recaudación: El Papel de la Tributación por Módulos*

Judith Panadés i Martí†

Diciembre 2000

Resumen

En este artículo se presenta un sistema impositivo donde los individuos pueden escoger entre dos alternativas para realizar el pago de sus impuestos: (1) pagar los impuestos proporcionales a la renta que han declarado, pero estar sujetos en este caso a una posible inspección (sistema de estimación objetiva), o (2) satisfacer el pago de un impuesto de suma fija y quedar exento de cualquier otra obligación tributaria (sistema de módulos). En este contexto el gobierno posee dos instrumentos de política fiscal asociados a cada uno de los sistemas alternativos: el tipo impositivo y el impuesto de suma fija. En este artículo se analiza el impacto de modificaciones en cada uno de estos dos instrumentos sobre la recaudación del gobierno.

Código de clasificación del JEL: E62, H26.

Palabras Clave: Evasión fiscal, Política fiscal.

---

* Agradezco la financiación concedida por el Ministerio de Educación y Cultura a través del proyecto de la DGES PB96-1160-C02-02. Este trabajo se ha beneficiado de los valiosos comentarios de Jordi Caballé e Inés Macho. Los errores que persistan son de mi exclusiva responsabilidad.

† Unitat de Fonaments de l'Anàlisi Econòmica. Universitat Autònoma de Barcelona. Correspondencia: Judith Panadés i Martí. Departament d'Economia i Història Econòmica. Edifici B. Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra (Barcelona). Tel: (34) 93 581 18 02. Fax: (34) 93 581 20 12. E-mail: judith.panades@uab.es

1. Introducción

De acuerdo con la legislación vigente sobre el IRPF español, los contribuyentes que perciben determinados tipos de rentas pueden elegir entre pagar la cantidad de impuestos correspondientes a la renta que hayan declarado, estando en este caso sujeto a la posibilidad de ser inspeccionados por la administración (estimación objetiva) o pagar una cantidad fijada por el gobierno y quedar exentos de cualquier otra obligación tributaria y de cualquier posible inspección (sistema de módulos). El objetivo de este artículo es estudiar las implicaciones de la política fiscal en la lucha contra el fraude a partir del análisis de la tributación según el sistema de estimación objetiva o según el sistema de módulos. Más concretamente, analizaremos los efectos sobre la recaudación del gobierno de los cambios en los instrumentos fiscales asociados a los dos sistemas de tributación mencionados.

Un sistema impositivo obliga a los individuos a entregar parte de su renta al gobierno en concepto de impuestos. La agresividad con la que este hecho es percibido por la mayoría de los contribuyentes fomenta la aparición de distintos estrategias encaminadas a reducir su carga fiscal. Así pues, el problema del fraude fiscal es un fenómeno íntimamente asociado a los sistemas impositivos vigentes que afecta en mayor o menor medida a la totalidad de los paises desarrollados.

La mayor parte de los análisis económicos realizados hasta ahora sobre el fenómeno de la evasión fiscal se han basado en la formalización propuesta por Allingham y Sadmo (1972). Según este planteamiento, los individuos deciden voluntariamente que parte de su renta declarar, sopesando por una parte los beneficios obtenidos por el hecho de pagar sólo los impuestos asociados a la renta declarada y por otra las pérdidas en las que pueden incurrir si este comportamiento fraudulento es descubierto y, por lo tanto, sancionado. Para asegurar la consistencia de estos modelos económicos, es necesaria la implementación de un procedimiento legal que permita inspeccionar las declaraciones y penalizar aquellos comportamientos que se hayan revelado fraudulentos.

El problema de la evasión fiscal genera, entre otros, un problema obvio en términos de volumen recaudatorio ya que, fijado un determinado valor para el tipo impositivo, la recaudación disminuye a medida que los individuos deciden no declarar toda su renta. Es por ello, que los diferentes gobiernos intentan diseñar políticas anti-evasión encaminadas a recuperar parte de la recaudación que los gobiernos pierden a causa de la evasión fiscal. La mayor parte de la literatura existente se centra en el impacto de cambios en la política inspectora, lo que se traduce en cambios en la probabilidad de inspección y en las multas en caso de que se descubra una infracción. Los resultados obtenidos al respecto son concluyentes y nada sorprendentes: más inspecciones y mayores sanciones conducen a una menor evasión, lo que a su vez se traduce en una recaudación mayor.[1] Por lo tanto, queda claro el papel que juega la política de inspección como elemento disuasorio del fenómeno de la evasión fiscal. Ahora bien, algunos autores creen que las políticas anti-evasión han de llevarse a cabo mediante los propios instrumentos fiscales. En muchos de los análisis experimentales realizados en torno al problema de la evasión fiscal se obtiene que los individuos evaden más o menos en función del tipo impositivo y/o del gasto público que ellos perciben como tal.[2] Siguiendo esta línea, Williams (1996) propone algunas medidas acerca de como desincentivar la elusión fiscal aunque también son aplicables en buena medida al problema de la evasión fiscal.[3] Entre ellas podemos encontrar, por ejemplo, la creación de nuevos impuestos menos expuestos a la evasión fiscal o campañas de concienciación destinadas a los contribuyentes para que éstos perciban el pago de sus impuestos como algo necesario para el buen funcionamiento de una sociedad preocupada por temas de carácter redistributivo.

Este artículo analiza un caso de política anti-evasión muy específico que se contempla en el sistema impositivo del IRPF español. Este tipo de política consiste en dar a escoger al contribuyente entre pagar una cantidad fija de impuestos, independientemente de la renta que el contribuyente posea (sistema de módulos) o bien estar sujeto a un impuesto proporcional sobre la renta y pagar en función de lo que se declare (sistema de estimación objetiva), haciendo frente a una probabilidad positiva de ser inspeccionado por el gobierno.[4] Observemos que en este contexto el gobierno tiene a su disposición dos instrumentos de política fiscal: el tipo impositivo y el impuesto de suma fija. Nuestro análisis se va a concentrar en el estudio de la relación existente entre la recaudación del gobierno y estos dos instrumentos de política fiscal.[5] En concreto, pretendemos mostrar bajo qué condiciones esta relación entre los instrumentos fiscales y la recaudación es creciente, y en que casos es posible obtener la típica curva de Laffer, la cual implica que la relación entre recaudación y instrumentos fiscales tenga la forma

[1] Este resultado es obtenido de forma teórica, pero en distintos contextos, por Allingham y Sadmo (1972), Bordignon (1993), Sánchez y Sobel (1993) y Cowell (1995) entre otros. Los estudios experimentales de Friedland, Maital y Rutenberg (1978), Becker, Buchner y Sleeking (1987) y Beck, Davis y Jung (1991) corroboran este resultado.

[2] Véase para más detalles el estudio experimental realizado por Sánchez y de Juan (1994) para el caso de España.

[3] Elusión fiscal es el término general que se aplica para denominar al conjunto de acciones que permiten una reducción de la carga fiscal de los contribuyentes sin incurrir en delito fiscal.

[4] Este tipo de políticas se aplica solamente a las rentas procedentes de los rendimientos profesionales.

[5] Cabe decir que Chu (1990) consideró este mismo tipo de política anti-evasión, a la que él llamo FATOTA (Fixed Amount of Taxes or Tax Audits), con el objetivo de analizar cuando la introducción de este tipo de políticas constituían una mejora en el sentido de Pareto.

de una U invertida. El interés del análisis planteado reside en el hecho de que nos va a permitir valorar hasta que punto políticas encaminadas a aumentar la recaudación del gobierno van a estar vinculadas a impuestos más altos.

En nuestro modelo consideraremos un entorno con individuos heterogéneos. Dicha heterogeneidad proviene exclusivamente del hecho de que los individuos poseen rentas distintas. Sin embargo, las preferencias de dichos individuos van a estar representadas por una función de utilidad esperada común. En este entorno analizaremos cómo los individuos escogen un sistema u otro para realizar su declaración de renta dependiendo del valor de los instrumentos fiscales que el gobierno posee y cómo esta decisión afecta a la recaudación del gobierno.

Los resultados obtenidos dependen básicamente de la combinación de dos efectos de carácter general que tienen lugar cuando cambian tanto el tipo impositivo como el impuesto de suma fija. La modificación del valor de alguno de estos dos instrumentos da lugar a un traspaso de individuos de un sistema a otro. Así pues, los resultados acerca de cómo evoluciona la recaudación van a depender crucialmente de que cantidad de ingreso pierde el gobierno cuando un individuo abandona un sistema de tributación y la cantidad de impuestos adicionales que recauda como consecuencia del ingreso de este individuo en el sistema de tributación alternativo. Cuando el impuesto de suma fija del sistema de módulos varía, obtenemos que la relación entre este instrumento y la recaudación tiene la forma de una curva de Laffer. Esto implica que no siempre mayores valores del impuesto de suma fija se traducen en recaudaciones más altas. Por contra, cuando se analiza la relación entre el tipo impositivo del sistema de estimación objetiva y la recaudación, se observa que ésta es siempre creciente. En este caso, el gobierno obtendría su máxima recaudación de la economía mediante un tipo impositivo del 100%, el cual sólo será pagado por los individuos que se han acogido al sistema de estimación objetiva. Obviamente, en un contexto macroeconómico o de equilibrio general este resultado debería matizarse teniendo en cuenta los efectos sobre la base impositiva, la cual sería endógena en última instancia.

Por último, también se ha llevado a cabo un análisis más global respecto a cual sería la política óptima del gobierno para obtener la máxima recaudación cuando éste posee todos los grados de libertad posibles y puede por lo tanto fijar de manera simultánea los valores del tipo impositivo y del impuesto de suma fija. Obviamente, en este caso se obtiene que la recaudación se maximiza cuando tanto el tipo impositivo como el impuesto de suma fija alcanzan su valor máximo.

Este artículo se organiza como sigue. En la Sección 2 se analiza el comportamiento de los individuos según el sistema de declaración escogido. La Sección 3 define cual es la recaudación del gobierno en función de sus fuentes de ingreso. En la Sección 4 se presentan los resultados obtenidos acerca de la estática comparativa del impuesto de suma fija respecto a la recaudación. La

Sección 5 analiza como se comporta la recaudación cuando es el tipo impositivo el que varía. La Sección 6 discute cual debería ser la política que maximizara la recaudación del gobierno cuando éste puede modificar simultáneamente el valor de ambos instrumentos. Finalmente en la Sección 7 se exponen las conclusiones y algunas posibles extensiones.

2. El comportamiento de los individuos

Consideremos una economía con un continuo de individuos que se diferencian por la renta exógena e idiosincrática y que reciben. Supondremos que la distribución de la renta entre los individuos es uniforme en el intervalo $\left[0, \overline{Y}\right]$. La preferencias de los individuos están representadas por una misma función de utilidad isolelástica $U(I) = \frac{(I)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, con $\gamma > 0$, definida sobre la renta después de impuestos I.[6] Los individuos están sujetos al pago de un impuesto proporcional sobre la renta $\tau \in [0,1]$.

Los individuos tiene dos posibles maneras de realizar su declaración de la renta. Por un lado pueden declarar sus ingresos acogiéndose al sistema de estimación objetiva (EO), lo que implica pagar impuestos según la renta que se declara. En este caso los contribuyentes se hallan expuestos a ser inspeccionados y a satisfacer una multa en caso de haber declarado una cantidad menor de la que realmente han ingresado. Por otro lado se pueden acoger al sistema de módulos (MO) que consiste en pagar un cantidad fija determinada por el gobierno independientemente de la renta que se posea.

2.1. Estimación objetiva (EO)

Bajo este sistema el fraude fiscal esta muy instaurado ya que los individuos tienden a declarar una renta inferior a la realmente han ingresado. Es por ello que supondremos que los individuos que se acogen a este tipo de declaración se comportan óptimamente como evasores. Consideremos pues el modelo standard de evasión fiscal propuesto por Allingham y Sadmo (1972) según el cual los individuos declaran la cantidad de renta $x \in [0, y]$ que maximiza su utilidad esperada. La probabilidad de ser inspeccionados es constante e igual a p. La inspección permite al gobierno conocer perfectamente cual es la renta real y de un individuo. Así pues, los individuos reducen la cantidad de impuestos a pagar en $\tau(y - x)$ cuando no son inspeccionados. Por otro lado, si un individuo es

[6] La función de utilidad isoelastica es comunmente utilizada para el analisis de problemas económicos tanto en contextos financieros (ver el artículo de Rubio (1991) y las abundantes referencias que en él se hallan incluidas) como en contextos macroeconómicos con incertidumbre (ver Cooley (1995) y las referencias que contiene).

inspeccionado debe hacer frente al pago de una multa proporcional a los impuestos evadidos $s > 0$ (véase al respecto la formulación de Yitzhaki, 1974). Vamos a suponer que declarar una cantidad de renta superior a la real no proporciona ganancia alguna.[7] Por otra parte, declarar una cantidad de renta negativa no presupone recibir una subvención del gobierno ya que para éste una renta declarada negativa es equivalente a una renta igual a cero. En otras palabras el sistema fiscal no incluye ningún tipo de subvención para compensar pérdidas. Definimos la renta evadida como $e = y - x$ donde $e \in [0, y]$. En consecuencia, la renta neta I de un individuo que evade la cantidad e y que posee una renta real y es igual a:[8]

$$I = \begin{cases} y - \tau y + \tau e, & \text{si el individuo no es inspeccionado,} \\ \\ y - \tau y - s\tau e, & \text{si el individuo es inspeccionado.} \end{cases}$$

Supondremos que los parámetros que definen la política de inspección, p y s están dados exógenamente.

Cada contribuyente escoge la cantidad de renta que quiere evadir e buscando maximizar su utilidad esperada

$$E\left[U(I)\right] = (1-p)\left[\frac{(y - \tau y + \tau e)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] + p\left[\frac{(y - \tau y - s\tau e)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]. \tag{2.1}$$

El siguiente lema muestra las soluciones del problema de maximización de la expresión (2.1):

Lema 2.1. *La renta evadida óptima $e(\tau, y)$, como función del tipo impositivo τ y de la renta real y es*

$$e(\tau, y) = \begin{cases} 0 & si \quad s \geq \frac{1-p}{p} \\ \\ \left[\frac{(A-1)(1-\tau)}{\tau(1+As)}\right] y & si \quad \left(\frac{1-p}{p}\right)(y - \tau y - s\tau y)^{\gamma} < s < \frac{1-p}{p}, \\ \\ y & si \quad s \leq \left(\frac{1-p}{p}\right)(y - \tau y - s\tau y)^{\gamma}, \end{cases}$$

donde $A = \left(\dfrac{ps}{1-p}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$.

Demostración. Ver Apéndice.

[7] Cuando un individuo declara una renta x mayor que su renta real y, sólo recupera su exceso de declaración cuando éste es investigado, por lo tanto, $s\tau = 1$ cuando $x \geq y$.

[8] Obsérvese que $y - \tau y + \tau e = y - \tau x$.

El Lema 2.1 caracteriza el comportamiento de un individuo evasor para una multa proporcional s sobre los impuestos evadidos dada. Vemos que una multa suficientemente pequeña incentiva a los individuos a evadir toda su renta ya que, en caso de inspección, la sanción a pagar no será demasiado alta. Cuando la multa es mayor, evadir toda la renta es más costoso por lo que los individuos deciden declarar una cantidad positiva de renta. Vemos que una sanción s mayor que $\frac{1-p}{p}$ elimina completamente los incentivos que tienen los individuos para evadir.

Dado que nuestro análisis se centra en el estudio del caso para el que la evasión es positiva supondremos de ahora en adelante que la condición $s < \frac{1-p}{p}$ se cumple siempre.[9]

Observemos que las condiciones para las que se cumple que $e(\tau, y) > 0$ dependen del tipo impositivo además de los parámetros de la política de inspección p, y s. Ello nos permite expresar $e(\tau, y)$ como

$$e(\tau, y) = \phi(\tau)\, y, \tag{2.2}$$

donde

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \tau \leq \tau^* \\ \frac{(A-1)(1-\tau)}{\tau(1+As)} & \text{si} \quad \tau > \tau^*, \end{cases} \tag{2.3}$$

siendo $\tau^* \in (0,1)$ el tipo impositivo que separa la evasión total de la parcial. La expresión analítica de τ^* viene dada por la expresión

$$\tau^* = \frac{1 - \left(\frac{sp}{1-p}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{1+s}, \tag{2.4}$$

la cual ha sido obtenida a partir de la condición del Lema 2.1 que garantiza que $e(\tau, y) = y$.

Finalmente sustituyendo $e(\tau, y)$ en la expresión (2.1) obtenemos

$$V(\tau, y) = (1-p)\left[\frac{(y - \tau y + \tau e(\tau, y))^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] + p\left[\frac{(y - \tau y - s\tau e(\tau, y))^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right], \tag{2.5}$$

expresión que define el valor máximo que alcanza la utilidad esperada, lo que no es otra cosa que la función indirecta de utilidad cuando el tipo impositivo es τ y la renta del individuo es y.

[9] Por ejemplo, si fijamos $s = 2$, la condición $s < \frac{1-p}{p}$ se satisface para todos los valores de p tal que $p < 0.33$. Cabe señalar que los valores de la probabilidad de inspección que se observan empíricamente se hallan muy por debajo de 0.33.

2.2. Sistema de módulos (MO)

Los contribuyentes que se acogen a este sistema de declaración simplemente deben pagar un impuesto de suma fija $T > 0$ fijado por el gobierno y que no depende de la renta real que los individuos posean. A los individuos que se acogen a este sistema se les exime de toda potencial inspección posterior.

La utilidad que tiene un individuo que opta por declarar según el sistema de MO es $U(y - T)$. Observemos que un individuo nunca optará por este sistema si el impuesto de suma fija T es mayor que su renta. En este caso la condición $T > \overline{Y}$ implica que nadie querrá declarar según el sistema de MO y todos los contribuyentes se acogerán al sistema de EO. Con el fin de garantizar que al menos el individuo más rico pueda optar por el sistema de MO, supondremos que la condición $T \leq \overline{Y}$ siempre se satisface.

3. El gobierno

El gobierno obtiene recursos de tres fuentes distintas: de los impuestos proporcionales que voluntariamente pagan los consumidores, de las multas que los evasores pagan cuando son inspeccionados y, por lo tanto, sancionados y de los impuestos de suma fija que pagan los contribuyentes que se acogen al sistema de MO. El gobierno inspecciona a cada individuo con probabilidad p, por lo que una fracción p de individuos son inspeccionados en esta economía dado que existe un continuo de agentes. Con el objetivo de simplificar el análisis supondremos que no existen costes asociados a la actividad de inspección.[10] Así pues la recaudación total del gobierno viene dada por la siguiente integral de Lebesgue:

$$G(\tau, T) = \int_{H(\tau,T)} \left[(1-p)\tau\left(y - e(\tau, y)\right) + p\tau\left(y + se(\tau, y)\right)\right] dy + \int_{\overline{H(\tau,T)}} T dy, \tag{3.1}$$

donde $H(\tau, T)$ es el subconjunto medible de Lebesgue de rentas en $\left[0, \overline{Y}\right]$ para el cual los individuos prefieren acogerse al sistema de EO cuando el tipo impositivo es τ y la cantidad fija a pagar en caso de optar por el sistema de MO es T, y donde $\overline{H(\tau, T)}$ es el conjunto complementario de $H(\tau, T)$ en el intervalo $\left[0, \overline{Y}\right]$. Obviamente, $G(\tau, T)$ es una función continua.

El gobierno posee en este caso dos instrumentos de política fiscal: el tipo impositivo τ con el que grava a los individuos que prefieren declarar según el

[10]Debe señalarse que si el gobierno no cambia la probabilidad de inspección p, el supuesto de coste de inspección nulo no afecta el presente analísis. Estamos pues suponiendo que el gobierno inspecciona a un individuo tanto si se acoge a una modalidad o a otra, con la diferencia de que cuando el individuo es evasor y es inspeccionado éste es sancionado, mientras que en caso contrario no existe penalización alguna.

sistema de EO y el impuesto de suma fija T que pagan los contribuyentes que se acogen al sistema de MO. Fijémonos que una variación de τ afecta tanto a la cantidad de renta evadida como al conjunto de individuos que declaran según EO, y que una variación de T aparte de modificar la recaudación obtenida según este concepto, también afecta al conjunto $H(\tau, T)$. Tal y como ya hemos mencionado anteriormente, nuestro objetivo se centra en el análisis del comportamiento de la recaudación del gobierno cuando los instrumentos de política fiscal son modificados. En otras palabras queremos estudiar cual es la estática comparativa de la función $G(\tau, T)$ respecto a τ y a T. Las secciones 4 y 5 nos proporcionan los resultados obtenidos al respecto.

4. Estática comparativa respecto al impuesto de suma fija

En este caso el valor del tipo impositivo τ está dado y nuestro objetivo se centra en estudiar como se comporta la recaudación del gobierno cuando éste varía el impuesto de suma fija T que pagan los individuos que optan por el sistema de MO.

Hemos supuesto que los individuos que se acogen al sistema de EO son evasores. Ello implica que los individuos comparen la utilidad esperada que les proporciona evadir, tanto en el caso de evasión total como parcial, con la utilidad obtenida de pagar el impuesto de suma fija.

Obviamente para $T = 0$, todos los individuos querrán acogerse al sistema de MO, pero a medida que T aumente los individuos irán considerando el abandonar el sistema de MO y pasarse al de EO. Dado que el individuo más rico es el último en abandonar el sistema de MO, hallamos el impuesto de suma fija tal que deja indiferente al individuo más rico entre un sistema u otro.[11] En particular, este valor de T es aquel que satisface la siguiente igualdad:

$$V\left(\tau, \overline{Y}\right) = \frac{\left(\overline{Y} - T\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \tag{4.1}$$

donde $V(\cdot)$ es la función indirecta de utilidad definida en (2.5). Usando las expresiones (2.2) y (2.3), podemos despejar T en (4.1) y obtenemos

$$\widehat{T}(\tau) = \begin{cases} \overline{Y}\left[1 - \left((1-p) + p(1-\tau-\tau s)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right] & \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq \tau^* \\ \overline{Y}\left[1 - (1-\tau) D\right] & \text{si} \quad \tau^* < \tau \leq 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

[11]Adoptaremos la convención de que cuando un individuo está indiferente entre el sistema de MO y el de EO escoge éste último.

donde

$$D \equiv \left[\left(\frac{1+s}{1+As} \right) \left((1-p)A^{1-\gamma} + p \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right]. \tag{4.3}$$

Por lo tanto, para $T \geq \widehat{T}$ nadie deseará acogerse al sistema de MO, ya que el individuo más rico prefiere no hacerlo. Por el contrario, para $T < \widehat{T}$ tendremos individuos que escogerán quedarse en un sistema o en otro dependiendo de su renta y del valor que tome el impuesto de suma fija. Observemos que el valor de $\widehat{T}(\tau)$ es creciente respecto a τ. Ello simplemente denota que cuando se fija un valor mayor del tipo impositivo el individuo también está dispuesto a pagar un valor de módulo mayor.

Para un T menor que $\widehat{T}$, podemos hallar la renta que hace indiferentes los dos sistemas de tributación existentes. Este nivel de renta, al que denotaremos como $y^*(\tau, T)$, es aquel que satisface la siguiente igualdad:

$$V(\tau, y) = \frac{(y-T)^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

Obtenemos así la siguiente expresión para $y^*(\tau, T)$:

$$y^*(\tau, T) = \begin{cases} \dfrac{T}{1 - \left((1-p) + p(1-\tau-\tau s)^{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}} & \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq \tau^* \\ \\ \dfrac{T}{1-(1-\tau)D} & \text{si} \quad \tau^* < \tau \leq 1 \end{cases} \tag{4.4}$$

Es fácil ver que $\lim\limits_{\tau \to 0} y^*(\tau, T) = \infty$, lo que indica que para un valor nulo del tipo impositivo todos los individuos preferirán tributar según el sistema de EO. De igual manera, calculando el límite cuando el tipo impositivo tiende a uno, se obtiene que $\lim\limits_{\tau \to 1} y^*(\tau, T) = T$, lo que implica que todo los individuos que posean una renta superior al impuesto de suma fija vigente se acogerán al sistema de MO. Finalmente, sólo mencionar que $y^*(\tau, 0) = 0$ para cualquier posible valor de τ. Este resultado simplemente nos dice que todos los individuos escogerán como sistema de tributación el sistema de MO.

Así pues, para $T \in \left[0, \widehat{T}(\tau)\right)$ la recaudación del gobierno viene dada por los ingresos de los individuos que optan por el sistema de módulos más los ingresos de los que se han cambiado al sistema de EO. Por último, es fácil ver que cuando $T \in \left[\widehat{T}(\tau), \overline{Y}\right]$, la recaudación sólo va a estar compuesta por los ingresos obtenidos vía el sistema de EO ya que no va haber nadie interesado en escoger el sistema de MO. El siguiente lema nos muestra la expresión de la función $G(\tau, T)$, para un valor dado de τ :

Lema 4.1. *La recaudación total del gobierno para un valor dado de $\tau \in [0,1]$ viene definida por la siguiente función por partes:*

$$G(T) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tau\left(1-\phi(\tau)+p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right)\left(y^*(T)\right)^2 + T\left(\overline{Y}-y^*(T)\right) & si \quad 0 \leq T < \widehat{T}\left(\tau\right) \\ \\ \frac{1}{2}\tau\left(1-\phi(\tau)+p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right)\overline{Y}^2 & si \quad \widehat{T}\left(\tau\right) \leq T \leq \overline{Y}, \end{cases}$$

Demostración. Ver Apéndice.

Analicemos con un poco más de detalle el comportamiento de la recaudación para los valores límite que el tipo impositivo puede tomar. La expresión (4.2) nos dice que $\widehat{T}\left(0\right)=0$, lo que supone eliminar el primer tramo de la función $G(T)$. En consecuencia la expresión de $G(T)$ dada por el Lema 4.1 pasa a ser igual a

$$G(T) = \frac{1}{2}\tau\left(1-\phi(\tau)+p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right)\overline{Y}^2, \qquad \text{para } T \in \left[0,\overline{Y}\right].$$

Sustituyendo $\tau = 0$ en esta última expresión se obtiene, como era de esperar, que la recaudación es nula dado que todos los individuos están tributando según el sistema de EO. Por contra, $\widehat{T}\left(1\right)=\overline{Y}$, por lo que la expresión de $G(T)$ del Lema 4.1 se transforma en

$$G(T) = \frac{1}{2}\tau\left(1-\phi(\tau)+p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right)\left(y^*(T)\right)^2 + T\left(\overline{Y}-y^*(T)\right) \text{ para } T \in \left[0,\overline{Y}\right]. \tag{4.5}$$

Sustituyendo $\tau = 1$ en (4.5) y con la ayuda de las expresiones (2.3) y (4.4) se obtiene que el valor de la recaudación es igual a

$$G(T) = \frac{1}{2}\left(T\right)^2 + T\left(\overline{Y}-T\right). \tag{4.6}$$

En este caso todos los individuos con rentas inferiores al valor del impuesto de suma fija se acojeran al sistema de EO mientras que los demás tributarán según MO.

La siguiente proposición nos describe el comportamiento de $G(\tau, T)$ respecto al impuesto de suma fija:

Proposición 4.2. Dado un valor de $\tau \in (0,1)$,
(a) *la función $G(T)$ alcanza un único $T^*\left(\tau\right)$ máximo en el intervalo $\left(0,\widehat{T}\left(\tau\right)\right)$,*
(b) *la función $G(T)$ es constante respecto a T en el intervalo $\left[\widehat{T}\left(\tau\right),\overline{Y}\right]$.*

Demostración. Ver Apéndice.

Con el objetivo de ilustrar la anterior proposición tomamos los siguientes valores de los parámetros: $p = 0.1$, $s = 3$, $\gamma = 2$ y $\overline{Y} = 100$.[12] Para estos valores se obtiene que $\tau^* = 0.10566$, donde τ^* viene definido en (2.4). Con el fin de poder evaluar el valor de $\widehat{T}(\tau)$ en los dos casos considerados en (4.2) tomemos un valor arbitrario de τ, tal que $\tau < \tau^*$ y otro valor arbitrario τ tal que $\tau > \tau^*$. En concreto estos valores son iguales a $\tau = 0.1$ y $\tau = 0.2$ respectivamente. Así pues obtenemos que los respectivos valores de $\widehat{T}(\tau)$ son $\widehat{T}(0.1) = 6.25$ y $\widehat{T}(0.2) = 16.65$. Las Figuras 1 y 2 muestran la recaudación del gobierno para estos valores, donde el valor de T que maximiza la recaudación es $T^* = 4.5956$ cuando $\tau = 0.1$ y $T^* = 14.613$ cuando $\tau = 0.2$.

(Insertar las Figuras 1 y 2)

Cuando el valor de T aumenta tienen lugar dos efectos. El primero consiste en que, conforme el impuesto de suma fija se hace mayor, los individuos van abandonando este sistema para pasarse al de EO, lo que supone un efecto negativo sobre la recaudación del gobierno. Por otro lado, como hay más individuos tributando según el sistema de EO, el gobierno obtiene un aumento de sus ingresos vía este sistema de tributación. El apartado (a) de la Proposición 4.2 nos dice en primer lugar que el efecto positivo compensa al negativo para $T \in [0, T^*(\tau))$, tanto en el caso de evasión total como parcial. En cambio, para $T \in \left(T^*(\tau), \widehat{T}(\tau)\right)$ es el efecto negativo el que compensa al positivo. En consecuencia, vemos que la recaudación del gobierno alcanza su valor máximo en $T^*(\tau) \in \left[0, \widehat{T}(\tau)\right)$. Esto significa que si el objetivo del gobierno es maximizar su recaudación, no debe implementar un impuesto de suma fija demasiado alto, ya que en este caso la recaudación descendería como consecuencia del paso de individuos del sistema de MO al sistema de EO. Fijémonos por último que el apartado (b) nos dice que fijar un $T > \widehat{T}(\tau)$ no se traduce en una mayor recaudación, ya que todos los individuos tributarán por el sistema de EO y en consecuencia valores mayores de T no supondrán modificación alguna de la recaudación.

5. Estática comparativa respecto al tipo impositivo

Para poder estudiar cual es el comportamiento de la recaudación del gobierno en función del tipo impositivo, dado un valor de T, también necesitamos saber como los individuos modifican su elección entre el sistema de EO y el sistema de MO. Por otra parte, los individuos que optan por el sistema de EO pueden evadir toda su renta o solamente una parte de ella en función de cuales sean los valores

[12] Obsérvese que en este caso se cumple que $s < \frac{1-p}{p}$.

del tipo impositivo, tal y como nos indica la expresión (2.2). Concretamente el valor del tipo impositivo que nos separa la evasión total de la parcial es τ^* y está definido en (2.4).

De manera obvia, cuando $\tau = 0$ todos los individuos querrán tributar según el sistema de EO, pero a medida que el tipo impositivo vaya aumentando los individuos irán considerando el abandonar el sistema de EO para pasarse al de MO. En concreto el individuo más rico será el primero en tener incentivos para realizar este cambio de sistema.

El siguiente lema define el tipo impositivo, τ, que deja indiferente al individuo más rico entre los dos sistemas:

Lema 5.1. *El valor del tipo impositivo que deja indiferente al individuo más rico entre el sistema de EO y el de MO viene dado por la siguiente expresión:*

$$\widehat{\tau}(T) = \begin{cases} \dfrac{1-\left[\frac{1}{p}\left(1-\frac{T}{\overline{\overline{Y}}}\right)^{1-\gamma}-\frac{(1-p)}{p}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1+s} \in [0,\tau^*) & \text{si} \quad 0 \leq T < \widetilde{T} \\ 1-\left[\frac{1}{D}-\frac{T}{D\overline{\overline{Y}}}\right] \in [\tau^*, 1] & \text{si} \quad \widetilde{T} \leq T \leq \overline{Y}, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $\widetilde{T} = \overline{Y}\left[1-\left((1-p)+pA^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right]$.

Demostración. Ver apéndice.

Observemos que cuando el valor de $T < \widetilde{T}$, el individuo más rico está indiferente entre los dos sistemas fiscales para tipos impositivos bajos que inducen a la evasión total en caso de tributar según el sistema de EO. Por contra valores altos de T, en concreto aquellos que cumplan $T \geq \widetilde{T}$, eliminan los incentivos de los individuos a optar por el sistema de MO cuando los tipos impositivos son bajos ($\tau \leq \tau^*$), por lo que un evasor total siempre va a escoger tributar según el sistema de EO.

Así pues, para valores de $\tau \leq \widehat{\tau}(T)$, nadie optará por el sistema de MO, mientras que cuando $\tau > \widehat{\tau}(T)$ los individuos escogerán tributar según un sistema u otro dependiendo de su renta y del valor concreto que tome el tipo impositivo. En particular, el valor de la renta que deja indiferente entre los dos sistemas fiscales para un $\tau > \widehat{\tau}(T)$ es igual a $y^*(\tau, T)$ definido en (4.4). Observemos que $\frac{\partial y^*(\tau,T)}{\partial \tau} < 0$, lo que indica que a medida que el tipo impositivo crece, la renta que deja indiferente entre los dos sistemas de tributación disminuye. En otras palabras, a medida que aumenta τ, más individuos prefieren tributar según el sistema de MO.

Por lo tanto, para $0 \leq \tau \leq \widehat{\tau}(T)$ dado que todos los individuos preferirán acogerse al sistema de EO, la recaudación estará formada por los impuestos pagados voluntariamente y por las multas pagadas por aquellos que han sido inspeccionados. En cambio cuando $\hat{\tau}(T) < \tau \leq 1$, ya no sigue siendo cierto que la mejor opción para todos los individuos sea la de optar por el sistema de EO, ya que un aumento del tipo impositivo genera incentivos para que más individuos decidan declarar mediante el sistema de MO. En este caso la recaudación será igual a los impuestos y las multas pagadas por los individuos que han optado por el sistema de EO más los impuestos de suma fija pagados por los individuos que escojan el sistema de MO.

El siguiente lema nos muestra la expresión de la función $G(\tau)$, tomando como dado el valor de T, y sintetiza nuestra discusión previa:

Lema 5.2. *La recaudación total del gobierno, para un valor dado de $T \in \left[0, \overline{Y}\right]$ está definida por la siguiente función por partes:*

$$G(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tau\left(1 - \phi(\tau) + p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right)\overline{Y}^2 & si \quad 0 \leq \tau \leq \hat{\tau}(T) \\ \\ \frac{1}{2}\tau\left(1 - \phi(\tau) + p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right)\left(y^*(\tau)\right)^2 + T\left(\overline{Y} - y^*(\tau)\right) & si \quad \hat{\tau}(T) < \tau \leq 1. \end{cases}$$

Demostración. Ver el Apéndice.

Examinemos el comportamiento de la recaudación para los valores límite que puede tomar el impuesto de suma fija. Cuando La expresión (5.1) nos dice que $\hat{\tau}(0) = 0$, lo que supone eliminar el primer tramo de la función $G(\tau)$. Sustituyendo $T = 0$ en la expresión de $G(\tau)$ del Lema 5.2 se obtiene que $G(\tau) = 0$ para cualquier valor de τ, ya que todos los individuos están tributando según el sistema de MO. Por contra cuando $T = \overline{Y}$, entonces $\hat{\tau}\left(\overline{Y}\right) = 1$, por lo que la expresión $G(\tau)$ del Lema 5.2 se transforma en

$$G(\tau) = \frac{1}{2}\tau\left(1 - \phi(\tau) + p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right)\overline{Y}^2 \text{ para } \tau \in [0,1]. \tag{5.2}$$

En este caso todos los individuos se acogeran al sistema de EO, dado que el valor del impuesto de suma fija es demasiado alto incluso para el individuo más rico.

La siguiente proposición nos describe el comportamiento de la función $G(\tau)$.

Proposición 5.3. *Dado un valor de $T \in \left(0, \overline{Y}\right)$, la función $G(\tau)$ es creciente para $\tau \in [0,1]$.*

Demostración. Ver el Apéndice.

Con el objetivo de ilustrar la anterior proposición evaluamos el valor de $\widetilde{T}$ definido en el Lema 5.1 y el valor de τ^* definido en (2.4) para los valores $p = 0.1$,

$s = 3$, $\gamma = 2$, $\overline{Y} = 100$. Obtenemos que $\tau^* = 0.10566$, y $\widetilde{T} = 6.8212$. Con el fin de evaluar el valor de $\widehat{\tau}(T)$ en los dos casos considerados en el Lema 5.1, tomemos un valor arbitrario de T tal que $T < \widetilde{T}$ y otro valor arbitrario de T tal que $T > \widetilde{T}$. En concreto estos valores son $T = 6.3$ y $T = 10$. Así pues obtenemos que el valor de $\widehat{\tau}(T)$ es $\widehat{\tau}(6.3) = 0.10051$ y $\widehat{\tau}(10) = 0.13617$, respectivamente. Las Figuras 3 y 4 muestran la recaudación del gobierno para estos valores.

(Insertar las Figuras 3 y 4)

La Proposición 5.3 nos dice que a medida que el tipo impositivo va tomando valores mayores la recaudación del gobierno también va aumentando. Observemos que cuando el módulo a pagar es grande $\left(T > \widetilde{T}\right)$, los individuos no empiezan a declarar según el sistema de MO hasta que el tipo impositivo no alcanza valores mayores que τ^*. En este caso, el resultado enunciado por la proposición 5.3 se obtiene como consecuencia de la combinación de tres diferentes efectos. En primer lugar un aumento del tipo impositivo desincentiva la evasión fiscal, por lo tanto la renta que declaran los contribuyentes que se acogen al sistema de EO, aumenta. Por otra parte para un nivel dado de renta declarada los individuos ahora pagan una mayor proporción de su renta en concepto de impuestos ya que el tipo impositivo ha aumentado. Este efecto sobre la evasión fiscal y sobre la cantidad de impuestos pagados se traduce en un aumento de la recaudación del gobierno. En segundo lugar un aumento del tipo impositivo cuando $\tau \in (\widehat{\tau}(T), 1]$, comporta que individuos que declaraban según el sistema de EO ahora prefieran declarar según el sistema de MO, lo que conlleva un descenso en los ingresos procedentes de las declaraciones efectuadas según el sistema de EO. Finalmente, los ingresos procedentes del sistema de MO aumentan a medida que los individuos prefieren acogerse a este sistema y no al de EO, dando lugar a un incremento de la recaudación. Los dos efectos positivos acaban compensando al efecto negativo y en consecuencia se obtiene una relación creciente entre tipo impositivo y recaudación.

Ahora bien puede darse la situación que el valor de T no sea demasiado alto $\left(T \leq \widetilde{T}\right)$. En este caso los contribuyentes empiezan a abandonar el sistema de EO para valores bajos del tipo impositivo ($\tau \leq \tau^*$). En este contexto también de desencadenan los tres efectos anteriormente mencionados. En concreto, vemos que los contribuyentes inspeccionados pagan una sanción más elevada lo que contribuye a aumentar los ingresos del gobierno. Por otro lado, constatamos la existencia del efecto negativo sobre la recaudación provocado por el abandono del sistema de EO de algunos individuos que prefieren tributar según el sistema de MO. Finalmente el pago del impuesto de suma fija por parte de los contribuyentes que se acogen al sistema e MO, proporciona al gobierno más ingresos. Observemos que este caso no es exactamente igual que cuando el valor del impuesto de suma fija es alto $\left(T > \widetilde{T}\right)$. En primer lugar, recordemos que el valor de T es bajo, lo que debilita el efecto positivo sobre la recaudación vía los ingresos del sistema de MO. En segundo lugar, un aumento del tipo impositivo, tal que el valor final de τ siga siendo menor que τ^*, no implica cambio alguno en el comportamiento evasor de los individuos, éstos van a seguir evadiendo la totalidad de su renta. Por lo tanto la recaudación vía la modificación del comportamiento evasor sólo va a aumentar como consecuencia del pago de mayores multas por parte de los contribuyentes inspeccionados. Aun así, los efectos positivos siguen compensando al negativo tal y como nos indica el resultado explicitado en la Proposición 5.3.

Observemos que en este contexto el gobierno, dado un valor del impuesto de suma fija, maximizará su recaudación fijando un impuesto proporcional igual a uno, el cual será pagado solamente por los individuos que tributen según el sistema de EO. Este resultado es en gran medida contradictorio con el que se obtiene en un contexto de equilibrio general. En dicho contexto un aumento del tipo impositivo genera además de los efectos mencionados anteriormente, una disminución de la renta endógena de los individuos ya que se penaliza su acumulación de capital físico y humano. En este caso los contribuyentes pagan una proporción mayor de su renta como impuestos pero su base impositiva es menor. Por lo tanto, se suele obtener que la relación entre la recaudación y el tipo impositivo tiene la forma de una curva de Laffer (U invertida). En este artículo hemos considerado un contexto donde la renta es exógena, y por lo tanto hemos eliminado los efectos de equilibrio general que un aumento del tipo impositivo puede desatar.

6. Análisis global

En las secciones anteriores hemos visto como la relación entre el impuesto de suma fija y la recaudación describe la forma de la típica curva de Laffer, mientras que la relación obtenida entre el tipo impositivo y la recaudación es siempre creciente. La causa de este comportamiento claramente diferenciado debe buscarse en la propia naturaleza del instrumento fiscal que se considere. Por un lado observemos como una modificación del impuesto de suma fija no tiene ningún efecto sobre el comportamiento evasor de los contribuyentes, éstos siguen evadiendo exactamente lo mismo a no ser que prefieran cambiarse de sistema de tributación y pagar el impuesto de suma fija, en cuyo caso la decisión de cuanta renta evadir por parte del contribuyente deja de tener sentido. En cambio, una variación del valor del tipo impositivo si que desencadena varios efectos sobre la decisión de evasión. En concreto, un aumento del tipo impositivo genera incentivos a evadir menos dado que la estructura de multas que se ha tomado sanciona a los individuos proporcionalmente a la cantidad de impuestos evadidos. En este caso la cantidad de impuestos pagados por el contribuyente va a ser sin duda alguna mayor, ya que por un lado se evade menos y por otro el valor del tipo impositivo es mayor.

Así pues, mientras que un aumento del impuesto de suma fija sólo modifica el número de contribuyentes que declaran según un sistema u otro, un aumento del tipo impositivo implica además, que los individuos que sigan prefiriendo tributar según la EO ahora paguen una proporción mayor de su renta en concepto de impuestos.

Debemos hacer hincapié en que hasta el momento solamente nos hemos preocupado por analizar la estática comparativa de cada uno de los instrumentos fiscales, omitiendo cualquier consideración respecto a la maximización global de la recaudación en caso de que el gobierno pudiera fijar simultáneamente el valor de los dos parámetros fiscales. Supongamos por lo tanto que, en efecto, el gobierno puede sin ningún tipo de restricción fijar los valores del impuesto de suma fija y del tipo impositivo de manera simultánea. El siguiente lema nos indica cual sería la política a llevar a cabo por el gobierno cuando el objetivo es maximizar la recaudación total:

Lema 6.1. *La recaudación total del gobierno alcanza su máximo global cuando* $\tau = 1$ y $T = \overline{Y}$.

Demostración. Ver el Apéndice.

Observemos en primer lugar que esta política fiscal da lugar a un máximo de esquina ya que consiste en dar a los instrumentos fiscales el máximo valor que pueden alcanzar. La intuición de este resultado descansa en el hecho de que por un lado la recaudación es creciente respecto al tipo impositivo para cualquier valor del impuesto de suma fija, por lo tanto la máxima recaudación se obtendrá para $\tau = 1$. Por otra parte recordemos que dado un valor del tipo impositivo existía un valor del impuesto de suma fija, $T^* < \overline{Y}$, que maximizaba la recaudación. Es fácil intuir y también demostrar que $\lim_{\tau \to 1} T^* = \overline{Y}$. Así pues dado que $\tau = 1$ el valor del impuesto de suma fija que maximiza la recaudación es $T^* = \overline{Y}$. Observemos que esta política implica sustraer el total de la renta que poseen los contribuyentes ya que el hecho de fijar un impuesto de suma fija igual a la renta más alta supone que todos los individuos preferirán tributar según el sistema de EO y, dado que $\tau = 1$, sabemos gracias a la expresión (2.3) que todos ellos se comportarán honestamente y entregarán, por lo tanto, toda su renta en concepto de impuestos.

Pero a pesar de que esta política sea la que proporcione al gobierno el valor más alto de su recaudación, parecen evidentes los problemas que su implementación conlleva dado su carácter expropiador. Además debemos hacer especial hincapié en el hecho de que España se halla inmersa en el proceso de armonización fiscal de la Unión Europea y que por lo tanto existen restricciones a nivel global respecto a los valores que puede tomar el tipo impositivo. Observemos por contra que estas restricciones de tipo global desaparecen cuando hablamos del impuesto de suma fija, dado que su valor se fija independientemente de la renta del contribuyente.[13] En consecuencia, parece lógico pensar que la política adecuada en este contexto consistiría en fijar el valor del impuesto de suma fija que maximizara la recaudación dado un valor del tipo impositivo. Fijémonos que esta política supeditaría el valor del impuesto de suma fija al valor concreto que tomara el tipo impositivo, modificando así el criterio vigente para decidir el valor del impuesto de suma fija . Por lo tanto, siempre y cuando el objetivo perseguido por el gobierno sea la maximización de la recaudación, deberá adecuar el valor del impuesto de suma fija en función del tipo impositivo fijado de manera más general en un contexto internacional.

7. Conclusiones y extensiones

En este trabajo hemos realizado un análisis del comportamiento de la recaudación del gobierno respecto a los instrumentos de política fiscal que éste tiene a su disposición en un contexto impositivo muy específico donde se permite al contribuyente escoger entre dos tipos posibles de tributación: el sistema de módulos o el sistema de estimación objetiva.

Los resultados obtenidos acerca del comportamiento de la recaudación varían en función de cual sea el instrumento fiscal a utilizar por el gobierno. Por un lado, un aumento del tipo impositivo empuja a los individuos a abandonar el sistema de EO para pasarse al sistema de MO. Esta huída de contribuyentes genera un descenso de los ingresos via este sistema de tributación. Sin embargo, simultáneamente aumenta la cantidad de personas que pagan el impuesto de suma fija del sistema de MO, lo que se traduce en un aumento de la recaudación. Asimismo dado que se ha tomado una estructura de multas que penaliza según sea la cantidad de impuestos evadidos, un aumento del tipo impositivo desincentiva la evasión fiscal lo que genera mayores ingresos para el gobierno. Los efectos positivos sobre la recaudación compensan a los negativos, obteniendo una relación siempre creciente entre el tipo impositivo y la recaudación del gobierno. Por otra parte, una variación del valor del impuesto de suma fija implica algunos de los efectos anteriormente mencionados: a medida que aumenta su valor los individuos abandonan el sistema de MO para pasarse al sistema de EO. Observemos pues que un cambio del valor del impuesto de suma fija no produce modificación alguna en el comportamiento evasor de los contribuyentes. En este caso hemos hallado que la recaudación del gobierno toma la típica forma de la curva de Laffer, alcanzando un único máximo interior.

[13] El valor del módulo se fija en función de parámetros asociados a los diferentes tipos de relaciones professionales y empresariales que son susceptibles de escoger entre el sistema de MO o el sistema de EO.

En este escenario, hemos demostrado que los dos instrumentos fiscales a disposición del gobierno, no son equivalentes en lo que respecta al comportamiento de la recaudación del gobierno, ya que mientras que un aumento del tipo impositivo genera siempre una mayor recaudación, no podemos decir lo mismo de un aumento del impuesto de suma fija. Concretamente, tal y como hemos demostrado, fijar un valor incorrecto del impuesto de suma fija puede impedir alcanzar el valor máximo de la recaudación. Asimismo, se ha demostrado que cuando el gobierno puede fijar simultaneamente el valor de ambos instrumentos sin restricciones, la política fiscal que maximiza la recaudación es aquella que obliga a todos los inviduos a entregar la totalidad de su renta como pago de sus impuestos.

Por último, mencionaremos algunas posibles extensiones de nuestro trabajo. En primer lugar se podría introducir en el análisis una función impositiva progresiva más acorde con la naturaleza del IRPF. En este caso, estaríamos añadiendo más instrumentos fiscales y aumentando por lo tanto los grados de libertad del gobierno en el momento de decidir el valor de estos parámetros fiscales. El resultado que uno podría esperar es que un nivel mayor de progresividad creara incentivos para pasarse al sistema de MO más rápidamente que bajo una imposición proporcional. En efecto, aumentar la cantidad declarada puede suponer un incremento del tipo medio a pagar, por lo que el individuo acaba pagando más no sólo de manera absoluta sino también de forma proporcional.

En segundo lugar, se podría relajar el supuesto que hemos efectuado sobre el coste de inspección nulo, e introducir en el análisis por un lado un coste que fuera constante por unidad de renta inspeccionada y por otro lado suponer que gobierno sólo inspeccionaría a aquellos contribuyentes que hubieran tributado según el sistema de EO. Observemos que en este contexto un aumento del tipo impositivo generaría adicionalmente una disminución del coste total de inspección como consecuencia del paso de algunos contribuyentes al sistema de tributación de MO. Este efecto positivo sobre la recaudación no haría otra cosa que potenciar la relación creciente, que hemos hallado, entre el tipo impositivo y la recaudación.

También podríamos considerar distintas funciones de distribución de la renta tales como la lognormal o la Pareto que ajustan mejor a las distribuciones de renta observadas empíricamente. Sin embargo, estas distribuciones no nos permitirían obtener resultados explícitos y tendríamos que recurrir a las simulaciones para poder tener alguna intuición del comportamiento de la recaudación del gobierno.

Finalmente, en el modelo planteado todos los individuos tienen la misma función de utilidad y éstos sólo difieren en su renta. Podría resultar interesante considerar preferencias heterogéneas, lo que implicaría que no necesariamente los individuos más ricos fuesen los primeros en abandonar el sistema de EO y pasarse al de MO, ya que entre otras cosas esta decisión dependería ahora también de los distintos índices de aversión al riesgo de los individuos.

A. Apéndice

Demostración del Lema 2.1. La condición de primer orden para obtener una solución interior del problema de maximización (2.1) es

$$(1-p)\,\tau\,(y-\tau y+\tau e)^{-\gamma}-p\tau s\,(y-\tau y-\tau se)^{-\gamma}=0. \tag{A.1}$$

Por lo tanto, la evasión óptima será

$$e\,(\tau,y)=\left[\frac{(A-1)\,(1-\tau)}{\tau(1+As)}\right]y.$$

Para saber que condiciones se requieren para obtener una solución estrictamente interior, evaluamos la ecuación (A.1) en $e=0$ y $e=y$. Dado que la función de utilidad isoelástica es estrictamente cóncava, se debe cumplir que

$$(1-p)\,\tau\,(y)^{-\gamma}-p\tau s\,(y-\tau y-\tau y)^{-\gamma}<0$$

y

$$(1-p)\,\tau\,(y-\tau y)^{-\gamma}-p\tau s\,(y-\tau y)^{-\gamma}>0.$$

Operando en ambas expresiones se obtienen las condiciones que figuran en el enunciado del lema. ■

Demostración del Lema 4.1.

Para $0\leq T<\widehat{T}\,(\tau)$, la recaudación del gobierno viene dada tanto por los ingresos obtenidos vía la tributación por MO, como por los ingresos procedentes de los impuestos y las multas pagadas por los individuos inspeccionados que, acogiéndose al sistema de EO, se comportan como evasores totales o evasores parciales dependiendo de cual sea el valor de τ. Así pues, obtenemos que

$$G_1(T)=\int_0^{y^*(\tau,T)}\left[\tau(1-\phi(\tau))+p\,(1+s)\,\tau\phi(\tau)\right]ydy+\int_{y^*(\tau,T)}^{\overline{Y}}Tdy.$$

Para $\widehat{T}\,(\tau)\leq T<\overline{Y}$, la recaudación está compuesta íntegramente por los ingresos procedentes de la tributación de EO, dado que nadie prefiere optar por el sistema de MO. Formalmente tenemos que

$$G_2(T)=\int_0^{\overline{Y}}\left[\tau(1-\phi(\tau))+p\,(1+s)\,\tau\phi(\tau)\right]ydy.$$

Calculando las integrales $G_i\,(T)$ donde $i=1,2$ obtenemos la expresión que aparece en el enunciado del Lema. ■

Demostración de la Proposición 4.2.

(a) Dividiremos la demostración en dos pasos.

Paso 1. Demostraremos que si $1 - \frac{\tau[1-\phi(\tau)+p(1+s)\phi(\tau)]}{E(\tau)} > 0$ entonces $G_1(T)$ alcanza un único máximo interior $T^*(\tau) \in \left(0, \widehat{T}(\tau)\right)$.

Para $0 \leq T < \widehat{T}(\tau)$, la recaudación es igual a $G_1(T)$. Calculando $\dfrac{dG_1(T)}{dT}$ y reordenando sus términos se obtiene

$$\frac{dG_1(T)}{dT} = \left(\frac{\tau\left[(1-\phi(\tau)+p(1+s)\tau\phi(\tau)\right]}{E(\tau)} - 1\right) y^*(\tau, T) + \overline{Y} - y^*(\tau, T), \quad \text{(A.2)}$$

donde

$$E(\tau) = \begin{cases} 1 - \left((1-p) + p(1-\tau-\tau s)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} & \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq \tau^* \\ \\ 1 - (1-\tau)D & \text{si} \quad \tau^* < \tau \leq 1. \end{cases} \quad \text{(A.3)}$$

Igualando la expresión (A.2) a cero y resolviendo en función de T obtenemos

$$T^*(\tau) = \frac{\overline{Y}E(\tau)}{2 - \left(\frac{\tau[1-\phi(\tau)+p(1+s)\phi(\tau)]}{E(\tau)}\right)}.$$

Queremos demostrar que $T^*(\tau) < \widehat{T}(\tau)$, lo que es equivalente a ver que

$$2 - \frac{\tau\left[1-\phi(\tau)+p(1+s)\phi(\tau)\right]}{E(\tau)} > 1,$$

o lo que es lo mismo

$$1 - \frac{\tau\left[1-\phi(\tau)+p(1+s)\phi(\tau)\right]}{E(\tau)} > 0. \quad \text{(A.4)}$$

Por último, es fácil comprobar que la condición de segundo orden que garantiza que $T^*(\tau)$ sea un máximo se satisface si se cumple (A.4).

Paso 2. Demostraremos que $1 - \frac{\tau[1-\phi(\tau)+p(1+s)\phi(\tau)]}{E(\tau)} > 0$ para todo $\tau \in (0, 1)$.

Supongamos en primer lugar que $\tau \in (0, \tau^*]$. En este caso, según la expresión (A.3) y la expresión (2.3) la condición (A.4) es igual a

$$p(1+s)\tau + \left((1-p) + p(1-\tau-\tau s)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} < 1. \quad \text{(A.5)}$$

Observemos que

$$\lim_{\tau \to 0} \left[p\,(1+s)\,\tau + \left((1-p) + p(1-\tau-\tau s)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right] = 1.$$

Por lo tanto, si demostramos que la expresión que está a la izquierda de la desigualdad (A.5) es decreciente respecto a τ habremos demostrado que para valores de $\tau \in (0, \tau^*]$ la desigualdad (A.5) se cumple. Definamos

$$R\,(\tau) = p\,(1+s)\,\tau + \left((1-p) + p(1-\tau-\tau s)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Calculando $\frac{dR(\tau)}{d\tau}$ obtenemos que

$$\frac{dR\,(\tau)}{d\tau} = p\,(1+s) - (1+s)\,p\,(1-\tau-s\tau)^{-\gamma}\left((1-p) + p(1-\tau-\tau s)^{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

Vemos que $\frac{dR(\tau)}{d\tau} < 0$ si y sólo si se cumple que

$$\left((1-p) + p(1-\tau-\tau s)^{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} > (1-\tau-s\tau)^{\gamma}. \tag{A.6}$$

Cuando $\gamma < 1$, (A.6) es equivalente a

$$(1-p) - (1-p)\,(1-\tau-s\tau)^{1-\gamma} > 0.$$

Tomando logaritmos es fácil ver que $(1-\tau-s\tau)^{1-\gamma} < 1$, por lo que la desigualdad (A.6) es cierta. Por otra parte, cuando $\gamma > 1$, (A.6) es equivalente a

$$(1-p) - (1-p)\,(1-\tau-s\tau)^{1-\gamma} < 0.$$

Tomando logaritmos es fácil ver que $(1-\tau-s\tau)^{1-\gamma} > 1$, por lo que la desigualdad (A.6) es cierta.

Supongamos ahora que $\tau \in (\tau^*, 1)$. En este caso, según la expresión (A.3) y la expresión (2.3) , la condición(A.4) es igual a

$$\tau\,(1+As) - (A-1)\,(1-\tau)\,(1-p\,(1+s)) + (1-\tau)\,D < 1 + As. \tag{A.7}$$

Simplificando y reagrupando términos, obtenemos que la condición (A.7) es equivalente a

$$(1+s)\left[A - \left((1-p)\,A^{1-\gamma} + p\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right] > p\,(A-1)\,(1+s). \tag{A.8}$$

Por otra parte, operando la expresión $\left[A - \left((1-p)\,A^{1-\gamma} + p\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right]$ obtenemos que

$$\left[A - \left((1-p)\,A^{1-\gamma} + p\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right] = A\left[1 - \left(1 - p + pA^{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right].$$

Sustituyendo la anterior igualdad en (A.8) tenemos

$$A\left[1 - \left(1 - p + pA^{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right] > p\,(A-1)\,. \tag{A.9}$$

Dado que $A > (A-1)$, la condición (A.9) se cumplirá si

$$1 - \left(1 - p + pA^{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} > p.$$

Operando y reagrupando términos es fácil probar que la anterior condición se cumple para toda $\gamma > 0$. Por lo tanto la condición (A.7) también se cumple.

(b) Partiendo del Lema 4 obtenemos que la recaudación del gobierno cuando $\widehat{T}\,(\tau) < T \leq \overline{Y}$ no depende de T, por lo que $\dfrac{dG_2\,(T)}{dT} = 0$. ■

Demostración del Lema 5.1. Dividiremos la demostración en tres partes.

(**a**) Obtención de la expresión de $\widehat{\tau}(T)$.

El individuo más rico será indiferente entre los sistema de EO y MO cuando la utilidad proporcionada por estos sistemas de tributación sea la misma, o sea cuando

$$V(\tau, \overline{Y}) = \frac{\left(\overline{Y} - T\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \tag{A.10}$$

donde $V(\cdot)$ es la función indirecta de utilidad definida en (2.5). Dado que los individuos pueden ser evasores totales o solamente parciales evaluamos la igualdad (A.10) en $\tau = \tau^*$, obteniendo que el individuo más rico se halla indiferente entre un sistema u otro para $\tau = \tau^*$ cuando $T = \widetilde{T}$. De ello se deriva que para valores de $T < \widetilde{T}$ el individuo más rico compare la utilidad que le proporciona el sistema de MO con la utilidad de tributar según el sistema de EO cuando es un evasor total, mientras que para valores de $T > \widetilde{T}$, compara la utilidad del sistema de MO con la utilidad del sistema de EO siendo un evasor parcial. Por lo tanto el valor del tipo impositivo que deja indiferente al individuo más rico entre los dos sistemas es aquel que satisface la igualdad $(A.10)$. Usando las expresiones (2.2) y (2.3), obtenemos la expresión de $\widehat{\tau}(T)$ explicitada en el enunciado del lema.

(**b**) $0 \leq \widehat{\tau}\left(\overline{Y}\right) < \tau^*$ cuando $0 \leq T < \widetilde{T}$.

Es directo ver que la desigualdad

$$\left[\frac{1}{p}\left(1-\frac{T}{\overline{\overline{Y}}}\right)^{1-\gamma}-\frac{(1-p)}{p}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}\leq 1,$$

se satisface para todo $\gamma > 0$, lo que prueba que $\widehat{\tau}\left(\overline{Y}\right) \geq 0$.

Por otro lado, tomando (2.4) y simplificando términos, vemos que si la siguiente desigualdad se satisface:

$$A\left[\frac{1}{p}\left(1-\frac{T}{\overline{\overline{Y}}}\right)^{1-\gamma}-\frac{(1-p)}{p}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}>1, \tag{A.11}$$

entonces $\widehat{\tau}\left(\overline{Y}\right) < \tau^*$. Es fácil comprobar que la expresión del lado izquierdo de la desigualdad (A.11) es decreciente respecto a T. Por lo tanto si evaluamos T en su valor máximo, $\widetilde{T}$ y se cumple la desigualdad (A.11) se cumplirá para cualquier valor de $T < \widetilde{T}$. Así pues sustituyendo $\widetilde{T}$ en (A.11) y simplificando términos se obtiene

$$A^2 > 1,$$

desigualdad que es siempre cierta ya que $A > 1$.

(c) $\tau^* \leq \widehat{\tau}\left(\overline{Y}\right) \leq 1$ cuando $\widetilde{T} \leq T \leq \overline{Y}$.

Para realizar esta demostración previamente debemos probar que $D > 1$. Fijemos γ y consideremos D definido en (4.3) como una función de s y p. Es posible probar que $\frac{\partial D}{\partial s} = 0$ y $\frac{\partial D}{\partial p} = 0$ sólo cuando $s = \frac{1-p}{p}$. Por otra parte, la matriz Hesiana de D evaluada en $s = \frac{1-p}{p}$ es igual a

$$H=\begin{pmatrix} \frac{p^3}{\gamma(1-p)} & \frac{p}{\gamma(1-p)} \\ \frac{p}{\gamma(1-p)} & \frac{1}{\gamma p(1-p)} \end{pmatrix},$$

la cual es semidefinida positiva. Finalmente, obtenemos que $D(s,p) = 1$ cuando $s = \frac{1-p}{p}$. Podemos concluir pues que $D(s,p) > 1$ para todo $s \neq \frac{1-p}{p}$. En particular, $D > 1$ para $ps < 1-p$.

Para ver que $\widehat{\tau}\left(\overline{Y}\right) \leq 1$ sólo debemos de demostrar que $0 \leq \left[\frac{1}{D} - \frac{T}{D\overline{Y}}\right] < 1$. El supuesto de que $T \leq \overline{Y}$ nos asegura que $\left[\frac{1}{D} - \frac{T}{D\overline{Y}}\right] \geq 0$, mientras que el resultado anterior que nos decía que $D > 1$ implica que $\left[\frac{1}{D} - \frac{T}{D\overline{Y}}\right] < 1$. Por otra parte dado que $T \geq \widetilde{T}$ se cumple que

$$1-\frac{1}{D}+\frac{T}{D\overline{Y}} \geq 1-\frac{1}{D}+\frac{\widetilde{T}}{D\overline{Y}}.$$

Es fácil comprobar que $\widetilde{T} = 1 - (1-\tau^*)\, D$. Sustituyendo $\widetilde{T}$ en la anterior desigualdad se obtiene directamente que $\hat{\tau}\left(\overline{Y}\right) \geq \tau^*$. ∎

Demostración del Lema 5.2. Para $0 \leq \tau \leq \hat{\tau}\,(T)$, la recaudación del gobierno viene dada solamente por los ingresos procedentes del sistema de EO, ya que todos los individuos prefieren tributar según este sistema. Por lo tanto, tenemos que

$$G_1(\tau) = \int_0^{\overline{Y}} \left[\tau(1-\phi(\tau)) + p\,(1+s)\,\tau\phi(\tau)\right] y dy.$$

Para $\hat{\tau}\,(T) < \tau \leq 1$ la recaudación es igual a los ingresos procedentes del sistema de EO más los del sistema de MO. Formalmente esto se traduce en

$$G_2(\tau) = \int_0^{y^*(\tau,T)} \left[\tau(1-\phi(\tau)) + p\,(1+s)\,\tau\phi(\tau)\right] y dy + \int_{y^*(\tau,T)}^{\overline{Y}} T dy.$$

Calculando las integrales $G_i\,(\tau)$ donde $i = 1, 2$ obtenemos la expresión que aparece en el enunciado del Lema. ∎

Demostración de la Proposición 5.3. Dividiremos la demostración en dos pasos.

Paso 1. Demostraremos que $G(\tau)$ es creciente cuando $\widetilde{T} < T \leq \overline{Y}$.

(a) Cuando $\widetilde{T} < T \leq \overline{Y}$, el Lema 5.1 nos dice que $\hat{\tau}\,(T) \in (\tau^*, 1]$, por lo tanto en primer lugar debemos ver que $\frac{dG_1(\tau)}{d\tau} > 0$ para $\tau \in (0, \hat{\tau}\,(T)]$. Esto se traduce en demostrar que

$$\frac{dG_1(\tau)}{d\tau} > 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \in [0, \tau^*]$$

y

$$\frac{dG_1(\tau)}{d\tau} > 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \in (\tau^*, \hat{\tau}\,(T)]$$

Para $\tau \in [0, \tau^*]$, dado que los individuos se comportan como evasores totales, la recaudación total es igual a las multas pagadas por los individuos que han sido inspeccionados. Formalmente esto es:

$$G_1(\tau) = \frac{1}{2}\tau p\,(1+s)\,\overline{Y}^2$$

Calculando $\frac{dG_1(\tau)}{d\tau}$ se obtiene

$$\frac{dG_1(\tau)}{d\tau} = \frac{p\,(1+s)\,\overline{Y}^2}{2} > 0.$$

Para $\tau \in (\tau^*, \hat{\tau}(T)]$, los individuos evaden solamente una parte de su renta, por lo que la recaudación total del gobierno es igual a:

$$G_1(\tau) = \frac{1}{2}\tau\left(1 - \phi(\tau) + p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right)\overline{Y}^2.$$

De similar manera que en el caso anterior obtenemos que

$$\frac{dG_1(\tau)}{d\tau} = \frac{\overline{Y}^2}{2}\left[\left(1 - \phi(\tau) + p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right) + \tau\left(p\left(1+s\right) - 1\right)\frac{d\phi(\tau)}{d\tau}\right]. \tag{A.12}$$

Tomando la expresión (2.3), es fácil comprobar que $\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = -\alpha\frac{1}{\tau^2} < 0$, donde $\alpha > 0$ viene dado por

$$\alpha = \frac{(A-1)}{(1+As)}. \tag{A.13}$$

Notemos que el primer término que aparece dentro del corchete de la expresión (A.12) es positivo ya que los parámetros satisfacen la condición interior $s < \frac{1-p}{p}$. Por otro lado, el término que aparece en segundo lugar dentro del corchete también resulta ser positivo ya que $\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} < 0$ y $(p\left(1+s\right) - 1) < 0$. En consecuencia, podemos afirmar que $G_1(\tau)$ es una función creciente respecto al tipo impositivo τ.

(b) En segundo lugar debemos demostrar que $\frac{dG_2(\tau)}{d\tau} > 0$ para $\tau \in (\hat{\tau}(T), 1]$. Dado que si $\widetilde{T} < T \leq \overline{Y}$ sabemos que $\hat{\tau}(T) \in (\tau^*, 1]$, la recaudación del gobierno vendrá dada por los ingresos procedentes del sistema de EO cuando los individuos se comportan como evasores parciales, más los ingresos del sistema de MO. El Lema 5.2 nos proporciona la expresión formal de $G_2(\tau)$:

$$G_2(\tau) = \frac{1}{2}\tau\left(1 - \phi(\tau) + p\left(1+s\right)\phi(\tau)\right)\left(y^*(\tau,T)\right)^2 + T\left(\overline{Y} - y^*(\tau,T)\right)$$

Derivando $G_2(\tau)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dG_2(\tau)}{d\tau} &= \left[\left(\tau\left(1-\phi(\tau)\right) + \tau ps\phi(\tau)\right)\frac{\partial y^*(\tau,T)}{\partial\tau}y^*(\tau,T)\right] + \\ &\quad \left[\frac{1}{2}\left(y^*(\tau,T)\right)^2\left(1 - \phi(\tau) + ps\phi(\tau) + \tau\left(ps-1\right)\frac{d\phi(\tau)}{d\tau}\right)\right] - T\frac{\partial y^*(\tau,T)}{\partial\tau}.\end{aligned} \tag{A.14}$$

Para evaluar el signo de (A.14) necesitamos calcular $\frac{dy^*(\tau)}{d\tau}$. Derivando (4.4), se obtiene

$$\frac{\partial y^*(\tau,T)}{\partial\tau} = -\frac{D}{E(\tau)}y^*(\tau,T), \tag{A.15}$$

donde $E(\tau)$ según la expresión (A.3) es igual a $E(\tau) = 1 - (1-\tau)D$. Dado que $y^*(\tau, T) > 0$, $D > 0$ y $E(\tau) > 0$ para $\tau \geq \widehat{\tau}\left(\overline{Y}\right)$ podemos concluir que $\frac{\partial y^*(\tau,T)}{\partial \tau} < 0$. Así pues, sustituyendo (A.15) en (A.14) y reordenando los términos, podemos reescribir (A.14) como

$$\frac{dG_2(\tau)}{d\tau} = \left(y^*(\tau, T)\right)^2 F,$$

donde

$$F \equiv \left(\tau\left(1+\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)\right)-\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)\right)\left(\frac{-D}{E\left(\tau\right)}\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)\right)+D.$$

Vemos que el signo de la anterior derivada depende del signo de la expresión F, que puede ser reescrita como

$$F = \frac{-2D[\tau(1+\alpha(1-p(1+s)))-\alpha(1-p(1+s))]+E(\tau)(1+\alpha(1-p(1+s)))+2E(\tau)D}{2E(\tau)}$$

El signo de F es el mismo que el de su numerador ya que $E(\tau) > 0$ para $\tau \geq \widehat{\tau}(T)$. Así pues, si nuestro objetivo es demostrar que $\frac{dG_2(\tau)}{d\tau} > 0$, debemos demostrar que la siguiente desigualdad se cumple:

$$-2D\left[\tau\left(1+\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)\right)-\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)\right]+ \qquad \text{(A.16)}$$

$$E\left(\tau\right)\left(1+\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)\right)+2E\left(\tau\right)D>0$$

Observemos que $E\left(\tau\right)\left(1+\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)\right)>0$ por lo tanto, si demostramos que

$$2E\left(\tau\right)D-2D\left[\tau\left(1+\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)\right)-\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)\right]>0, \qquad \text{(A.17)}$$

podemos asegurar que (A.16) también se cumplirá.

Sustituyendo en (A.17) el valor de $E(\tau)$ y reordenando los términos, obtenemos

$$2D(1-\tau)\left(1+\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)-D\right)>0. \qquad \text{(A.18)}$$

Observemos que si se cumple

$$1+\alpha\left(1-p\left(1+s\right)\right)-D>0, \qquad \text{(A.19)}$$

la desigualdad (A.18) se satisface. Sustituyendo las expresiones (4.3) y (A.13) en (A.19) y simplificando términos obtenemos la siguiente desigualdad:

$$A(1-p)+p>\left[(1-p)\,A^{1-\gamma}+p\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{A.20}$$

Es fácil ver que $[(1-p)\,A^{1-\gamma}+p]^{\frac{1}{1-\gamma}}=A\left[1-p+pA^{\gamma-1}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}<A(1-p)$ para todo $\gamma>0$, por lo tanto la desigualdad (A.20) es cierta, en consecuencia $F>0$ y finalmente se obtiene que efectivamente $\frac{dG_2(\tau)}{d\tau}>0$.

Paso 2. Demostrar que $G(\tau)$ es creciente cuando $0\leq T\leq\widetilde{T}$.

En primer lugar demostraremos que $\frac{dG_1(\tau)}{d\tau}>0$ para $\tau\in[0,\widehat{\tau}\,(T)]$. Cuando $0\leq T\leq\widetilde{T}$, el Lema 5.1 nos dice que $\widehat{\tau}\,(T)\in(0,\tau^*]$, por lo tanto para $0\leq\tau\leq\widehat{\tau}\,(T)$ los individuos se comportaran como evasores totales y la recaudación total será igual a las multas pagadas por los individuos que han sido inspeccionados. Formalmente esto es:

$$G_1(\tau)=\frac{\tau p\,(1+s)\,\overline{Y}^2}{2}$$

Calculando $\frac{dG_1(\tau)}{d\tau}$ se obtiene

$$\frac{dG_1(\tau)}{d\tau}=\frac{p\,(1+s)\,\overline{Y}^2}{2}>0.$$

En segundo lugar demostraremos que $\frac{dG_2(\tau)}{d\tau}>0$ para $\tau\in(\widehat{\tau}\,(T)\,,1]$. Dado que $\widehat{\tau}\,(T)\leq\tau^*$ debemos demostrar que

$$\tfrac{dG_2(\tau)}{d\tau}>0 \quad \text{cuando} \quad \tau\in(\widehat{\tau}\,(T)\,,\tau^*]$$

y

$$\tfrac{dG_2(\tau)}{d\tau}>0 \quad \text{cuando} \quad \tau\in(\tau^*,1]\,.$$

Cuando el tipo impositivo es inferior a τ^* los individuos evaden la totalidad de su renta, por lo tanto la recaudación será igual a las multas pagadas por los contribuyentes inspeccionados que escogen tributar según el sistema de EO, más los ingresos obtenidos de los individuos pagan el impuestos de suma fija establecido por el sistema de MO. El Lema 5.2 nos proporciona la expresión formal de la recaudación del gobierno

$$G_2(\tau)=\frac{1}{2}\tau p\,(1+s)\,(y^*(\tau,T))^2+T\left(\overline{Y}-y^*(\tau,T).\right)$$

Derivando $G_2(\tau)$, obtenemos

$$\frac{dG_2(\tau)}{d\tau} = \left[\tau p\left(1+s\right)\frac{\partial y^*(\tau,T)}{\partial \tau}y^*(\tau,T)\right] + \left[\frac{1}{2}p\left(1+s\right)\left(y^*(\tau,T)\right)^2\right] - T\frac{\partial y^*(\tau,T)}{\partial \tau}. \tag{A.21}$$

Para evaluar el signo de (A.21) necesitamos calcular $\frac{dy^*(\tau)}{d\tau}$. Derivando (4.4), se obtiene

$$\frac{\partial y^*(\tau,T)}{\partial \tau} = -\frac{J\left(\tau\right)}{E\left(\tau\right)}y^*(\tau,T), \tag{A.22}$$

donde $E\left(\tau\right)$ según la expresión (A.3) es igual a

$$E\left(\tau\right) = 1 - \left(\left(1-p\right) + p(1-\tau-\tau s)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

y $J\left(\tau\right) = \frac{dE(\tau)}{d\tau}$. Dado que $y^*(\tau,T) > 0$, $J\left(\tau\right) > 0$ y $E(\tau) > 0$ para $\tau \geq \widehat{\tau}\left(T\right)$ podemos concluir que $\frac{\partial y^*(\tau,T)}{\partial \tau} < 0$. Así pues, sustituyendo (A.22) en (A.21) y reordenando los términos, podemos reescribir (A.21) como

$$\frac{dG_2(\tau)}{d\tau} = \left(y^*(\tau,T)\right)^2 H,$$

donde

$$H \equiv \left(-\tau p(1+s)\frac{J\left(\tau\right)}{E\left(\tau\right)} + \frac{1}{2}p\left(1+s\right) + J\left(\tau\right)\right)$$

Vemos que el signo de la anterior derivada depende del signo de la expresión H, que puede ser reescrita como

$$H = \frac{-2\tau p(1+s)J\left(\tau\right) + p\left(1+s\right)E\left(\tau\right) + 2J\left(\tau\right)E\left(\tau\right)}{2E\left(\tau\right)}$$

El signo de H es el mismo que el de su numerador ya que $E\left(\tau\right) > 0$ para $\tau \geq \widehat{\tau}\left(T\right)$. Así pues, si nuestro objetivo es demostrar que $\frac{dG_2(\tau)}{d\tau} > 0$, debemos demostrar que la siguiente desigualdad se cumple:

$$-2\tau p(1+s)J\left(\tau\right) + p\left(1+s\right)E\left(\tau\right) + 2J\left(\tau\right)E\left(\tau\right) > 0. \tag{A.23}$$

Observemos que $p\left(1+s\right)E\left(\tau\right) > 0$ por lo tanto si demostramos que

$$E\left(\tau\right) - \tau p(1+s) > 0, \tag{A.24}$$

podemos asegurar que (A.23) también se cumplirá. Sustituyendo (A.3) en (A.24) es trivial ver que (A.24) es igual a $(A.5)$. En el paso 2 del apartado (a) de la demostración de la Proposición 4.2, se demuestra que (A.5) se cumple.

Cuando $\tau \in (\tau^*, 1]$, nos hallamos en el mismo escenario que el descrito en el apartado (a), paso 2 de la presente demostración, donde se prueba que efectivamente $\frac{dG_2(\tau)}{d\tau} > 0$. ■

Demostración del Lema 6.1. Cuando $\tau = 1$ la expresión de $G(T)$ viene dada por la expresión (4.6). Calculado y resolviendo $\frac{dG(T)}{dT} = 0$, es fácil ver que el máximo de $G(T)$ se obtiene cuando $T = \overline{Y}$. ■

Referencias

[1] Allingham, M. G. y A. Sandmo, (1972). "Income Tax Evasion: A Theoretical Analysis." *Journal of Public Economics* 1, 323-38.

[2] Bordignon, M., (1993). "A Fairness Approach to Income Tax Evasion." *Journal of Public Economics* 52(3), 345-62.

[3] Beck, P., J. Davis y W. Jung, (1991). "Experimental Evidence on Taxpayer Reporting under Uncertainty." *Accounting Review* 66 (3), 535-58.

[4] Becker, W., H. Buchner y S. Sleeking, (1987). "The Impact of Public Transfer Expenditures on Tax Evasion: An Experimental Approach." *Journal of Public Economics* 34(2), 243-52.

[5] Cooley, T. (ed.), (1995). *Frontiers of Business Cycle Research.* Princeton: Princeton University Press.

[6] Cowell, F., (1985). "Tax Evasion with Labour Income." *Journal of Public Economics* 26, 19-34.

[7] Chu, C. Y., (1990). "Plea Bargaining with the IRS." *Journal of Public Economics* 41, 319-333.

[8] Friedland, N., S. Maital y A. Rutenberg, (1978). "A Simulation Study of Income Tax Evasion." *Journal of Public Economics* 10(1), 107-16.

[9] Rubio, G., (1991). "Formación de Precios en el Mercado Bursátil: Teoría y Evidencia Empírica." *Cuadernos Económicos de ICE* 49 (3), 157-186.

[10] Sánchez, I. y J. Sobel, (1993). "Hierarchical Design and Enforcement of Income." *Journal of Public Economics* 50(3), 345-69.

[11] Sánchez, I. y A. de Juan, (1994) "Análisis Experimental del Cumplimiento Fiscal." *Papeles de trabajo del Instituto de Estudios Fiscales,* número 2.

[12] Williams D., (1996). "Trends in Anti-Avoidance. Repent What's Past; Avoid What is to Come." *International Bureau of Fiscal Documentation, November/December 1996,* 502-507.

[13] Yitzhaki, S., (1974). " A Note on Income Tax Evasion: A Theoretical Analysis." *Journal of Public Economics* 3, 201-202.