La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida

Nelly León
UPEL-Instituto Pedagógico de Maturín
nellyleong@hotmail.com

RESUMEN

La historia de la probabilidad presenta situaciones muy atractivas que pueden conducir a reflexionar sobre la presencia del azar en la cotidianidad. En este trabajo mostramos el uso de la historia en la motivación hacia el estudio de la probabilidad, siguiendo el camino de aquéllos que contribuyeron a su desarrollo teórico, los escollos que tuvieron que superar, así como los errores cometidos en la solución de algunos problemas relevantes. Consiste en un estudio de caso que se llevó a cabo con estudiantes de la asignatura *Probabilidad y Estadística* del *Instituto Pedagógico de Maturín*, iniciando con un recorrido desde lo certero hasta lo probable, que permitió visualizar cómo fueron emergiendo las categorías de incertidumbre y de azar tras el debilitamiento del paradigma determinista, para entrar a ver la probabilidad como la matematización del azar y así abordar algunos problemas con fuerte tradición histórica (como el del reparto de la apuesta en un juego interrumpido). Algunas respuestas de los estudiantes a este problema se limitaron a lo que ellos consideran correcto, otros mostraron soluciones similares a las de Paccioli y Tartaglia, y otros se aproximaron a las de Fermat y Pascal.

Palabras clave: Historia de la probabilidad, reparto de apuestas, azar y probabilidad.

ABSTRACT

History as a motivator element towards the study of the probability: the problem of the bets interrupted

The story of probability gives examples of situations that are very attractive and can lead us to reflect on the presence of chance in everyday life. In this work we show the use of history in the motivation towards the study of probability, following the path of those who contributed to its theoretical development, the obstacles they had to overcome, and the mistakes committed when solving some relevant problems. It consists of a case study that was conducted with students in the course of Probability and Statistics of the Pedagogical Institute of Maturin, starting with a tour from the accurate to what is likely, which allowed to visualize how the categories of uncertainty and gambling where emerging after the weakening of the deterministic paradigm to come to see the probability as the mathematization of chance and in this way we address some problems with a strong historical tradition (such as the distribution of bets in a game interrupted). Some of the answers of the students to this problem were limited to what they consider correct, other solutions were similar to those of Paccioli and Tartaglia, and others were close to those of Pascal and Fermat.

Key words: History of the probability, distribution of gambling, chance and probability.

RESUME

L'histoire en tant qu'élément de motivation vers l'étude de la probabilité: le problème du pari interrompu

L'histoire de la probabilité a des situations intéressantes qui mènent réfléchir sur la présence du hasard au quotidien. Dans ce travail on montre l'utilisation de l'histoire pour la motivation de l'étude de la probabilité, toujours sur les pas de ceux qui ont contribué à son développement théorique, des écueils qu'ils ont dû surmonter, ainsi que les erreurs commises dans la solution de quelques problèmes importants. Cette recherche est une étude de cas réalisée avec les étudiants du cours de *Probabilité et Statistique* administré à l' « *Instituto Pedagógico de Maturín* », l'on commence le parcours du certain au probable, cela a permis de visualiser comment émergeaient les catégories d'incertitude et de hasard après l'affaiblissement du paradigme déterministe, pour réussir à voir la probabilité comme la « mathématisation du hasard » afin d'aborder des problèmes avec une forte tradition historique (comme le partage du pari dans un jeu interrompu). Quelques réponses des étudiants à ce problème se sont bornées à ce qu'ils considèrent correct, d'autres étudiants ont montré des solutions semblables à celles de Paccioli et Tartaglia, et d'autres se sont approchés de celles de Fermat et de Pascal.

Mots-clés: histoire de la probabilité, partage du pari, hasard et probabilité.

RESUMO

História como um motivador para o estudo de probabilidade: o problema das apostas interrompido

A história da probabilidade apresenta emocionantes situações que podem levar-nos a reflectir sobre a presença do acaso na vida cotidiana. Neste trabalho, utilizamos a história na motivação para o estudo de probabilidade, seguindo o caminho de todos aqueles que contribuíram para o seu desenvolvimento teórico, os obstáculos que teve de ultrapassar, e os erros cometidos na resolução de alguns problemas relevantes. Consiste em um estudo de caso que foi realizado com estudantes do curso de Probabilidade e Estatística no Instituto Pedagógico de Maturín, começando com uma viagem a partir do que é certeiro até o que é provável, o que permitiu visualizar a forma como eles foram emergindo categorias de incerteza e de acaso após o enfraquecimento do paradigma determinista para vir ver a probabilidade do acaso e mathematization resolver alguns problemas com uma forte tradição histórica (como a distribuição de apostas em um jogo interrompido). Alguns dos alunos respostas para este problema foram limitadas ao que eles consideram corretas, outras soluções foram semelhantes aos de Paccioli e Tartaglia, e outros estavam próximos ao Fermat e Pascal.

Palavras-chave: História da probabilidade, distribuição de jogos de azar, azar e probabilidade.

Recibido: julio 2008.
Aceptado: noviembre 2008.

Introducción

No cabe duda sobre la necesidad que tiene todo ciudadano en la actualidad de tener una formación básica tanto en Probabilidad como en Estadística para manejarse con eficiencia en un mundo incierto caracterizado por la abrumadora cantidad de información que se produce y circula rápidamente y en función de la cual debe tomar decisiones adecuadas. De allí la inclusión de estos tópicos en el currículo escolar desde los primeros niveles educativos, con la consecuente necesidad de la formación de los docentes que se encargarán de abordar estos contenidos en el aula. Es por esto que en el pensum de estudios de los que se forman como profesores de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL-IPM), se ha incluido en el séptimo semestre del componente de formación especializada un curso obligatorio denominado Probabilidad y Estadística Inferencia. Éste tiene como prerrequisitos los cursos de Cálculo en Varias Variables y Álgebra Lineal y su enfoque es teórico, pero además se le trata de dar una orientación didáctica para facilitar la futura transposición didáctica a niveles de la educación primaria y secundaria donde se desempeñarán los docentes en formación.

Los resultados que consecutivamente se obtienen en cuanto al rendimiento académico en esta asignatura dan cuenta de las dificultades que confrontan los estudiantes en la comprensión de la teoría de la probabilidad y en su aplicabilidad a la solución de problemas que generalmente van expresados a través de un enunciado verbal. Razones por las cuales los docentes que administran este curso deben ensayar continuamente nuevas estrategias en la búsqueda de allanar el camino para lograr, en primera instancia, la motivación de los estudiantes hacia el estudio de la probabilidad y en segundo, una actitud positiva hacia su enseñanza, pues de otra forma, ellos no la abordarán con sus estudiantes durante su desempeño profesional.

En un intento de captar la atención inicial de los estudiantes y crear un clima propicio para su estudio, como profesora del curso durante el segundo lapso académico del año 2007, decidí explorar algunas opciones didácticas centradas en el uso de la historia de la probabilidad como elemento clave en la comprensión de la evolución de esta disciplina, haciendo énfasis en el camino seguido por algunos de los matemáticos que hicieron grandes aportes al desarrollo de la teoría de probabilidad en la solución de algunos problemas actualmente considerado como clásicos por el papel que desempeñaron en la conformación del cuerpo teórico que hoy conocemos.

Lo que se intenta en este artículo es mostrar la experiencia de aula que tuvo lugar durante las cuatro primeras sesiones de clase del semestre, cada uno de dos horas de duración, en la cual se intentó develar la importancia del conocimiento de los hechos históricos que motivaron la conformación de la Probabilidad como campo del saber, discutir sobre los aportes de grandes matemáticos, sus líneas de acción al resolver los problemas que se le planteaban principalmente desde el ámbito de los juegos de azar y comparar éstas con el razonamiento actual de nuestros estudiantes. En este sentido se escogieron algunas situaciones clásicas como las del número de resultados posibles al lanzar tres monedas y lo que se ha conocido como el error de D'Alembert, el problema del Duque de Toscana y el problema del reparto de la apuesta en un juego interrumpido, en cuya solución trabajaron, entre otros, Paccioli, Tartaglia, Cardano, Pascal, Fermat y Huggens.

A continuación se describe la experiencia, en forma de relato, que deja ver en sus líneas la metodología seguida en su desarrollo, fundamentada en la investigación como base para la enseñanza y el aprendizaje (Stenhouse, 1998), que puede partir de un esbozo general de lo que se quiere explorar pero que se va ajustando según lo que acontece en el salón de clase donde se develan los elementos problemáticos que se desean transformar.

Motivando la clase de probabilidad a partir de elementos históricos

Es el primer día de actividades del semestre, han asistido cerca de cuarenta estudiantes a la clase de Probabilidad y Estadística en el Instituto Pedagógico de Maturín (Venezuela). En el ambiente se siente la expectativa por el curso que recién se inicia. Los estudiantes tienen ciertas pre concepciones al respecto, intuyen que los contenidos tienen un alto nivel de dificultad. Estas ideas no surgen sólo de los comentarios de pasillo, sino que se conocen los resultados de una investigación realizada por un grupo de compañeros en la unidad curricular Fase de Ejecución de un Proyecto en la cual se abordó la problemática de la comprensión para la resolución de problemas de probabilidad en esta asignatura y se llegó a la conclusión de que efectivamente a los estudiantes se les dificulta la resolución de problemas de probabilidad debido principalmente a las fallas y limitaciones en la comprensión de los enunciados verbales y su transferencia a términos probabilísticos y al escaso dominio de la teoría combinatoria (Ricciardi y Pérez, 2006).

Comienzo el acercamiento alumno-profesor-contenido, explorando las nociones que ellos tienen sobre lo aleatorio y lo determinístico, sobre lo probable y lo posible. Los aportes de los alumnos reconfirman hallazgos de investigaciones anteriores, llevadas a cabo en situaciones similares pero con diferentes grupos de estudiantes (León, 1998); sus concepciones sobre el azar pueden ser agrupadas en tres categorías: Azar como sinónimo de suerte, azar como imprevisto y azar como algo no planificado.

Continuando con la exploración, les planteo la siguiente situación: "Si lanzo al aire dos monedas y observo el diseño que cae en el lado superior: ¿Cuántos resultados diferentes puedo obtener?" Se escuchan varias voces que dicen a la vez *"Son tres resultados diferentes"*. -"Veamos cuáles son esos resultados" - *"Dos caras, dos sellos y una cara y un sello*". Rápidamente buscamos cuatro pares de monedas de diferentes denominaciones, una de Bs. 100 y otra de Bs. 50 y pedimos a un estudiante que lance uno de los pares de moneda y se obtienen dos sellos; le pedimos que las deje así sobre la mesa; otro estudiante lanza otro par de monedas y obtiene cara en la moneda de 100 y sello en la de 50; pasamos a un tercer par de monedas y se repite el resultado anterior; las vuelve a lanzar y continuamos hasta que se obtienen otros dos resultados diferentes: dos caras y cara en la moneda de 50 y sello en la de 100. Se genera una discusión que concluye con la aceptación de que hay cuatro resultados posibles: CC, CS, SC, SS.

Este experimento ha provocado la mención a lo que se ha conocido como el error de D'Alembert (1717, 1783), quien en efecto razonó de una manera incorrecta al resolver el problema de obtener la probabilidad de que salga cara por lo menos una vez cuando se lanzan dos monedas balanceadas. Para la fecha del planteamiento de este problema en 1754, D'Alembert visualizó sólo tres posibles resultados: cara en el primer lanzamiento, cara en el segundo lanzamiento y ninguna cara y, suponiendo que éstos eran igualmente verosímiles, estableció dicha probabilidad en 2/3. (Perero, 1994). Para Ortega (1998) es sorprendente que este matemático no tratará de certificar su resultado por medio de la experimentación como lo hicimos en clase.

Es de hacer notar que al aplicar la definición clásica o Laplaciana para asignar una probabilidad, los distintos puntos muestrales deben ser equiprobables o igualmente verosímiles, lo que no ocurre con los resultados del experimento si no se diferencia entre CS y SC, que por separado representan, respectivamente, en nuestro ejemplo, cara en la moneda de 50 y sello en la de 100; y sello en la moneda de 50 y cara en la de 100; mientras que en conjunto representan el hecho de obtener una cara y un sello, que son situaciones conceptualmente distintas desde el punto de vista probabilístico.

Se hace propicia la ocasión para continuar hablando sobre los orígenes de la probabilidad, el papel que los juegos de azar tuvieron en su desarrollo inicial; los problemas del Caballero de Merè, la comunicación epistolar entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat y el reconocimiento de éstos como los padres de la teoría de probabilidad. Para culminar este primer día de clases solicito a los estudiantes investigar sobre los aportes de éstos y otros matemáticos a la evolución de la probabilidad como disciplina científica.

El segundo día de actividades lo inicio con la presentación de un trabajo titulado “De lo certero a lo probable por los caminos de la ciencia y de nuestra acción ciudadana” (León, 2007), partiendo de los enigmas sobre el origen del universo y la aparición del hombre sobre la tierra; el papel de la filosofía en la búsqueda de respuestas a las grandes interrogantes que se han planteado al respecto a través de los tiempos; el paradigma determinista que predominó durante los siglos del XVI al XIX donde lo aleatorio no tenía cabida, para así llegar a los cambios que fueron introduciéndose desde el campo de la física con el descubrimiento de la relatividad, la física cuántica, la teoría del caos y la presencia de la incertidumbre, como lo he señalado siguiendo a Balandier (1999, p. 9): “Nada es simple, el orden se oculta tras el desorden, lo aleatorio está siempre en acción, lo imprevisible debe ser comprendido”.

Durante la exposición se destaca el papel de Galileo, Descartes y Newton en el arraigamiento de esa forma determinista de pensar el universo, y su definitivo afianzamiento tras las observaciones de Laplace en el sentido de que éste estaba regido por leyes de naturaleza causal que establecían que la situación del universo en un momento determinado podía considerarse como una consecuencia del estado anterior y a la vez como causa de lo que ocurriría después.

Igualmente destaco los aportes de Poincaré a la conceptualización del azar y las interrogantes sobre si éste podía considerarse sólo una manifestación de nuestra ignorancia, y muestro ejemplos de lo señalado por Poincaré sobre los fenómenos fortuitos: aquellos en los cuales pequeñas diferencias en las causan originan grandes diferencias en los efectos, y aquellos donde múltiples y pequeñas causas que interactúan entre sí pueden producir resultados insospechados. Se plantean cuestiones sobre la objetividad del azar y la existencia de las leyes que lo rigen, para llegar así a presentar la probabilidad como la matematización de las leyes del azar.

Nuevamente se aborda el desarrollo histórico de esta disciplina, destacando los aportes de Pascal, Fermat, Laplace, Gauss, Legendre y Kolmogorov y las aplicaciones de la probabilidad a la física que condujeron a la pérdida de vigencia universal de las leyes de Newton y con ellas del paradigma determinista para dar paso a modelos y teorías donde los conocimientos ya no son verdaderos sino sólo probables.

La clase concluye con una discusión sobre el azar y la probabilidad en lo social, en el desenvolvimiento cotidiano de los individuos, que incluyó la sentencia del obispo Buttler: “La probabilidad es una guía para la vida” y las reflexiones de Morin (2000), en “Los siete saberes para la educación del futuro” sobre la necesidad de enseñar para enfrentar las incertidumbres.

La experiencia de esta presentación y su posterior discusión fue altamente enriquecedora para los estudiantes, quienes tuvieron la posibilidad de aproximarse a diversas posiciones paradigmáticas, abordadas desde la epistemología, la filosofía, la física, la matemática, la sociología y sobre todo, con una visión histórica.

Abordando algunos problemas históricos: el reparto de la apuesta interrumpida

Continuando con la idea de reconocer la importancia de abordar la enseñanza de la probabilidad desde su historia, el tercer día de actividades comenzó con el planteamiento y la discusión de algunos problemas clásicos de probabilidad, pero sólo con la finalidad de motivar a los estudiantes pues aun no se había iniciado el estudio de la teoría de la probabilidad. Entre ellos se plantearon el problema del Duque de Toscana y el problema del reparto de la apuesta en un juego interrumpido.

El primero de estos problemas fue propuesto en 1560 por el Duque de Toscana, gran jugador que había observado a lo largo de su experiencia en los juegos de azar, que al lanzar tres dados y sumar sus puntos el 10 aparecía con más frecuencia que el 9, a pesar que, según él, para ambas sumas habían seis maneras de lograrlos: Éstas eran, para el 9: 1+6+2; 1+3+5; 1+4+4; 2+2+5; 2+3+4; 3+3+3, y para el 10: 1+3+6; 1+4+5; 2+2+6; 2+3+5; 2+4+4; 3+3+4. Como en el caso de las monedas, se hizo uso en clase de tres dados de diferentes colores para llegar a visualizar las 25 posibilidades de formar el 9 y las 27 para el 10. La intención fue mostrar la diferencia entre arreglos como: (1,2,6); (1,6,2), (2,1,6); (2,6,1); (6,1,2), (6,2,1), todos éstos considerados por el Duque de Toscana como uno sólo en la suma 1+6+2.

El segundo de los problemas mencionados es reconocido por los estudiosos de los orígenes de la probabilidad como uno de los más importantes en el desarrollo teórico de esta disciplina (Martín y Santos, 2000). Blaise Pascal y Pierre de Fermat, en su famosa comunicación epistolar, abordaron ciertos problemas clásicos planteados en el siglo XVII por Antoine Gombard, mejor conocido como el Caballero de Merè. Entre estos destaca “El problema de la apuesta interrumpida”, en el cual debe decidirse cómo repartir el monto apostado en un juego que debió interrumpirse antes de su culminación. Es sabido que este tipo de problemas ya había sido abordado desde el campo de la aritmética por otros matemáticos como Paccioli quien planteó una solución basada en el puntaje acumulado por cada jugador y Tartaglia quien lo resolvió considerando la ventaja de un jugador respecto a otro cuando se interrumpe el juego. Más tarde, en la vía de considerar la presencia del azar en la posibilidad de ganar de cada jugador, Cardano aportó un grano de arena, al mostrar otra perspectiva de solución que tiene en cuenta el número de juegos que le queda por ganar a cada participante, pero da una solución que no es correcta al confundir probabilidad con esperanza matemática.

El problema consiste en establecer una regla para dividir el monto apostado en un juego cuando éste debe ser interrumpido antes de que alguno de los competidores obtenga el puntaje requerido para ganar. En clase se enunció en los términos originalmente planteados por Luca Paccioli en su obra *Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalità,* tomado de García (2000, p. 25).

> "Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando".

Después de leer el enunciado, lo primero que preguntaron algunos estudiantes fue sobre el significado del término "ducados"; con la ayuda del Diccionario de la Lengua Española (Real Academia Española, 2002), se aclaró que se trataba de una moneda española antigua.

Una de las primeras respuestas que se oyó de inmediato y sin mucha reflexión fue:

-*"Se debe entregar el premio en su totalidad al bando que obtuvo 50 puntos"*
- ¿Por qué?
- *"Porque a este bando sólo le faltó 10 puntos para alcanzar los 60 necesarios para ganar el juego, mientras que al otro bando le faltaron 30 puntos"*
- ¿Están de acuerdo con este reparto?
- *"No, para ganar el juego se requieren 60 puntos, pero un bando acumuló 50 y el otro 30, ninguno de los dos ganaría el premio, entonces el dinero se debe repartir por igual, o sea, 11 ducados para cada bando"*.

En este momento todos quieren hablar a la vez y dar su opinión sobre la forma más "justa" de hacer la repartición del dinero de la apuesta. Entonces, para registrar toda la variedad de ideas, pido a los estudiantes que escriban sus respuestas en una hoja de papel y me la entregan para, a través de ellas, analizar posteriormente las distintas formas de razonar el problema.

Algunos estudiantes dieron argumentos similares a los anteriores, fundamentándose en lo que sería "correcto" hacer:

- *"Lógicamente a cada bando no le corresponde nada porque se necesitan 60 puntos para ganar el juego y ninguno los acumuló. Particularmente pienso que el juego debe ser retomado para que pueda existir un ganador"*

- *"Mi respuesta es que como no hubo ningún ganador lo recomendable es que, el que obtuvo más puntos le tocaría un poco más que al otro bando".*

Este último estudiante ya asoma un reparto proporcional a los puntos acumulados por cada bando, pero no señala como hacer la repartición, lo que si trataron de hacer otros estudiantes. Veamos algunos casos:

- *"Una forma de hacer el reparto sería dividir el premio entre el número de puntos, dando así un valor monetario a cada punto de 0,37 ducados, lo cual multiplicamos por el puntaje mayor logrado entre los dos bandos (50) y el resultado es 18,5 que sería la cantidad de dinero que se le dará al bando que mayor punto obtuvo y la cantidad restante (3,5) ducados será dada al segundo bando <u>como premio de consolación</u>"*

- *En el juego acumularon:*
Grupo A 50
Grupo B <u>30</u> 80 puntos del juego y la apuesta fue de 22 d.

$$\frac{Apuesta}{Puntos} : \frac{2}{80} = 0{,}275$$

0,275 x 30 = 8,25 y 0,275 x 50 = 13,75
A cada equipo le tocó: Grupo B: 8,25 ducados y Grupo A: 13,75 ducados."

El razonamiento de este último estudiante coincide con el seguido por Luca Paccioli (1445-1514, quien ha sido reconocido como el primero en presentar el problema en forma escrita en su obra "Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalità", donde muestra una solución aritmética, basada en los puntos acumulados por cada bando al momento de interrumpirse el juego:

"La solución dada por Paccioli involucra los siguientes cálculos: $\frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$ luego $\frac{8}{11}$ equivale a 22 ducados, y por lo tanto se tiene que al bando que va ganando le corresponderá $\frac{5}{11}$ de 22 ducados (13 $\frac{3}{4}$ ducados) y al bando que va perdiendo le corresponderá $\frac{3}{11}$ de 22 ducados ($8\frac{1}{4}$ ducados)" (García, 2000, p. 25).

El procedimiento del primer estudiante difiere del de Paccioli, en que al establecer la proporción tomó en cuenta los 60 puntos de la apuesta y no los 80 acumulados por los dos bandos. Otros estudiantes mostraron otros tipos de reparto en función de los puntajes acumulados. Veamos uno de esos casos:

-*"Considero que al bando que obtuvo 50 puntos se le debe dar una participación del 75% del premio de los 22 ducados, es decir 16,5 ducados; mientras que al bando que obtuvo 30 puntos le correspondería 25%, es decir 5,5 ducados"*

Para justificar esta partición el estudiante sólo argumenta que el bando de 50 puntos tiene más de la mitad de los 60 que se necesitan para ganar el juego, y el otro sólo obtuvo la mitad de los puntos necesarios. Esta explicación no deja claro la proporción 75 – 25.

Es sabido que Tartaglia (1499 – 1577) también abordó el problema de los repartos en su obra "Trattato generale di numeri et misure" y cuestiona la solución dada por Paccioli, pues él argumenta que el bando que lleva ventaja debe recibir lo que aportó más la parte del remanente proporcional a la ventaja acumulada (García, 2000, p. 26).

Tartaglia presenta su solución en términos de los siguientes cálculos:

50 – 30= 20; $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$; $11\frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$, luego el jugador A recibe 11+3 $\frac{20}{60}$ = 14,67 ducados, y el jugador B: 11 - $3\frac{2}{3}$ = 7,33 ducados.

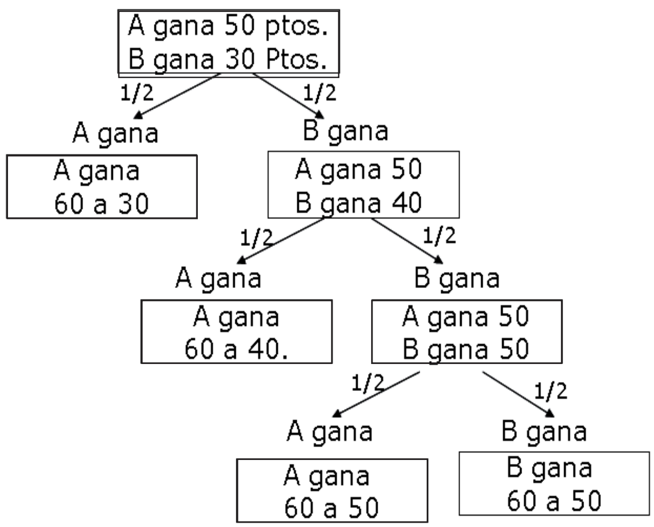
Las formas de reparto hasta ahora mencionadas, tanto las de los estudiantes como las de Paccioli y Tartaglia tienen un sentido aritmético y se centran en el puntaje acumulado por cada bando al interrumpirse el juego. No consideran los puntos que le faltan a cada uno para lograr la meta y las posibilidades de alcanzarlos. Uno de los estudiantes siguió esta línea de razonamiento pero presenta situaciones confusas que lo llevan a un resultado incorrecto:

-"*Al bando de 50 puntos le faltan 10 puntos para alcanzar la meta. Al bando de 30 puntos le faltan 30 puntos para alcanzar la meta. Entonces, 30 – 10 = 20 corresponde a la ventaja que tiene el bando y a esos 20 + 10 = 30; en total este bando tiene 3 posibilidades de ganar mientras que el bando 2 solamente tiene una ventaja a su favor. Se hace la probabilidad de cada participante utilizando la fórmula clásica de probabilidad hablada en la exposición por la profesora la última clase:*

$$P = \frac{n° \ casos \ \ favorables}{n° \ casos \ \ posibles} \text{,entonces } \ P_1 = \frac{3}{4} x2 \ \ D{=}16{,}5D \ \ y \ \ P_2 = \frac{1}{4} x2 \ \ D = 5{,}5 \ D$$

Al bando que va ganando le corresponden 16,5 ducados y al otro bando 5,5 ducados"

Esta solución no se centra sólo en lo aritmético sino que además da un paso hacia el razonamiento probabilístico, pues de alguna manera, aunque no correctamente, considera la probabilidad de ganar de cada bando. Girolamo Cardano (1501-1576) fue el primero en visualizar esta vía de solución, pero tampoco llegó a la repartición correcta. Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1608-1665) conocieron de este problema por intermedio de Antoine de Gamboud, mejor conocido como el Caballero de Merè, quien se lo propuso a Pascal y luego éste consultó a Fermat sobre la forma de solucionarlo. A través de su comunicación epistolar, estos dos matemáticos fueron los primeros en aportar, siguiendo razonamientos diferentes, una solución en términos de la probabilidad de ganar de cada jugador en caso de continuarse el juego, sentando las bases para el desarrollo de la probabilidad condicional. Para el caso trabajado en clase y suponiendo que cada jugada aporta 10 puntos al ganador, se muestra el procedimiento que en forma esquemática en un diagrama de árbol se puede fácilmente hacer en los tiempos actuales:



La probabilidad de que A gane es: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$, luego A debe cobrar $\frac{7}{8}x$ 22=19,25 ducados y esa probabilidad para B es $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, por lo tanto B debe cobrar $\frac{1}{8}x$ 22= 2,75ducados.

Con los planteamientos de Pascal y Fermat se acepta como válida la solución a este problema en términos probabilísticos, al reivindicar el papel del azar en las jugadas que no pudieron realizarse, pues en un juego de esta naturaleza donde las posibilidades de ganar van cambiando a medida que se avanza, no se puede saber con precisión hasta el final quien será el ganador; y si las condiciones iniciales no pueden cumplirse, entonces habrá que echar mano de la probabilidad que cada jugador tiene de ganar si se llegara a término.

El trabajo de Pascal y Fermat fue posteriormente profundizado por Christian Huygens (1629-1695) quien hizo valiosos aportes conceptuales sobre los problemas de repartos cuando la meta inicial no se puede cumplir.

Las respuestas dadas por los estudiantes han permitido seguir el recorrido histórico en la búsqueda de solución a este problema. En la siguiente clase se hizo mención al trabajo de Paccioli, Tartaglia y Cardano, a la contribución indirecta del Caballero de Merè al plantear problemas que se generaban de su experiencia diaria como jugador empedernido, a los aportes de Pascal y Fermat para el desarrollo de la teoría de probabilidad. No obstante, la presentación de la solución de estos últimos se hizo unas clases más tarde como motivación para introducir el tema de la probabilidad condicional. Es de hacer notar, que algunos estudiantes mostraron un alto interés al respecto y al día siguiente comentaron artículos tomados de Internet que trataban sobre la historia de la Probabilidad.

Usando la historia en las clases de Probabilidad

En la siguiente argumentación, Miguel de Guzmán (1992) pone de relieve la importancia de la historia para comprender la situación actual de cada disciplina:

> La historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia nos da luces para entender la razón que han conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de lo que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas se han derivado (p. 16).

González (2004) señala que el uso de la historia de la Matemática con fines didácticos depende de muchos factores, entre ellos el conocimiento histórico del profesor y su iniciativa para transponer y adaptar ese saber ese saber a los intereses y necesidades del grupo, pues no se trata de hacer exposiciones anacrónicas y tediosas sobre hechos del pasado sin relacionarlos con los avances de la disciplina y su estado actual teórico y de aplicabilidad.

Por su parte, Bell (1985, p. 54) ha señalado que ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como la Matemática, siendo esto particularmente cierto para la rama de la Matemática que es la Probabilidad. La forma como fue surgiendo la teoría de la probabilidad a través de juegos de azar, que durante los siglos XVI, XVII y XVIII acaparaban el tiempo de muchas personas, es realmente interesante. Estos juegos implicaban la apuesta de grandes sumas de dinero por lo que los jugadores requerían conocer cuales jugadas les proporcionaban mayores posibilidades de ganar. Esto llevó a paradojas entre lo que se observaba en las jugadas y lo que se creía que eran las posibilidades de acertar y al planteamiento de problemas que llegaban al conocimiento de los grandes matemáticos de la época para los cuales representaba un reto generar la teoría que sustentara sus propuestas de solución. El conocimiento de estos problemas y el estudio de la evolución de su tratamiento, como lo señala (Nolla, 2001), proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y de los conceptos que de ellos han resultado.

En este devenir de la historia, vemos que fueron muchos los matemáticos que fallaron en su razonamiento probabilístico, tal como ocurre a nuestros estudiantes. Evidenciar esto, hace que los alumnos adquieran confianza en sus potencialidades, pues si los matemáticos reconocidos tuvieron que sortear tantos escollos y cometieron errores en sus planteamientos, ellos llegan a pensar que, a pesar del desarrollo actual de la teoría, también ellos tienen derecho a reflejar sus propias limitaciones en la solución de problemas de probabilidad y a presentar sesgos en el razonamiento probabilístico. Por otra parte, observan que el estudio de la probabilidad va más allá de lo netamente teórico pues la historia les muestra que ha surgido de su propia aplicabilidad a situaciones cotidianas que van mucho más allá del campo de los juegos llegando a abarcar áreas tan importantes como la física cuántica, como se mostró en la exposición en clase.

Muchas veces ocurre que el docente, preocupado por cumplir un extenso programa, considera una pérdida de tiempo dedicar pequeños espacios de la actividad escolar a presentar situaciones históricas de la materia, desaprovechando el potencial que éstas tienen como fuente de motivación hacia el estudio y el conocimiento de la temática que se aborda. En este caso en particular, haber destinado un poco más de una semana de clase a discutir sobre algunos elementos de la historia de la Probabilidad permitió sentar las bases para su estudio con fundamento en las bases epistemológicas que conllevan a un conocimiento comprensivo y profundo de esta disciplina.

Referencias

Balandier, G. (1999). *El desdorden. La teoría del caos y las ciencias sociales. Elogio de la fecundidad del movimiento.* Barcelona, España: Gedisa Editorial.

Bell, E. (1985). *Historia de la Matemática*. México: Fondo de Cultura Económica.

De Guzmán, M. (1992). Tendencias innovadoras en la enseñanza de la Matemática. *Bulleti de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 7, 7-33.

García, J. (2000). Historia de un problema: el reparto de la apuesta. *Summa*, 33, 25-36.

González, P. (2004). La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Summa*, 45, 17-28.

León, N. (1998). Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior. *Actas del III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 315-321*.

León, N. (2007). Un recorrido de lo certero a lo probable por los caminos de la ciencia y de nuestra acción ciudadana. *Enseñanza de la Matemática*, Vol. 12 al 16, Número extraordinario, 24-39.

Martín, F. y Santos, J. (2000). Luca Pacioli: en el origen del cálculo de probabilidades. *Revista de Historia Económica*. Año XVIII, 2, 405-417.

Morin, E. (2000). *Los siete saberes necesarios a la educación del futuro*. Caracas: Ediciones Faces/UCV.

Nolla, R. (2001). Estudis i activitats sobre problems clan de la historia de la matemàtica. Per a una aproximació genètica al tractacment de les idees matemàtiques. *Memoria de Licencia d'studis. Denelalitat de Catalunya*.

Ortega, J. (1998). *Elementos de probabilidad*. Caracas: Sociedad Fondo Editorial CENAMEC.

Perero, M. (1994). *Historia e Historias de Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Real Academia de la Lengua Española (2002). *Diccionario de la lengua española*. Madrid: Espasa.

Riciardi, I. y Pérez, A. (2006). Problemática de comprensión para la resolución de problemas en la asignatura Probabilidad y Estadística en el VII semestre de la especialidad de Matemática en la UPEL-IPM. Trabajo de grado no publicado, UPEL-Instituto Pedagógico de Maturín, Maturín-República Bolivariana de Venezuela.

Stenhouse, L. (1998). *La Investigación como Base de la Enseñanza*. Madrid: Morata.

La autora
Nelly León Gómez

Profesora de matemática egresada de la UPEL-Instituto Pedagógico de Maturín, Master en Estadística Aplicada por la Universidad de Pittsburgh y Magister en Educación mención Administración por la UPEL-IPM. Fundadora de ASOVEMAT y de la revista Enseñanza de la Matemática. Coordinadora del Núcleo de Investigación de Educación Matemática de la UPEL-IPM. Candidata a PPI.

VII Congreso Venezolano de Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
EXPERIMENTAL LIBERTADOR
Instituto Pedagógico de Caracas

Asociación Venezolana
de Educación Matemática

CAPÍTULO REGIÓN CAPITAL
ASOVEMAT

Caracas – Venezuela

5 al 8 de octubre de 2 010

TEMA CENTRAL

EL CURRÍCULO MATEMÁTICO

MODALIDADES DE PARTICIPACIÓN

1. Conferencias. Presentación de reflexiones y/o investigaciones realizadas por personas de dilatada trayectoria académica en nuestra área de estudio.
2. Reportes de investigación. Divulgación centrada en trabajos de investigación propuestos, en desarrollo o culminados. (ponencias)
3. Comunicaciones breves. Presentación de experiencias de tipo didáctica o una reflexión de tipo teórico o avances de investigaciones. (ponencias)
4. Talleres. Propuestas prácticas vinculadas con las actividades de enseñanza de la matemática. (8 horas)
5. Carteles. Exposición que sintetice experiencias educativas matemáticas
6. Exposición de Materiales Curriculares. Libros, revistas, folletos, calculadoras, materiales manipulables, fotografías sobre representaciones de la matemática en la realidad, etc.

FECHA DE ENTREGA: HASTA EL 31 DE MARZO DE 2 010
(Sin Prórroga)

CONTACTO ELECTRÓNICO
asovematrc@cantv.net
viicovem@gmail.com