

Banco Central de Chile
Documentos de Trabajo

Central Bank of Chile
Working Papers

N° 520

Junio 2009

CUANDO EL ÍNDICE DE FUERZA RELATIVA CONOCIÓ AL ÁRBOL BINOMIAL

Rodrigo Alfaro

Andrés Sagner

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: <http://www.bcentral.cl/esp/estpub/estudios/dtbc>. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de \$500 si es dentro de Chile y US\$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: bcch@bcentral.cl.

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: <http://www.bcentral.cl/eng/stdpub/studies/workingpaper>. Printed versions can be ordered individually for US\$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch\$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or e-mail: bcch@bcentral.cl.



BANCO CENTRAL DE CHILE

CENTRAL BANK OF CHILE

La serie Documentos de Trabajo es una publicación del Banco Central de Chile que divulga los trabajos de investigación económica realizados por profesionales de esta institución o encargados por ella a terceros. El objetivo de la serie es aportar al debate temas relevantes y presentar nuevos enfoques en el análisis de los mismos. La difusión de los Documentos de Trabajo sólo intenta facilitar el intercambio de ideas y dar a conocer investigaciones, con carácter preliminar, para su discusión y comentarios.

La publicación de los Documentos de Trabajo no está sujeta a la aprobación previa de los miembros del Consejo del Banco Central de Chile. Tanto el contenido de los Documentos de Trabajo como también los análisis y conclusiones que de ellos se deriven, son de exclusiva responsabilidad de su o sus autores y no reflejan necesariamente la opinión del Banco Central de Chile o de sus Consejeros.

The Working Papers series of the Central Bank of Chile disseminates economic research conducted by Central Bank staff or third parties under the sponsorship of the Bank. The purpose of the series is to contribute to the discussion of relevant issues and develop new analytical or empirical approaches in their analyses. The only aim of the Working Papers is to disseminate preliminary research for its discussion and comments.

Publication of Working Papers is not subject to previous approval by the members of the Board of the Central Bank. The views and conclusions presented in the papers are exclusively those of the author(s) and do not necessarily reflect the position of the Central Bank of Chile or of the Board members.

Documentos de Trabajo del Banco Central de Chile
Working Papers of the Central Bank of Chile
Agustinas 1180
Teléfono: (56-2) 6702475; Fax: (56-2) 6702231

CUANDO EL ÍNDICE DE FUERZA RELATIVA CONOCIÓ AL ÁRBOL BINOMIAL

Rodrigo Alfaro
División de Política Financiera
Banco Central de Chile

Andrés Sagner
División de Política Financiera
Banco Central de Chile

Resumen

En este artículo entregamos un método para predecir una popular herramienta del análisis técnico: el Índice de Fuerza Relativa (RSI). Este método está basado en el supuesto de que el precio del activo puede ser caracterizado por el modelo binomial, el cual es ampliamente usado para valorar opciones. El algoritmo es tan sencillo de implementar como la valoración de una opción de compra europea. Se presenta la aplicación del método a la paridad peso – dólar, donde los resultados muestran que nuestra propuesta es superior a la modelación ARMA.

Abstract

In this paper we provide a useful method to forecast one the most popular technical analysis tool: the Relative Strength Index (RSI). This method is based on the assumption that stock price can be characterized by the standard binomial model widely used for pricing option. The algorithm is as simple as to code a standard European option. An empirical application to the exchange rate chilean peso and dollar is provided. The results show that the proposed method is superior to the usual ARMA modeling.

Se agradecen los comentarios de Pablo Pincheira a un borrador preliminar de este trabajo así como también a un árbitro anónimo cuyas sugerencias fueron muy constructivas. Email: ralfaro@bcentral.cl, asagner@bcentral.cl.

1 Introducción

El Índice de Fuerza Relativa, o RSI por *Relative Strength Index*, es una medida popular en el Análisis Técnico y corresponde al cociente entre el promedio de ganancias sobre el promedio de ganancias y el promedio de pérdidas del activo subyacente sobre el cuál está construido (Wilder, 1978). El RSI, por construcción, se encuentra acotado entre 0 y 100, y mostrará una tendencia alcista cuando presenta valores superiores a 50 e inferiores a 70 lo que se entiende como una señal de compra del activo. Sin embargo, el cambio de estrategia ocurre cuando el RSI es mayor que 70, indicando que el precio del activo está por sobre su equilibrio, por lo que la estrategia óptima en dicho caso sería venderlo. Del mismo modo, el RSI mostrará una tendencia bajista cuando presenta valores superiores a 30 e inferiores a 50 lo que se entiende como una señal de venta del activo. Si el RSI presenta valores por debajo de 30, el activo se encontraría subvaluado y la estrategia óptima en este caso sería comprarlo.

Usualmente el RSI se utiliza en conjunto con otras métricas de Análisis Técnico como son medias móviles y el análisis gráfico. En el caso de las medias móviles, éstas en general se utilizan con ventanas de distinto largo a fin de separar la tendencia del componente cíclico de los datos. Dado que se utilizan datos de alta frecuencia, la estimación de la tendencia se basa en promedios móviles de un año, mientras que el ciclo se obtiene con promedios móviles de uno o dos meses. Por otra parte, el análisis gráfico requiere mucha mayor experiencia con el activo en análisis y tiene un fuerte componente subjetivo.

A nuestro juicio existen dos grandes elementos que validan el uso de estas herramientas: las señales de compra o venta entregadas deben ser “confiables” y, en lo posible, éstas deben ser conocidas con “anticipación”. El primer punto puede ser entendido en el sentido que la señal entregada por el indicador genere estrategias que permitan obtener ganancias con ellas, medidas en términos del retorno del activo subyacente. Abarca y otros (2007) realizan una evaluación de la capacidad predictiva del RSI para los retornos de la paridad peso-dólar (CLP) a horizontes de 2 a 35 días y muestran que el RSI tiene capacidad predictiva, por sobre el camino aleatorio, para retornos medidos en horizontes inferiores a siete semanas.

El segundo argumento corresponde a cuánto tiempo antes el especulador puede contar con un indicador que entregue dicha señal. En esta dirección el presente artículo complementa el trabajo anterior investigando métodos que permitan proyectar el RSI para ser utilizado en Análisis Técnico. En primer lugar se presenta una definición formal del índice que explota su similitud con una opción financiera. De esta forma, se propone un método de proyección de él utilizando el instrumental de valoración de opciones, el cual es la principal contribución de este artículo dado que no se conoce literatura que relacione el cálculo estocástico con Análisis Técnico. Por otro lado, se propone una modelación estadística del tipo ARMA. Ambos métodos se aplican para el caso del CLP como activo subyacente. Los resultados muestran que la modelación ARMA(1,1) es una herramienta poderosa para proyectar el RSI, sin embargo, el modelo de valoración de opciones con el árbol binomial presenta mejores resultados en términos de Error de Señal. Utilizando la medida típica de comparación de Error Cuadrático Medio no se aprecian diferencias significativas entre el modelo ARMA(1,1) y el modelo binomial. Por la simplicidad de este último, lo recomendamos como herramienta predictiva y entregamos un código para su implementación en Excel.

2 Modelación del RSI

En esta sección se presenta la construcción del RSI y su comportamiento bajo supuestos sobre el activo subyacente. En particular, revisamos la modelación del modelo binomial y el estándar proceso lognormal, ambos utilizados ampliamente en finanzas para la valoración de opciones. Sobre la base de estos resultados se propone un mecanismo para proyectarlo un período adelante.

2.1 Definición

Consideremos a Z_t como el RSI no escalado, es decir 100 veces Z_t corresponde al RSI usualmente calculado en Análisis Técnico. Siguiendo la definición de Wilder (1978), $Z_t \equiv A_t/(A_t + B_t)$, donde A_t y B_t corresponden a los promedios de ganancias y pérdidas hasta el período t , respectivamente. Ambos promedios son calculados como promedios ponderados donde los ponderadores son inversamente proporcionales al tamaño de la ventana ($K + 1$). Usualmente $K = 13$ pero también es ampliamente utilizado el caso de $K = 29$. Aunque A_t acumula ganancias, en la práctica acumula

cambios no negativos del precio. Es decir A_t puede ser definido como sigue:

$$A_t = \left(\frac{K}{K+1} \right) A_{t-1} + \frac{1}{K+1} (S_t - S_{t-1})^+, \quad (1)$$

donde S_t corresponde al precio del activo en el período t y $(\cdot)^+$ corresponde a la función truncada en cero y que usualmente se ocupa en finanzas para definir los pagos de una opción. Esta función opera como sigue: $(x)^+ = x$ si $x > 0$ y será cero en caso contrario. Dicho de otro modo, $(x)^+ = \max(x, 0)$. Por los mismos argumentos, B_t se define como sigue:

$$B_t = \left(\frac{K}{K+1} \right) B_{t-1} + \frac{1}{K+1} (S_{t-1} - S_t)^+. \quad (2)$$

Es claro de (1) que A_t decrece si el precio del activo tiene una tendencia a la baja, al mismo tiempo, B_t se incrementa dando como resultado que el RSI cae.

Reemplazando (1) y (2) en la definición del RSI tenemos que:

$$Z_t = \frac{A_{t-1} + (S_t - S_{t-1})^+ / K}{A_{t-1} + (S_t - S_{t-1})^+ / K + B_{t-1} + (S_{t-1} - S_t)^+ / K}.$$

Notamos que $(S_{t-1} - S_t)^+ + (S_t - S_{t-1})^+ = |S_t - S_{t-1}|$, donde $|\cdot|$ corresponde a la función valor absoluto. Definiendo el retorno por el precio del activo como $1 + R_t = S_t / S_{t-1}$ y $X_t = S_t / (A_t + B_t)$ como un factor de escala, el RSI en el período t queda en función de su propio rezago, el retorno y otros componentes conocidos en $t - 1$.

$$Z_t = \frac{Z_{t-1} + X_{t-1} R_t^+ / K}{1 + X_{t-1} |R_t| / K}. \quad (3)$$

2.2 RSI bajo el Modelo Binomial

La ecuación (3) nos indica que, con información en $t - 1$, Z_t es una variable aleatoria. Su aleatoriedad viene dada por el retorno sobre el activo. En esta sección consideramos como proyectar Z_t basado en el supuesto que el precio del activo puede ser caracterizado por un árbol binomial.

El Modelo Binomial (MB) es introducido en los libros de valoración de opciones como una

herramienta sencilla, pero poderosa, para obtener precios de opciones (Wilmott, 2007). Este modelo fue introducido por Cox, Ross y Rubinstein (1979) como una alternativa del modelo de tiempo continuo propuesto por Black y Scholes (1973). Cox y autores demuestran que el modelo binomial converge al modelo de Black y Scholes a medida que el número de pasos tiende a infinito. Esta relación se basa en el Teorema Central del Límite. Alternativamente van der Hoek and Elliot (2000) presentan una demostración utilizando el teorema de Berry-Esséen.

Bajo esta distribución, el precio se incrementa por el factor u si se materializa el estado H y decrece por el factor d si el estado L ocurre. Evidentemente $d < 1 < u$, en particular en valoración de opciones se considera $d < 1 + r < u$ como condición que evita el arbitraje en un mundo donde existe un activo libre de riesgo que ofrece un retorno r . Una calibración que simplifica el análisis es $d = 1/u$. Adicionalmente, la probabilidad del estado H es p y la distribución del precio del activo es generada por la combinación de los árboles binomiales. Cada combinación se define como un paso del árbol y se denota por N . Por ejemplo, un árbol con $N = 2$ genera un espacio muestral de cuatro elementos $\Omega = \{HH, HL, LH, LL\}$ que determinan las trayectorias del precio del activo. El número total de trayectorias es 2^N lo que implica que para un número razonable de N se tienen suficientes trayectorias para caracterizar cualquier proceso estocástico.

En nuestro ejemplo, la probabilidad de ocurrencia del evento HH , que determina que una trayectoria es al alza, es p^2 . En términos del RSI, tenemos cuatro posibles valores para el período t y éstos son: Z_t^{HH} , Z_t^{HL} , Z_t^{LH} , y Z_t^{LL} . Cada uno de ellos puede ser calculado sobre la base de lo que ocurre con el precio del activo, S_t , bajo dichos eventos. En particular, para los eventos HL y LH tenemos que $S_t^{HL} = S_t^{LH} = S_{t-1}$, por lo que resulta fácil observar que $Z_t^{HL} = Z_t^{LH} = Z_{t-1}$. Del mismo modo los eventos HH y LL se basan en $S_t^{HH} = u^2 S_{t-1}$ y $S_t^{LL} = d^2 S_{t-1}$, en cuyo caso el indicador toma los siguientes valores:

$$Z_t^{HH} = \frac{Z_{t-1} + X_{t-1}(u^2 - 1)/K}{1 + X_{t-1}(u^2 - 1)/K} \quad \text{y} \quad Z_t^{LL} = \frac{Z_{t-1}}{1 + X_{t-1}(1 - d^2)/K}.$$

La calibración típica del MB implica que $u = \exp(\sigma\delta)$, con $\delta \equiv \sqrt{1/N}$ y σ corresponde a la volatilidad del activo. Usualmente δ es pequeño por lo que podemos expandir en Taylor los

factores de alza y baja como sigue: $u = 1 + \sigma\delta + O(\delta^2)$ y $d = 1 - \sigma\delta + O(\delta^2)$. Utilizando estos resultados podemos obtener: $u^2 = 1 + 2\sigma\delta + O(\delta^2)$ y $d^2 = 1 - 2\sigma\delta + O(\delta^2)$ para lo cual concluimos que, ignorando los términos de orden $O(\delta^2)$, $u^2 - 1 = 1 - d^2 = 2\sigma\delta$.

Sobre la base de los resultados anteriores el valor esperado con información en $t - 1$ para Z_t es:

$$\begin{aligned} E_{t-1}(Z_t) &= p^2 Z_t^{HH} + p(1-p)Z_t^{HL} + (1-p)pZ_t^{LH} + (1-p)^2 Z_t^{LL} \\ &= p^2 \left[\frac{Z_{t-1} + 2\sigma\delta X_{t-1}/K}{1 + 2\sigma\delta X_{t-1}/K} \right] + 2p(1-p)Z_{t-1} + (1-p)^2 \left[\frac{Z_{t-1}}{1 + 2\sigma\delta X_{t-1}/K} \right]. \end{aligned}$$

Por otra parte la probabilidad del evento H (p) utiliza los factores de alza y baja así como también el retorno del precio del activo (μ). Considerando que $\exp(\mu\delta^2) = 1 + \mu\delta^2 + O(\delta^4)$ podemos aproximar la probabilidad como sigue:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\exp(\mu\delta^2) - d}{u - d} = \frac{(1 + \mu\delta^2) - (1 - \sigma\delta + 0.5\sigma^2\delta^2)}{2\sigma\delta} + O(\delta^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\delta}{\sigma} \right] + O(\delta^2) \end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis corresponde a la tendencia del retorno logarítmico. En otras palabras, la diferencia entre éste y el retorno usual viene dada por el ajuste, el cual también aparece cuando se aplica el lema de Ito. De este modo, cuando el retorno logarítmico es pequeño tenemos que $p = 1/2 + O(\delta^2)$. Bajo este caso el precio del activo es una martingala si ignoramos los términos de orden $O(\delta^2)$:

$$\begin{aligned} E_{t-1}(S_t) &= p^2 S_t^{HH} + 2p(1-p)S_t^{HL} + (1-p)^2 S_t^{LL} \\ &= \left(\frac{u^2 + 2 + d^2}{4} \right) S_{t-1} + O(\delta^2) = S_{t-1} + O(\delta^2) \end{aligned}$$

En dicho caso nuestro indicador se comporta como un proceso que revierte a su media, la cual es en el largo plazo $1/2$. Para simplificar la notación consideraremos $\lambda_{t-1} \equiv 2\sigma\delta X_{t-1}/K$ con lo cual tenemos que el valor esperado del RSI, con información en $t - 1$, es:

$$\begin{aligned}
E_{t-1}(Z_t) &= \frac{1}{4} \left(\frac{Z_{t-1} + \lambda_{t-1}}{1 + \lambda_{t-1}} + 2Z_{t-1} + \frac{Z_{t-1}}{1 + \lambda_{t-1}} \right) + O(\delta^2) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{Z_{t-1}}{1 + \lambda_{t-1}} \right) + \frac{1}{2} Z_{t-1} + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_{t-1}}{1 + \lambda_{t-1}} \right) + O(\delta^2) \\
&= Z_{t-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{t-1}}{1 + \lambda_{t-1}} \right) \left(\frac{1}{2} - Z_{t-1} \right) + O(\delta^2).
\end{aligned}$$

Aún cuando el precio del activo sea una martingala, el proceso del RSI es estacionario. Este resultado es interesante toda vez que el RSI es una martingala cuando $\lambda_{t-1} \rightarrow 0$, situación que ocurre cuando $\sigma \rightarrow 0$. En la próxima sección veremos que esta conclusión es similar cuando se considera un modelo más generalizado.

2.3 Aproximación Asintótica del RSI

En la sección anterior definimos al RSI bajo el supuesto que el precio del activo seguía un proceso binomial. Usualmente dicho modelo se ajusta bien a los datos para un N grande, situación en la cual la distribución del precio del activo corresponde a un movimiento browniano. Debido a que Z_t depende de S_t , lo natural sería encontrar el valor exacto del valor esperado de Z_t con información en $t - 1$. Sin embargo, el cómputo de dicha integral no tiene una forma cerrada como en el caso de la opción de compra europea.

Por lo anterior, presentamos en esta sección una aproximación asintótica del RSI que converge a su verdadero valor cuando $K \rightarrow \infty$. Ullah (2004) revisa los métodos posibles para aproximar los momentos de una variable aleatoria. En este artículo consideramos la expansión de Nagar o de muestras grandes, la que ha resultado muy útil para aproximar los sesgos de estimadores de variables instrumentales (Rothenberg, 1977). De (3) tenemos que el denominador puede expandirse como sigue:

$$\frac{1}{1 + X_{t-1}|R_t|/K} = 1 - \frac{1}{K} X_{t-1}|R_t| + \frac{1}{K^2} X_{t-1}^2 R_t^2 + O_p \left(\frac{1}{K^3} \right).$$

Reemplazando este argumento en la fórmula del RSI y eliminando los términos de orden superior

a K^{-2} tenemos que:

$$Z_t = Z_{t-1} + \frac{X_{t-1}(R_t^+ - Z_{t-1}|R_t|)}{K} + \frac{X_{t-1}^2(Z_{t-1}R_t^2 - R_t^+|R_t|)}{K^2} + O_p\left(\frac{1}{K^3}\right).$$

El tercer argumento de la expresión anterior se construye de retornos cuadráticos los que en la práctica debieran ser pequeños. A modo de ejemplo consideremos la aproximación de orden $1/K$ del indicador bajo un modelo de valoración del precio del activo más comúnmente usado, esto es, el modelo de movimiento browniano.

En primer lugar, notamos que bajo este supuesto de la distribución del activo tenemos que $E_{t-1}(R_t^+) = (1/S_{t-1})E_{t-1}[(S_t - S_{t-1})^+]$. El lado derecho de la ecuación puede ser valorado como opción de compra europea donde el activo subyacente es S_t , la tasa de interés es cero y el precio de ejercicio es S_{t-1} . Asumiendo que S_t no posee una tendencia entonces la fórmula de Black y Scholes (1973) puede ser aproximada como $E_{t-1}[(S_t - S_{t-1})^+] = 0.39S_{t-1}\sigma + O(\sigma^4)$ (Wilmott, 2007). Esto implica que $E_{t-1}(R_t^+) \approx 0.39\sigma$ y, por simetría, $E_{t-1}|R_t| \approx 0.78\sigma$. De esta forma el valor esperado del RSI con información en $t - 1$ puede ser aproximado como sigue:

$$E_{t-1}(Z_t) = Z_{t-1} + \frac{0.78\sigma X_{t-1}}{K} \left(\frac{1}{2} - Z_{t-1}\right) + O\left(\frac{1}{K^2}\right). \quad (4)$$

Para el caso del MB presentado en la sección anterior tenemos $N = 2$ lo que implica que $\delta = \sqrt{1/2}$ y por tanto $\lambda_{t-1} = 1.4142\sigma X_{t-1}/K$, luego el valor esperado condicional a la información en $t - 1$ bajo ese modelo es:

$$E_{t-1}(Z_t) = Z_{t-1} + \frac{0.7071\sigma X_{t-1}/K}{1 + 1.4142\sigma X_{t-1}/K} \left(\frac{1}{2} - Z_{t-1}\right).$$

Evidentemente los resultados no son exactamente iguales debido a que la modelación de esta sección implica un N grande y el valor esperado calculado es aproximado con un error $O(1/K^2)$ el cual decae para una ventana grande de datos. Pese a lo anterior, ambos resultados entregan similares conclusiones: el RSI debiera revertir a su media la cual corresponde a $1/2$, y el tamaño de las perturbaciones es proporcional a la volatilidad del activo.

2.4 Modelación ARMA

La discusión teórica presentada en esta sección implica que el RSI debiera ser estacionario. De esta forma podemos generar una modelación del tipo ARMA(p,q), como:

$$Z_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i Z_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j e_{t-i}$$

donde $\theta_0 = 1$. La selección de los parámetros p y q puede ser realizada a través de los criterios de información Akaike (AIC) y Schwarz (BIC) definidos como:

$$\begin{aligned} AIC &= -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T} \\ BIC &= -2\frac{\ell}{T} + \frac{k}{T} \ln T \end{aligned}$$

donde ℓ es el logaritmo de la función de máxima verosimilitud, $k = 1 + p + q$ es el número de parámetros estimados y T es el tamaño de la muestra empleada para la estimación.

3 Aplicación al caso del CLP

Abarca y otros (2007) identifican que al menos el 70% de los encuestados en mesas de dinero utilizan el RSI como indicador de compra/venta sobre el dólar. En su análisis ellos identifican a este indicador como un elemento predictor del retorno de este activo.

En esta sección entregamos los resultados de la implementación del Modelo Binomial (MB) para la anticipación del RSI, así como los resultados obtenidos para varios modelos ARMA. Para el período de la muestra en análisis el RSI puede ser modelado a través de un ARMA(1,1). Sin embargo, un sencillo MB puede entregar mejores señales medido como efectividad en predecir el signo.

3.1 Descripción de la muestra

La implementación del modelo binomial al caso del CLP utiliza datos del tipo de cambio peso-dólar en frecuencia diaria para el período comprendido entre Junio 2000 y Abril 2009 obtenidos de Bloomberg (Figura 1). La muestra empleada posee un total de 2215 observaciones con dos ventajas asociadas. Primero, se puede excluir un número grande de observaciones iniciales sin afectar las propiedades de muestras “grandes”. Notemos que el cálculo del RSI requiere de valores iniciales para A_t y B_t los cuales son elegidos arbitrariamente y, por lo tanto, condicionan la evolución inicial de la serie. Segundo, el tamaño de muestra permite implementar grillas para ventanas móviles (M) de variados tamaños.



Figure 1: Tipo de Cambio Peso-Dólar

En la Figura 2 se muestran los retornos diarios del dólar. De ella se puede notar el considerable incremento en la volatilidad del activo, en especial, luego de la quiebra del banco de inversión Lehman Brothers.

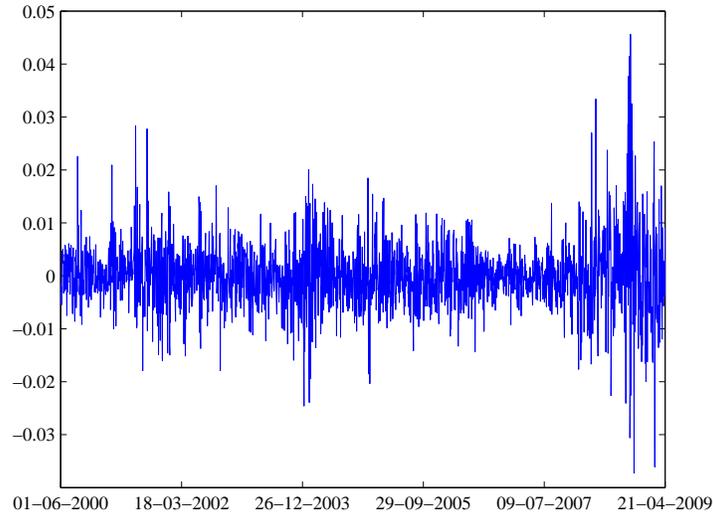


Figure 2: Retornos Diarios del Tipo de Cambio Peso-Dólar

En efecto, la desviación estándar del retorno diario durante el período Septiembre 2008 a Abril 2009 es 2.3 veces mayor que aquella previa a la quiebra del banco de inversión norteamericano, y 2.0 veces mayor que la volatilidad observada en todo el período considerado (Tabla 1).

Tabla 1: Estadística Descriptiva

	Retornos Diarios CLP		
	Jun'00-Ago'08	Sep'08-Abr'09	Jun'00-Abr'09
Media	0.0000	0.0009	0.0001
Desv. Est.	0.0056	0.0130	0.0064
Asimetría	0.2775	0.4658	0.5377
Curtosis	5.5017	4.6185	8.6939
P10	-0.0064	-0.0131	-0.0068
P90	0.0066	0.0155	0.0071

En la Tabla 2 se muestran las estadísticas descriptivas asociadas a las series del RSI estimadas a partir de la definición de Wilder (1978) para $K = 13$ y $K = 29$. Los resultados sugieren que el RSI revierte al valor $1/2$, consistente con la modelación MB y la aproximación asintótica descritas anteriormente. Un aspecto interesante de las series es que, a pesar que ellas se encuentran acotadas entre 0 y 1, el RSI alcanza en pocas ocasiones valores por debajo de 0.3 o por sobre 0.7.

Tabla 2: Estadística Descriptiva RSI

$K = 13 / (K = 29)$

	Jun'00-Ago'08	Sep'08-Abr'09	Jun'00-Abr'09
Media	0.4933 (0.4960)	0.5214 (0.5457)	0.4953 (0.4996)
Desv. Est.	0.1470 (0.1064)	0.1363 (0.1039)	0.1464 (0.1069)
Asimetría	-0.0774 (0.0083)	0.4649 (0.3960)	-0.0512 (0.0345)
Curtosis	2.4921 (2.5802)	2.3275 (1.9974)	2.5106 (2.5975)
P10	0.2983 (0.3587)	0.3647 (0.4282)	0.3014 (0.3654)
P90	0.6760 (0.6335)	0.7187 (0.7028)	0.6801 (0.6367)

3.2 Comparación de Modelos de Proyección

La anticipación del RSI sobre la base del Modelo Binomial y modelos ARMA requiere una definición de la función de pérdida (a minimizar) que se utilizará para evaluar las proyecciones generadas por ellos. En este sentido, emplearemos dos de ellas ampliamente utilizadas en la literatura de proyecciones y en finanzas: el Error Cuadrático Medio (ECM) y una modificación de la función de pérdida basada en la Dirección de Cambio (Elliott y Timmermann, 2008), la cual llamaremos Error de Señal (ES).

Sea \hat{Z}_t la proyección del RSI obtenida mediante un modelo de proyección cualquiera y T el tamaño de muestra. El ECM se define como:

$$ECM = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(\hat{Z}_t, Z_t)$$

donde $g(\hat{Z}_t, Z_t) \equiv (Z_t - \hat{Z}_t)^2$.

Para el caso del ES, consideremos a $\Delta\hat{Z}_t = \hat{Z}_t - \hat{Z}_{t-1}$ como la primera diferencia del RSI proyectado. De esta forma, el error de señal se define como:

$$ES = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T g(\Delta \hat{Z}_t, \Delta Z_t)$$

donde

$$g(\Delta \hat{Z}_t, \Delta Z_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{signo}(\Delta \hat{Z}_t) = \text{signo}(\Delta Z_t) \\ 1 & \text{si } \text{signo}(\Delta \hat{Z}_t) \neq \text{signo}(\Delta Z_t) \end{cases}$$

De las ecuaciones anteriores es claro que el ECM elegirá aquel modelo que genere proyecciones más exactas para el valor del RSI, en el sentido que dicha función de pérdida minimiza el error de proyección. Para el caso del ES, el modelo seleccionado será aquel que minimice la señal de compra/venta proyectada ($\Delta \hat{Z}_t$), respecto de la señal real (ΔZ_t).

3.3 Resultados ARMA

Los resultados presentados en las Tablas 3 y 4 muestran que los modelos ARMA entregan un buen ajuste de los datos y confirman que el RSI es estacionario. De las especificaciones presentadas se favorece la modelación ARMA(1,1) siguiendo el criterio BIC debido a que este indicador por construcción penaliza mucho más que AIC el número de parámetros estimados, por lo que tiende a elegir modelos más parsimoniosos. Por otra parte, el ARMA(1,1) es consistente en ambas definiciones del RSI. El valor de largo plazo del modelo se encuentra dado por $[0.0283/(1 - 0.9429)] = 0.4956$ para $K = 13$ y $[0.0126/(1 - 0.9746)] = 0.4961$ para $K = 29$, muy en línea con la evidencia presentada en la tercera columna de la Tabla 2. Notamos que los modelos ARMA(1,2) y ARMA(2,1) son fuertes candidatos debido a que la especificación MA probablemente recoge el hecho de que el RSI tiene componentes de promedio móvil y por otra parte, dado iguales valores para la función de verosimilitud e igual cantidad de parámetros estimados, el AIC y BIC son similares en ambas especificaciones pero siendo éste último levemente inferior al BIC del modelo seleccionado.

Tabla 3: Estimación Modelos ARMA para RSI con $K = 13$

(Errores estándar robustos en paréntesis)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
C	.0222 (.0036)	.0249 (.0034)	.4957 (.0082)	.4957 (.0083)	.0283 (.0040)	.0330 (.0055)	.0260 (.0040)	.0290 (.0134)
AR(1)	.9552 (.0068)	1.0724 (.0181)			.9429 (.0076)	.7095 (.1310)	.9475 (.0077)	.8392 (.4458)
AR(2)		-.1227 (.0180)				.2238 (.1257)		.1021 (.4202)
MA(1)			.8414 (.0151)	1.1848 (.0227)	.1429 (.0195)	.3720 (.1274)	.1332 (.0203)	.2411 (.4456)
MA(2)				.6291 (.0234)			-.0401 (.0209)	-.0244 (.0672)
R^2	.9129	.9142	.6462	.8000	.9143	.9144	.9144	.9144
R^2 Adj.	.9128	.9141	.6460	.7998	.9142	.9143	.9143	.9143
$\log(L)$	3826.1	3842.9	2270.2	2903.5	3844.9	3846.6	3846.6	3846.6
AIC	-3.4436	-3.4578	-2.0425	-2.6119	-3.4596	-3.4602	-3.4602	-3.4594
BIC	-3.4384	-3.4501	-2.0373	-2.6042	-3.4519	-3.4499	-3.4500	-3.4465

Tabla 4: Estimación Modelos ARMA para RSI con $K = 29$

(Errores estándar robustos en paréntesis)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
C	.0098 (.0025)	.0111 (.0023)	.4998 (.0062)	.4998 (.0063)	.0126 (.0027)	.0153 (.0036)	.0113 (.0026)	.0131 (.0056)
AR(1)	.9802 (.0049)	1.1018 (.0187)			.9746 (.0052)	.6835 (.1221)	.9772 (.0051)	.8328 (.3605)
AR(2)		-.1241 (.0184)				.2858 (.1194)		.1408 (.3511)
MA(1)			.8970 (.0110)	1.3377 (.0216)	.1453 (.0197)	.4313 (.1182)	.1363 (.0204)	.2797 (.3606)
MA(2)				.7037 (.0226)			-.0522 (.0216)	-.0313 (.0584)
R^2	.9611	.9617	.6867	.8481	.9618	.9619	.9619	.9619
R^2 Adj.	.9611	.9617	.6866	.8480	.9618	.9619	.9619	.9618
$\log(L)$	5420.5	5437.7	3103.4	3907.5	5440.3	5443.4	5443.4	5443.6
AIC	-4.8793	-4.8939	-2.7928	-3.5159	-4.8962	-4.8981	-4.8982	-4.8974
BIC	-4.8742	-4.8862	-2.7876	-3.5082	-4.8885	-4.8878	-4.8879	-4.8846

3.4 Resultados MB

La selección del par de enteros (N, M) que minimizan el error cuadrático y el error de señal se realizó implementando una búsqueda por grilla en base a la ecuación (5).

Tabla 5: Grilla para $K = 13$
Error Cuadrático $\times 10^{-3}$ / (Error de Señal)

N	M									
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
10	.2131 (.4788)	.2008 (.4903)	.1968 (.4950)	.1943 (.5039)	.1932 (.5137)	.1929 (.5249)	.1921 (.5229)	.1914 (.5154)	.1925 (.5244)	.1922 (.5385)
11	.2125 (.4797)	.2001 (.4962)	.1962 (.4946)	.1937 (.5030)	.1928 (.5155)	.1925 (.5285)	.1918 (.5210)	.1912 (.5186)	.1923 (.5276)	.1921 (.5398)
12	.2130 (.4801)	.2007 (.4903)	.1967 (.4959)	.1942 (.5043)	.1932 (.5137)	.1929 (.5221)	.1921 (.5215)	.1914 (.5177)	.1924 (.5257)	.1922 (.5380)
13	.2125 (.4792)	.2001 (.4975)	.1962 (.4950)	.1937 (.5025)	.1928 (.5141)	.1925 (.5276)	.1918 (.5201)	.1912 (.5186)	.1923 (.5280)	.1921 (.5398)
14	.2129 (.4801)	.2006 (.4907)	.1967 (.4964)	.1941 (.5039)	.1931 (.5150)	.1928 (.5253)	.1921 (.5220)	.1914 (.5177)	.1924 (.5257)	.1922 (.5362)
15	.2125 (.4792)	.2001 (.4975)	.1962 (.4941)	.1937 (.5020)	.1928 (.5141)	.1925 (.5276)	.1918 (.5192)	.1912 (.5186)	.1923 (.5280)	.1921 (.5403)
16	.2129 (.4801)	.2006 (.4921)	.1966 (.4968)	.1941 (.5039)	.1931 (.5155)	.1928 (.5258)	.1921 (.5215)	.1914 (.5181)	.1924 (.5244)	.1923 (.5362)
17	.2125 (.4788)	.2002 (.4971)	.1962 (.4946)	.1937 (.5020)	.1928 (.5141)	.1925 (.5281)	.1918 (.5197)	.1912 (.5177)	.1923 (.5280)	.1921 (.5403)
18	.2128 (.4801)	.2006 (.4930)	.1966 (.4964)	.1941 (.5020)	.1931 (.5155)	.1928 (.5258)	.1920 (.5215)	.1914 (.5177)	.1924 (.5248)	.1922 (.5348)
19	.2125 (.4792)	.2002 (.4962)	.1962 (.4950)	.1937 (.5020)	.1928 (.5141)	.1926 (.5281)	.1919 (.5197)	.1912 (.5167)	.1923 (.5280)	.1921 (.5398)
20	.2128 (.4806)	.2005 (.4930)	.1966 (.4968)	.1940 (.5020)	.1931 (.5155)	.1928 (.5253)	.1920 (.5206)	.1913 (.5154)	.1924 (.5248)	.1922 (.5352)

Tabla 6: Grilla para $K = 29$
 Error Cuadrático $\times 10^{-3}$ / (Error de Señal)

N	M									
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
10	.7261 (.4734)	.5700 (.4767)	.5163 (.4882)	.4912 (.4743)	.4786 (.4740)	.4742 (.4966)	.4676 (.4927)	.4628 (.5007)	.4659 (.4991)	.4659 (.5269)
11	.7244 (.4725)	.5672 (.4790)	.5135 (.4882)	.4885 (.4730)	.4761 (.4818)	.4720 (.4979)	.4657 (.4904)	.4611 (.5016)	.4645 (.5074)	.4649 (.5288)
12	.7255 (.4725)	.5694 (.4772)	.5159 (.4891)	.4908 (.4730)	.4782 (.4736)	.4739 (.4961)	.4674 (.4927)	.4626 (.5011)	.4657 (.4995)	.4658 (.5283)
13	.7241 (.4725)	.5671 (.4799)	.5135 (.4878)	.4886 (.4730)	.4762 (.4822)	.4721 (.4989)	.4658 (.4918)	.4612 (.5011)	.4645 (.5074)	.4649 (.5283)
14	.7250 (.4725)	.5690 (.4776)	.5155 (.4887)	.4906 (.4716)	.4780 (.4745)	.4737 (.4948)	.4672 (.4931)	.4625 (.5007)	.4656 (.5014)	.4657 (.5288)
15	.7238 (.4725)	.5670 (.4799)	.5135 (.4882)	.4886 (.4730)	.4763 (.4822)	.4722 (.4984)	.4659 (.4913)	.4612 (.5016)	.4646 (.5074)	.4649 (.5274)
16	.7247 (.4725)	.5687 (.4785)	.5153 (.4891)	.4904 (.4711)	.4779 (.4759)	.4736 (.4943)	.4671 (.4945)	.4624 (.5007)	.4655 (.5028)	.4656 (.5288)
17	.7236 (.4725)	.5670 (.4803)	.5135 (.4882)	.4887 (.4721)	.4763 (.4822)	.4722 (.4979)	.4659 (.4918)	.4613 (.5016)	.4646 (.5074)	.4650 (.5279)
18	.7244 (.4725)	.5685 (.4790)	.5151 (.4896)	.4902 (.4702)	.4777 (.4763)	.4735 (.4925)	.4670 (.4950)	.4623 (.5011)	.4654 (.5028)	.4656 (.5292)
19	.7235 (.4720)	.5670 (.4799)	.5135 (.4878)	.4887 (.4716)	.4764 (.4818)	.4723 (.4966)	.4660 (.4927)	.4613 (.5011)	.4646 (.5078)	.4650 (.5283)
20	.7242 (.4725)	.5683 (.4790)	.5150 (.4900)	.4901 (.4707)	.4776 (.4772)	.4734 (.4952)	.4669 (.4941)	.4622 (.5007)	.4654 (.5041)	.4655 (.5292)

Observando los resultados reportados en la Tabla 5 y 6 notamos que el error cuadrático de predicción es mínimo para $N = 11$ y $M = 40$, tanto para un tamaño de ventana del RSI igual a 13, como para uno igual a 29. Para el caso del error de señal, éste es mínimo en $N = 10$ y $M = 5$ si se emplea un tamaño de ventana igual a 13. Con $K = 29$, por el contrario, $N = 18$ y $M = 20$ minimizan el error de señal.

Un aspecto interesante de éstos resultados corresponde al comportamiento de los errores de predicción como función del tamaño de la ventana de datos M . El error cuadrático es, según lo esperado, decreciente en M . Sin embargo notamos que el error de señal no presenta un patrón claro de crecimiento o decrecimiento en M .

3.5 Comparación fuera de muestra

Consideremos a \hat{Z}_t y \tilde{Z}_t como la proyección del RSI obtenidas mediante dos modelos distintos en competencia. En adición, sea $g(Z_t, \hat{Z}_t)$ ($g(Z_t, \tilde{Z}_t)$) una medida de la exactitud de predicción (error de predicción) como función del RSI y de \hat{Z}_t (\tilde{Z}_t). De esta forma, la hipótesis nula bajo la cual ambos modelos entregan igual precisión en la proyección de la serie se encuentra dada por $E[g(Z_t, \hat{Z}_t) - g(Z_t, \tilde{Z}_t)] = 0$ o $E[d_t] = 0$, donde $d_t \equiv g(Z_t, \hat{Z}_t) - g(Z_t, \tilde{Z}_t)$. Para evaluar ésta hipótesis, Diebold y Mariano (1995) proponen el siguiente test

$$S_1 = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{2\pi\hat{f}_d(0)}{T}}} \sim N(0, 1)$$

donde

$$\bar{d} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [g(Z_t, \hat{Z}_t) - g(Z_t, \tilde{Z}_t)]$$

es la media muestral de la diferencia entre los errores de predicción y

$$\hat{f}_d(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{(T-1)} \left(\frac{\tau}{S(T)} \right) \hat{\gamma}_d(\tau)$$

es un estimador consistente de la densidad espectral en frecuencia cero asociada a la diferencia entre errores de predicción, $(\tau/S(T))$ es una ventana de rezagos, $S(T)$ es la función de truncamiento de rezagos, y $\hat{\gamma}_d(\tau)$ es la autocovarianza muestral de orden τ asociada a d_t definida como

$$\hat{\gamma}_d(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=|\tau|+1}^T (d_t - \bar{d})(d_{t-|\tau|} - \bar{d})$$

Para operacionalizar el test de Diebold y Mariano a nuestro caso aplicado al CLP definimos \hat{Z}_t y \tilde{Z}_t como las proyecciones a un día del RSI obtenidas mediante el MB y ARMA(1,1), respectivamente. Empleamos el error cuadrático y error de señal para $g(\cdot)$. El primero es ampliamente utilizado en la literatura de proyecciones, mientras que la elección del segundo responde a la capacidad de un modelo de poder anticipar señales de compra / venta del activo para la generación de estrategias.

Por simplicidad utilizamos una ventana de rezagos rectangular (o uniforme), definida como

$$\left(\frac{\tau}{S(T)}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{\tau}{S(T)}\right| \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

La función de truncamiento de rezagos $S(T)$ fue seleccionada en base a las autocorrelaciones muestrales asociadas a la diferencia entre errores cuadráticos (d^{EC}) y entre errores de señal (d^{ES}). A partir de la Figura 3 notamos que para el error cuadrático ninguna autocorrelación es estadísticamente distinta de cero y, por lo tanto, el argumento de la ventana de rezagos se transforma en $|\tau| < 1$. Para el caso del error de señal, consideramos sólo la primera autocorrelación muestral por lo que $S(T) = 1$.

Los resultados del test Diebold-Mariano exhibidos en la Tabla 7 indican que bajo error cuadrático, el MB y ARMA(1,1) poseen igual precisión en la proyección del RSI a un día, tanto para un tamaño de ventana de 13 días, como para uno de 29 días. Bajo error de señal, por el contrario, rechazamos la hipótesis nula de igual exactitud de proyección con un 10% de significancia. El signo negativo indica que el modelo ARMA(1,1) posee un error de señal mayor que aquel del MB, por lo que éste último es más efectivo en predecir el signo de cambio (diario) del RSI.

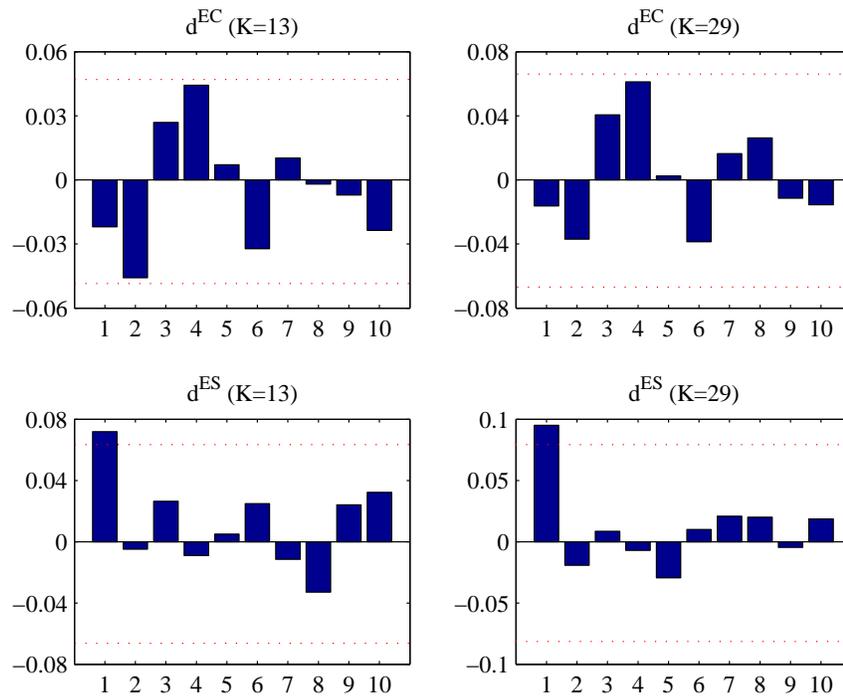


Figure 3: Autocorrelograma Muestral para Diferencia entre Errores de Predicción d_t

Tabla 7: Test Diebold-Mariano

	$K = 13$		$K = 29$	
	z-value	p-value	z-value	p-value
d_{EC}^K	0.210	0.833	0.721	0.471
d_{ES}^K	-1.719	0.086	-2.417	0.016

4 Conclusiones

En este artículo presentamos al indicador de análisis técnico RSI como un instrumento derivado. Basado en dicha modelación explotamos la posibilidad de generar una predicción del RSI utilizando el modelo de valoración de opciones del árbol binomial y el modelo de valoración Black-Scholes. En este último caso presentamos una aproximación asintótica del primer momento del indicador. Con esto proponemos un método sencillo de predicción del RSI basado en valoración de opciones (MB).

En la aplicación empírica para la paridad peso-dólar se observa que el método propuesto (MB) presenta un error cuadrático medio que no es estadísticamente inferior al que se obtiene de una modelación ARMA(1,1), este último seleccionado con el criterio de Schwarz (BIC). Sin embargo, MB presenta un menor error de señal que el ARMA, siendo este valor significativo.

Debido a la simplicidad de MB y la superioridad estadística en términos de error de señal se recomienda como herramienta predictiva por sobre la modelación ARMA para el caso del RSI obtenido de la paridad peso-dólar. En particular, el modelo resultante para la modelación del RSI a 14 días requiere solo de la calibración del promedio y volatilidad de la última semana del retorno de la paridad peso-dólar y de 10 pasos del árbol binomial.

Referencias

- Abarca, A., F. Alarcón, Pincheira, P. y J. Selaive (2007) "Nominal Exchange Rate in Chile: Predictions Based on Technical Analysis," *Journal Economía Chilena*, Banco Central de Chile, 10(2): 57-80.
- Black, F. y M., Scholes (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81: 637-659.
- Cox, J., S., Ross y M., Rubinstein (1979) "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7: 229-264.
- Diebold, F. y X. Mariano (1995) "Comparing Predictive Accuracy," *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3): 503-508.

Elliott, G. y A. Timmermann (2008) “Economic Forecasting,” *Journal of Economic Literature*, 46(1): 3-56.

Ullah, A. (2004) *Finite Sample Econometrics* New York: Oxford University Press.

van der Hoek, J. y R. Elliot (2000) *Binomial Models in Finance*. Springer.

Wilder, J. W. (1978) *New Concepts in Technical Trading Systems*, Trend Research.

Wilmott, P. (2007) *Paul Wilmott introduces Quantitative Finance*, Second edition. John Wiley & Sons, Ltd.

A Anexo

A.1 Implementación del MB

Notamos que los parámetros de interés en el MB son μ y σ y los que permiten la identificación de la probabilidad del evento H (alza) y el factor de alza (u). Por simplicidad consideramos estimadores $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ obtenidos de la media y desviación estándar para una ventana de datos de tamaño M .

Adicionalmente el modelo requiere de la elección de número de pasos óptimo para caracterizar el proceso del precio del activo. Por lo tanto, la implementación del modelo binomial requiere de la elección de un par ordenado de enteros (N, M) , los cuales pueden ser seleccionados a través del uso de una grilla que minimice algún criterio determinado por el analista.

En nuestro caso investigamos sobre los valores que minimizan el error cuadrático de predicción y aquellos que minimizan los errores en la señales de compra/venta del activo. Notamos que la minimización del error de señal requiere una ventana de datos considerablemente menor que la minimización del error cuadrático.

Para simplificación de la discusión suponemos que el precio del activo puede ser caracterizado con N pasos del árbol binomial y los estimadores μ_M y σ_M fueron obtenidos de una ventana de tamaño M , entonces el valor esperado del RSI para el próximo período puede ser caracterizado utilizando la fórmula de la opción de compra europea (van der Hoek and Elliot, 2000) como sigue:

$$E_{t-1}(Z_t) = \sum_{i=0}^N \frac{N!}{i!(N-i)!} p_M^i (1-p_M)^{N-i} \left[\frac{Z_{t-1} + X_{t-1} \left(u_M^{2i-N} - 1 \right)^+ / K}{1 + X_{t-1} |u_M^{2i-N} - 1| / K} \right] \quad (5)$$

Los elementos p_M y u_M resultan de calibrar los parámetros del árbol binomial utilizando $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ calculados en ventanas móviles de tamaño M . Existen variadas calibraciones posibles, sin embargo nosotros elegimos la típica utilizada en valoración de activos (Wilmott, 2007): $u_M = \exp(\sigma_M \sqrt{1/N})$ y $p_M = (a_M - d_M)/(u_M - d_M)$ donde $d_M = 1/u_M$ y $a_M = \exp(\mu_M/N)$.

Notamos que (5) es fácilmente implementable en una hoja de cálculo. Así como también la estimación de μ_M y σ_M en ventanas móviles tampoco requiere de la necesidad de un software econométrico especializado. Por lo anterior el siguiente código en *Visual Basic for Application* (VBA) puede ser incorporado en Excel para este propósito.

```
Function MB(N, Mu, Sigma, Z, X, K)
  Dim p, u, Q1, Q2, Q3, Q4, Q5 As Double
  u = Exp(Sigma * Sqr(1 / N))
  p = (Exp(Mu / N) - 1 / u) / (u - 1 / u)

  MB = 0
  For i = 0 To N
    Q1 = Application.Combin(N, i)
    Q2 = (p ^ i) * ((1 - p) ^ (N - i))
    Q3 = Application.Max(u ^ (2 * i - N) - 1, 0)
    Q4 = Abs(u ^ (2 * i - N) - 1)
    Q5 = (Z + X * Q3 / K) / (1 + X * Q4 / K)
    MB = MB + Q1 * Q2 * Q5
  Next i
End Function
```

El código en VBA corresponde a una función que requiere de: el número de pasos para el árbol binomial (N), las estimaciones del promedio y desviación estándar a utilizar, el rezago del RSI (Z_{t-1}), el factor X_{t-1} que definimos en el texto y la ventana del RSI en análisis, típicamente $K = \{13, 29\}$, lo que entrega el RSI14 y RSI30.

Consideremos como ejemplo el día 6 de Abril de 2009. Los antecedentes que tenemos son $A_{t-1} = 2.0500$, $B_{t-1} = 2.6911$ y $S_{t-1} = 580.35$. Con ello el RSI14 del día anterior es $2.05/(2.05 +$

2.6911) = 0.4324, mientras que $X_{t-1} = 580.35/(2.05 + 2.6911) = 122.41$. Los estimadores de la media y la volatilidad utilizando una ventana de 5 días son $\hat{\mu} = 0.0028$ y $\sigma = 0.011$. Usando la función de Excel: $0.4487 = \text{MB}(10, 0.0028, 0.011, 0.4324, 122.41, 13)$. El valor del tipo de cambio del 6 de Abril fue 582.20 por lo que $A_t = 2.0357$, $B_t = 2.4989$. Con ello $X_t = 582.2/(2.0357 + 2.4989) = 128.39$ y $Z_t = 2.0357/(2.0357 + 2.4989) = 0.4489$.

A.2 Aproximación del valor de la opción

La expresión $E_{t-1}[(S_t - S_{t-1})^+]$ puede ser considerada como una opción de compra que vence en el próximo período con una tasa de interés de cero y un precio de ejercicio S_{t-1} . Tomando a Black y Scholes (1973) tenemos que si S sigue una distribución lognormal entonces

$$E_{t-1}[(S_t - K)^+] = S_{t-1}N(d) - KN(d - \sigma)$$

donde $d = (\log(S_t/K) + 0.5\sigma^2)/\sigma$ y $N()$ corresponde a la función de probabilidad acumulada normal. Cuando el precio del activo no presenta tendencia entonces $S_t = S_{t-1}$, por lo que la distancia al precio de ejercicio se reduce a $d = (\log(S_t/S_{t-1}) + 0.5\sigma^2)/\sigma = \sigma/2$, esto implica que $E_{t-1}[(S_t - S_{t-1})^+] = S_{t-1}[N(\sigma/2) - N(-\sigma/2)]$.

La expresión entre corchetes puede ser aproximada en Taylor considerando $\sigma_0 = 0$. En particular $N(x) = N(0) + N'(0)x + 0.5N''(0)x^2 + O(x^3)$, utilizando los valores de tabla de la normal tenemos que $N(0) = 0.5$, $N'(0) = 0.39$ (función de densidad) y $N''(0) = 0$ (simetría). De este modo, $N(\sigma/2) \approx 0.5 + 0.39\sigma/2$ y $N(-\sigma/2) \approx 0.5 - 0.39\sigma/2$, por ello la expresión entre corchetes es aproximadamente 0.39σ y con todo: $E_{t-1}[(S_t - S_{t-1})^+] \approx 0.39\sigma S_{t-1}$.

**Documentos de Trabajo
Banco Central de Chile**

**Working Papers
Central Bank of Chile**

NÚMEROS ANTERIORES

PAST ISSUES

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: www.bcentral.cl/esp/estpub/estudios/dtbc. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de \$500 si es dentro de Chile y US\$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: bcch@bcentral.cl.

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: www.bcentral.cl/eng/stdpub/studies/workingpaper. Printed versions can be ordered individually for US\$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch\$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or e-mail: bcch@bcentral.cl.

DTBC-519 Junio 2009
Skill Upgrading and the Real Exchange Rate
Roberto Álvarez y Ricardo A. López

DTBC-518 Junio 2009
Optimal Taxation with Heterogeneous Firms
Rodrigo A. Cerda y Diego Saravia

DTBC-517 Junio 2009
Do Exchange Rate Regimes Matter for Inflation and Exchange Rate Dynamics? The Case of Central America
Rodrigo Caputo G. e Igal Magendzo

DTBC-516 Abril 2009
Interbank Rate and the Liquidity of the Market
Luis Ahumada, Álvaro García, Luis Opazo y Jorge Selaive

DTBC-515 Abril 2009
Sovereign Defaulters: Do International Capital Markets Punish Them?
Miguel Fuentes y Diego Saravia

DTBC-514 Abril 2009
En Búsqueda de un Buen Benchmark Predictivo para la Inflación
Pablo Pincheira y Álvaro García

DTBC-513 Marzo 2009
From Crisis to IMF-Supported Program: Does Democracy Impede the Speed Required by Financial Markets?
Ashoka Mody y Diego Saravia

DTBC-512	Diciembre 2008
A Systemic Approach to Money Demand Modeling Mauricio Calani, Rodrigo Fuentes y Klaus Schmidt-Hebbel	
DTBC-511	Diciembre 2008
Forecasting Inflation in Difficult Times Juan Díaz y Gustavo Leyva	
DTBC-510	Diciembre 2008
Overoptimism, Boom-Bust Cycles, and Monetary Policy in Small Open Economies Manuel Marfán, Juan Pablo Medina y Claudio Soto	
DTBC-509	Diciembre 2008
Monetary Policy Under Uncertainty and Learning: An Overview Klaus Schmidt-Hebbel y Carl E. Walsh	
DTBC-508	Diciembre 2008
Estimación de Var Bayesianos para la Economía Chilena Patricio Jaramillo	
DTBC-507	Diciembre 2008
Chile's Growth and Development: Leadership, Policy-Making Process, Policies, and Results Klaus Schmidt-Hebbel	
DTBC-506	Diciembre 2008
Exit in Developing Countries: Economic Reforms and Plant Heterogeneity Roberto Álvarez y Sebastián Vergara	
DTBC-505	Diciembre 2008
Evolución De La Persistencia Inflacionaria En Chile Pablo Pincheira	
DTBC-504	Noviembre 2008
Robust Learning Stability with Operational Monetary Policy Rules George W. Evans y Seppo Honkapohja	
DTBC-503	Noviembre 2008
Riesgo de Crédito de la Banca Rodrigo Alfaro, Daniel Calvo y Daniel Oda	