# CONJUNTOS COMPACTOS Y SEPARABLES EN LOS ESPACIOS $D_0$

por

MANUEL BALANZAT
Instituto Nacional del Profesorado
Universidad Nacional de Cuyo
San Luis

Recordemos que se denominaron por el Dr. Rey Pastor(1) espacios $D_0$ aquellos en que la distancia en vez de estar obligada a cumplir las condiciones idéntica, simétrica y triangular de los espacios métricos, sólo debe cumplir las siguientes condiciones:

$$I \quad xy \geqq 0 \qquad II \quad xx = 0 \qquad III \quad xy \leqq xz + zy;$$

por consiguiente en los espacios $D_0$ la distancia no es simétrica (es decir puede ser $xy \neq yx$) y pueden existir puntos distintos de distancia nula, llamándose al conjunto de los puntos distintos de uno dado $a$ y cuya distancia a $a$ es nula *núcleo* de dicho punto; su estudio ha sido hecho por el autor en un trabajo anterior (2).

La definición de los puntos de acumulación de un conjunto $E$ se hace, naturalmente, por distancias suficientemente pequeñas, pero aquí la no simetría de la distancia obliga a considerar tres definiciones distintas de acumulación. Se dice que un punto $a$ es de acumulación de un conjunto $E$ cuando dado un $\varepsilon$ existen puntos $x$ de $E$ tales que

1) $xa < \varepsilon$

2) $ax < \varepsilon$

3) $ax < \varepsilon$ y $xa < \varepsilon$

(1) REY PASTOR: "*Espacios $D_0$*"; Revista de Matemáticas y Física Teórica de la Universidad de Tucumán, vol. I (1940), pág. 105.

(2) BALANZAT: "*Sobre los espacios $D_0$*"; Revista de Matemáticas y Física Teórica de la Universidad de Tucumán, vol. II (1941), pág. 169.

Por consiguiente para que un espacio $D_0$ quede definido, no sólo hay que dar el conjunto abstracto de sus elementos y la definición de distancia, sino que hay que precisar cuál de estas tres definiciones de acumulación se adopta para dicho espacio.

Si se quiere hacer el estudio de los espacios $D_0$ comparándolos con los distintos tipos de espacios abstractos que se obtienen al ir imponiendo sucesivamente condiciones de acumulación, se ve inmediatamente que son espacios $(V)$ y que se pueden tomar, como en el caso de los espacios métricos, por entornos de un punto $a$ los esferoides de centro $a$, es decir los conjuntos de puntos que verifiquen $xa < \varepsilon$ o $ax < \varepsilon$ o ambas condiciones simultáneamente, según la definición de acumulación adoptada.

Siendo espacios $(V)$ verifican la llamada: *1ª. condición de Riesz*: «Todo punto de acumulación de un conjunto es punto de acumulación de todo conjunto que contenga al primero.

Es también inmediato que verifican la 2a. *condición de Riesz*: «Todo punto de acumulación de la suma de dos conjuntos es punto de acumulación de uno al menos de esos dos conjuntos».

Es fácil probar que verifican también la 5ª. *condición de Riesz*: «Todo conjunto derivado es cerrado».

En efecto: sea $E$ un conjunto, $E'$ su derivado y $b$ un punto de acumulación de $E'$ y supongamos que hemos tomado la definición 2) de acumulación; existe entonces un punto $a$ de $E'$ que cumple la condición $ba < \varepsilon$, pero por ser $a$ punto de acumulación de $E$ existe un punto $x$ de $E$ tal que $ax < \varepsilon$.

Pero por la propiedad triangular tenemos

$$bx \leqq ba + ax < 2\varepsilon$$

luego $b$ es punto de acumulación de $E$. Luego pertenece a $E'$, luego $E'$ es cerrado.

Verificando estos tres postulados queda también verificada la llamada condición $\alpha$) por Appert [3].

Ahora bien, los espacios que cumplen las condiciones 1ª

(3) APPERT: *"Propriétès des espaces abstraits les plus généraux"*. París, 1934, cap. III. APPERT denomina condición $\beta$ ) a la que nosotros hemos denominado 5º condición de RIESZ.

y 2ª de Riesz y la condición $\alpha$) (menos exigente que la $\beta$)). constituyen una categoría especial que posee un gran número de propiedades características (4) y por consiguiente los espacios $D_0$ poseen todas esas propiedades.

De la existencia de núcleos se deduce que los espacios $D_0$ no verifican la 3ª condición de Riesz: «Todo conjunto que no tiene más que un solo elemento carece de punto de acumulación».

Por lo tanto, los espacios $D_0$ no entran dentro de la categoría de espacios accesibles, ni tampoco en la de los espacios $(L)$. Sería interesante estudiar el problema inverso, es decir, estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que en un espacio $(V)$ que verifique las condiciones 1ª, 2ª y 5ª de Riesz se pueda definir una distancia orientada.

Independientemente de este problema surge el de estudiar en qué forma las propiedades de los espacios métricos se alteran al suprimir alguna de las condiciones que se imponen a la distancia. El estudio parcial de este problema tomando propiedades referentes a los conjuntos compactos y separables es el objeto de este trabajo.

1. — Recordemos las definiciones siguientes (5):

Un conjunto $E$ es *perfectamente compacto* (*en sí*) si todo subconjunto infinito $F$ de $E$ posee un punto $a$ (de $E$) tal que todo entorno de $a$ contenga un subconjunto de $F$ de la misma potencia que $F$.

Un conjunto es *compacto* (*en sí*) si la propiedad anterior se verifica para todo subconjunto numerable $F$ de $E$.

En realidad éstas son las definiciones tomadas en *sentido amplio*, la verdadera definición supone la existencia del subconjunto de $F$ no sólo en todo entorno de $a$ sino *en el interior* de todo entorno de $a$; ahora bien, se demuestra que, en los esspacios que verifican la condición $\alpha$ (5), y que por lo tanto en los $D_0$ ambas definiciones son equivalentes, luego pueden adoptarse las definiciones anteriores en el estudio de los espacios $D_0$.

La distinción entre conjuntos compactos y perfectamente compactos subsiste para categorías más reducidas de espacios

(4) El estudio de esta categoría de espacios fué hecho principalmente por Appert, (loc. cit.).

(5) Appert: loc. cit., capítulo VII.

como los accesibles, pero deja de tener sentido para los espacios métricos, es decir que en un espacio métrico todo conjunto perfectamente compacto es compacto [6].

Esta propiedad no se generaliza a los espacios $D_0$ ya que vamos a definir uno de estos espacios en el que existe un conjunto compacto que no es perfectamente compacto.

Consideremos el conjunto de los números trasfinitos de las clases primera y segunda y definamos una distancia orientada de la manera siguiente: si de los dos números $a$ y $b$ se verifica $a<b$ pondremos $ab=0$, $ba=1$. Además $aa=0$.

Esta definición de la distancia posee evidentemente las propiedades I y II de la distancia; para ver que también posee la propiedad III o triangular consideremos todos los casos posibles y tendremos

$$\begin{array}{lllllll}
a<b<c & » & ab=0 & » & ac=0 & » & cb=1 \\
a<c<b & » & ab=0 & » & ac=0 & » & cb=0 \\
b<a<c & » & ab=1 & » & ac=0 & » & cb=1 \\
b<c<a & » & ab=1 & » & ac=1 & » & cb=1 \\
c<a<b & » & ab=0 & » & ac=1 & » & cb=0 \\
c<b<a & » & ab=1 & » & ac=1 & » & cb=0
\end{array}$$

y está claro que siempre se verifica

$$ab \leqq ac + cb.$$

Como definición de acumulación adoptaremos la 1).

Consideraremos ahora un conjunto numerable

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$$

por la propiedad fundamental de los números trasfinitos sabemos que existe un número $a$ que sigue a todos ellos; como entonces $a_n a=0$ en todo entorno del punto $a$ $(xa<\varepsilon)$ están todos los puntos $a_n$, luego el espacio es compacto.

---

(6) FRECHET: "*Démonstration de quelques proprietés des ensembles abstraits*". American Journal of Mathematics, vol. 50 (1928), pág. 47.

El conjunto de todos los puntos del espacio no es numerable; sea $a$ un punto cualquiera y consideremos un entorno de $a$ tal que $xa < \varepsilon < 1$, ese entorno no puede contener ningún elemento $b$ que siga a $a$ ya que $ba = 1$, y como el conjunto de los números que preceden a $a$ es numerable deducimos que existe un entorno del punto $a$ que sólo contiene un conjunto numerable de puntos del espacio y como esto es válido cualquiera que sea $a$ se deduce que el espacio no es perfectamente compacto. Queda pues establecido que:

A) *En un espacio $D_0$ pueden existir conjuntos que son compactos sin ser perfectamente compactos.*

2. — Si un conjunto compacto o perfectamente compacto es además cerrado es evidentemente compacto o perfectamente compacto en sí; la recíproca puede no ser cierta aún en el caso de un espacio accesible (7), pero si lo es para los espacios $(L)$ (6) y por lo tanto también para los espacios métricos. Vamos a ver ahora que esta recíproca puede ser falsa en un espacio $D_0$.

Para ello definamos un espacio tomando un conjunto numerable $P$ cuyos elementos los representaremos por las letras

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n \ldots$$

y definamos una distancia orientada por las igualdades

$$a_n a_p = \begin{cases} \dfrac{1}{n+p} & \text{si} \quad n < p \\ 0 & \text{si} \quad n = p \\ 1 & \text{si} \quad n > p. \end{cases}$$

Evidentemente se verifican las condiciones I y II de la distancia; para demostrar que se verifica la III consideremos todos los casos posibles y tendremos:

$$n < p < r \quad \text{»} \quad a_n a_p = \frac{1}{n+p} \quad \text{»} \quad a_n a_r = \frac{1}{n+r} \quad \text{»} \quad a_r a_p = 1$$

(7) APPERT: loc. cit. página 66.

$$
\begin{array}{llllllll}
n < r < p & » & a_n a_p = \frac{1}{n+p} & » & a_n a_r = \frac{1}{n+r} & » & a_r a_p = \frac{1}{r+p} \\
p < r < n & » & a_n a_p = 1 & » & a_n a_r = 1 & » & a_r a_p = 1 \\
p < n < r & » & a_n a_p = 1 & » & a_n a_r = \frac{1}{n+r} & » & a_r a_p = 1 \\
r < p < n & » & a_n a_p = 1 & » & a_n a_r = 1 & » & a_r a_p = \frac{1}{r+p} \\
r < n < p & » & a_n a_p = \frac{1}{n+p} & » & a_n a_r = 1 & » & a_r a_p = \frac{1}{r+p}
\end{array}
$$

Ahora bien, la desigualdad

$$a_n a_p \leqq a_n a_r + a_r a_p$$

es evidente en los casos primero, tercero, cuarto, quinto y sexto. Para ver que también se verifica en el caso segundo observemos que siendo $p > r$ es $n+p > n+r$ o sea $\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+r}$, es decir $a_n a_p < a_n a_r$.

Como definición de acumulación tomaremos en este caso la definición 2).

En el espacio considerado no existen distancias nulas para puntos distintos [8], luego evidentemente todo conjunto finito carece de puntos de acumulación.

Supongamos ahora un conjunto infinito $E$ y sea $a_k$ un elemento cualquiera del espacio que puede pertenecer o no al conjunto $E$. Dado un $\varepsilon$ se puede encontrar un número $h$ tal que se verifiquen al mismo tiempo las condiciones

$$h > k \quad \text{y} \quad \frac{1}{h+k} < \varepsilon.$$

(8) Es decir que este espacio no es solo un espacio $D_0$ sino también un espacio cuasi-métrico en el sentido de WILSON (*"On quasi-metric spaces"*, American Journal of Mathematics, vol. 53 (1931), pág. 675).

Ahora bien, siendo el conjunto $E$ infinito existe en él un punto $a_l$ tal que $l \geqq h$ y por lo tanto (ya que $l \geqq h > k$),

$$a_k a_l = \frac{1}{k+l}$$

es decir, $a_k a_l < \varepsilon$, luego $a_k$ es punto de acumulación de $E$ y como $a_k$ es cualquiera, todos los puntos de $P$ son de acumulación de $E$.

Hemos definido pues un espacio cuyos elementos son los de un conjunto numerable $P$ y en el que para todo subconjunto $E$ del espacio se verifica $E' = 0$ si el conjunto $E$ es finito y $E' = P$ si es infinito. Ahora bien, se demuestra[7] que en ese espacio existen conjuntos perfectamente compactos en sí y no cerrados.

Se puede llegar también a este mismo resultado mediante un método más directo utilizando el siguiente ejemplo: consideremos un conjunto formado por los puntos del segmento rectilíneo cerrado $(0 \leqq x \leqq 1)$ y otro punto $M$ y definamos la distancia orientada por las igualdades

$$xy = yx = |x - y| \quad » \quad xM = 0 \quad » \quad Mx = 1.$$

Es evidente que se verifican las condiciones I y II de la distancia, para probar la tercera consideraremos todos los casos posibles y tendremos, teniendo en cuenta que siempre es $|x - y| \leqq 1$,

$$\begin{array}{lll} xy \leqq xz + zy & \text{por ser} & |x-y| \leqq |x-z| + |z-y| \\ xy \leqq xM + My & » \quad » & |x-y| \leqq 0 + 1 \\ xM \leqq xy + yM & » \quad » & 0 \leqq |x-y| + 0 \\ Mx \leqq My + yx & » \quad » & 1 \leqq 1 + |x-y|. \end{array}$$

Tomemos como definición de acumulación la 1); tenemos que el segmento $(0 \leqq x \leqq 1)$ es perfectamente compacto en sí, ya que considerado aisladamente es un conjunto acotado y cerrado del espacio lineal, y que el punto $M$ es punto de acumulación del segmento sin pertenecer a él, luego el segmento no es cerrado. Queda pues establecido que:

B) *En un espacio $D_0$ un conjunto perfectamente compacto en sí puede no ser cerrado.*

3. — Recordemos las definiciones siguientes [9]:

Un conjunto $E$ se dice *separable* si existe un conjunto numerable $N$ de puntos de $E$ tal que todo elemento de $E$ o es punto de $N$ o es punto de acumulación de $N$.

Un conjunto $E$ se dice *perfectamente separable* si existe una familia numerable de conjuntos tal que cualquiera que sea el punto $a$ de $E$ puedan tomarse, sin alterar naturalmente la definición de acumulación, como entornos de $a$ conjuntos pertenecientes a la familia. Es decir, que se pueda obtener que el conjunto de los entornos de todos los puntos de $E$ forme una familia numerable.

Es inmediato que todo conjunto perfectamente separable es separable, y es fácil de demostrar que la recíproca tiene lugar en todo espacio métrico. En cambio se puede dar [10] un ejemplo de un espacio accesible en que esta recíproca es falsa. Vamos a ver que lo mismo puede suceder en los espacios $D_0$. Para ello definamos el siguiente espacio:

Consideremos un conjunto de puntos compuesto con los tres conjuntos siguientes:

Un conjunto $E$ de potencia del continuo cuyos elementos designaremos por las letras minúsculas $a$, $b$, ...

Un conjunto $F$ de potencia del continuo cuyos elementos los designaremos por las letras mayúsculas $A$, $B$, ... donde el elemento $A$ designará el homólogo del elemento $a$ en una correspondencia biunívoca que supondremos establecida entre $E$ y $F$.

Un conjunto $N$ numerable cuyos elementos los designaremos por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$

Definamos una distancia orientada por las igualdades

$$ab = 1 \quad » \quad AB = 1 \quad aA = Aa = 0 \quad aB = Ba = 1$$

$$a\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \alpha_n a = 1 \quad A\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \alpha_n A = 1 \quad \alpha_n \alpha_p = 1$$

---

(9) Por ejemplo ver FRECHET: *"Espaces Abstraits"*. Paris, 1928, pág. 188.

(10) URYSOHN: *"Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen"*. Mathematische Annalen, Tomo 94 (1925) pág. 309.

donde letras distintas representan elementos diferentes, la distancia entre dos elementos coincidentes siendo además nula.

Es evidente que esta distancia verifica las condiciones I y II; como siempre, para ver que verifica la III, consideremos todos los casos posibles.

Si tomamos como par de elementos $xy$ de la igualdad III los pares $aA$ o $Aa$, la igualdad es evidente por ser cero el primer miembro.

Si tomamos como primer par de elementos de la igualdad el par $ab$ el tercer elemento $z$ de dicha igualdad puede ser $c$, $A$, $B$, $C$ o $\alpha_n$. Para ver que la igualdad se verifica basta ver que las cinco sumas

$$ac+cb, \quad aA+Ab, \quad aB+Bb, \quad aC+Cb, \quad a\alpha_n+\alpha_n b$$

que constituyen en los distintos casos el segundo miembro de la igualdad III tienen todas por lo menos un sumando igual a la unidad, es decir, igual a $ab$. Análogamente se probaría para el par $AB$.

Si ahora tomamos el par $\alpha_n\alpha_p$ el tercer elemento puede ser $a$, $A$ o $\alpha_q$ y las tres sumas

$$\alpha_n a+a\alpha_p, \quad \alpha_n A+A\alpha_p, \quad \alpha_n\alpha_q+\alpha_q\alpha_p$$

tienen al menos un sumando igual a $\alpha_n\alpha_p$.

Si tomamos el par $aB$ el tercer elemento puede ser $b$, $c$. $A$, $C$, o $\alpha_n$ y las cinco sumas

$$ab+bB, \quad ac+cB, \quad aA+AB, \quad aC+CB, \quad a\alpha_n+\alpha_n B$$

son también mayores que $aB$. Análogamente se vería para el par $Ab$.

Si tomamos el par $a\alpha_n$ el tercer elemento puede ser $b$, $A$, $B$ o $\alpha_p$ y las cuatro sumas

$$ab+b\alpha_n, \quad aA+A\alpha_n, \quad aB+B\alpha_n, \quad a\alpha_p+\alpha_p\alpha_n$$

tienen por lo menos un sumando igual o mayor que $a\alpha_n$. Análogamente se vería para el par $A\alpha_n$.

Finalmente, si tomamos el par $\alpha_n a$, el tercer elemento puede ser $b$, $A$, $B$ o $\alpha_p$ y las cuatro sumas

$$\alpha_n b + ba, \quad \alpha_n A + Aa, \quad \alpha_n B + Ba, \quad \alpha_n \alpha_p + \alpha_p a$$

son iguales o mayores que $\alpha_n a$. Análogamente se vería para el par $\alpha_n A$.

La distancia definida es por consiguiente una distancia orientada. Como definición de acumulación tomaremos la 2).

El espacio es separable, pues el conjunto $N$ tiene como puntos de acumulación todos los de $E$ y $F$, ya que dado un punto ($a$ por ejemplo) de uno de estos conjuntos y definido un entorno de $a$ ($ax < p$) si tomamos $n$ tal que $\frac{1}{n} < p$ entonces es $a\alpha_n = \frac{1}{n} < p$, luego existen infinitos puntos de $N$ contenidos en el entorno de cualquier punto de $E$ o de $F$, tenemos por tanto

$$F + F' = F + E_1 + E_2$$

y el espacio es separable.

Supongamos ahora definida una familia total de entornos, es decir tal que de ella se puedan extraer los entornos de cualquier punto del espacio.

Sea $a$ un punto de $E$, por ser $aA = 0$ en todo entorno de $a$ tiene que estar contenido el punto $A$. Por otra parte, tiene que haber un entorno de $a$ que no contenga ningún punto de $F$ distinto del $A$, ya que la distancia a esos puntos es igual a la unidad. Sea, pues, $\gamma_a$ este entorno de $a$ que contiene al punto $A$ y no contiene ningún otro punto de $F$.

Dos entornos $\gamma_a$ y $\gamma_b$ correspondientes a dos puntos distintos $a$ y $b$ son evidentemente distintos y ninguno de ellos contiene al otro, luego de cualquier familia de entornos del espacio se puede extraer una familia de entornos diferentes $(\gamma_a, \gamma_b, \ldots)$ cuya potencia es la del continuo, luego no puede existir ninguna familia total numerable, luego el espacio no es perfectamente separable. Queda pues establecido que:

C) *En un espacio $D_0$ un conjunto separable puede no ser perfectamente separable.*

4. — El primer ejemplo de espacio separable y no perfectamente separable fué el dado por Urysohn (9) y se trataba de un espacio accesible numerable (y por lo tanto evidentemente

separable), mientras que con el ejemplo que acabamos de dar *obtenemos un espacio no numerable, separable y no perfectamente separable.*

Consideremos ahora un espacio $D_0$ numerable: $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ ... y vamos a ver que siempre se puede definir una familia total numerable de entornos; basta en efecto considerar los esferoides $S_m^n$, cuyo centro es el punto $a_m$ y cuyo radio es $1/n$. Queda pues establecido que, a diferencia de lo que ocurre con los espacios accesibles:

D) *Todo espacio $D_0$ numerable es perfectamente separable.*

Del hecho de que los espacios $D_0$ tengan una propiedad que no tienen todos los espacios accesibles se deduce que:

E) *Existen espacios accesibles que no se pueden transformar en espacios $D_0$, es decir en los que no se puede definir una distancia que verifique las condiciones I, II y III y que sea compatible con la definición de acumulación establecida previamente en el espacio accesible.*

5. — Otra propiedad importante de los conjuntos compactos en los espacios métricos es que el derivado de todo conjunto compacto es compacto (11).

Esta propiedad no se extiende (12) a los espacios $(F)$, es decir a los espacios que son a la vez espacios accesibles y espacios $(L)$ y vamos a ver que tampoco se generaliza para los espacios $D_0$.

Para ello consideremos un espacio formado por los números reales del intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ y adoptemos la siguiente definición de distancia orientada, que cumple evidentemente las condiciones I y II.

$$r_1 r_2 = |r_1 - r_2| \quad » \quad ir = |i - r| \quad » \quad ri = 1 \quad » \quad i_1 i_2 = 1 \quad » \quad ii = 0$$

donde las letras $r$ representan números racionales y las letras $i$ números irracionales.

---

(11) FRECHET: "*Les ensembles abstraits et le Calcul fonctionnel.* Rendiconti del Circolo matemático di Palermo; vol. 30 (1910), pág 1.

(12) KURATOWSKI y SIERPINSKI: "*Le théorème de Borel-Lebesgue dans la théorie de sensembles abstraits*". Fundamenta Mathematicae, vol. 2 (1921) pág. 172.

Para ver que se verifica la condición III es decir $xy \leqq xz + zy$ consideremos todos los casos posibles.

Si el par del primer miembro se compone de dos números racionales $r_1$ y $r_2$ el tercer punto puede ser otro número racional $r_3$ o un número irracional $i_1$; en ambos casos tendremos (teniendo en cuenta que siempre la distancia es menor o igual que la unidad),

$$r_1 r_2 \leqq r_1 r_3 + r_3 r_2 \quad \text{ya que} \quad |r_1 r_2| \leqq |r_1 - r_3| + |r_3 - r_2|$$

$$r_1 r_2 \leqq r_1 i_1 + i_1 r_2 \quad \text{ya que} \quad |r_1 r_2| \leqq 1 + |i_1 - r_2|.$$

Si el primer miembro se compone de un número racional $r_1$ y de otro irracional $i_1$, el tercer punto puede ser otro número racional $r_2$ o otro irracional $i_2$, y como además en este caso la distancia no es simétrica habrá que considerar en ambos casos las dos posibilidades de que o $r_1$ o $i_1$ estén en primer lugar; en todos los casos tendremos:

$$\begin{array}{lll}
i_1 r_1 \leqq i_1 r_2 + r_2 r_1 & \text{ya que} & |i_1 - r_1| \leqq |i_1 - r_2| + |r_2 - r_1| \\
r_1 i_1 \leqq r_1 r_2 + r_2 i_1 & \text{»} \quad \text{»} & 1 \leqq |r_1 - r_2| + 1 \\
i_1 r_1 \leqq i_1 i_2 + i_2 r_1 & \text{»} \quad \text{»} & |i_1 - r_1| \leqq 1 + |i_2 - r_1| \\
r_1 i_1 \leqq r_1 i_2 + i_2 i_1 & \text{»} \quad \text{»} & 1 \leqq 1 + 1.
\end{array}$$

Finalmente si el primer miembro se compone de dos números irracionales $i_1$ e $i_2$ el tercer número puede ser un racional $r_1$ o un irracional $i_3$; en ambos casos tendremos:

$$\begin{array}{lll}
i_1 i_2 \leqq i_1 r_1 + r_1 i_2 & \text{ya que} & 1 \leqq |i_1 - r_1| + 1 \\
i_1 i_2 \leqq i_1 i_3 + i_1 i_3 & \text{»} \quad \text{»} & 1 \leqq 1 + 1.
\end{array}$$

Como definición de acumulación tomaremos la 2).

El conjunto de los números racionales en este espacio es compacto, puesto que en el espacio lineal todo conjunto infinito de números racionales admite un punto de acumulación $a$ que puede ser racional o irracional, es decir que existen puntos del conjunto tales que cualquiera que sea $\varepsilon$ se verifica $|r - a| < \varepsilon$.

Ahora bien, si nos fijamos en la definición de distancia que hemos adoptado para nuestro espacio, vemos que la propiedad anterior significa que dado cualquier conjunto infinito de puntos racionales existe un punto $a$ del espacio (que puede ser racional o irracional) tal que cualquiera que sea $\varepsilon$ existen puntos $r$ del conjunto que verifican la condición $ar < \varepsilon$, luego el punto $a$ es también un punto de acumulación en nuestro espacio; luego está demostrado que el conjunto de todos los números racionales es compacto.

También acabamos de ver que los puntos de acumulación, de dicho conjunto de todos los números racionales en el espacio lineal, son también puntos de acumulación en el espacio que estamos estudiando, luego en dicho espacio el conjunto derivado del de todos los números racionales es el intervalo entero. Ahora bien, este conjunto (es decir el espacio dado todo entero) no es compacto. En efecto:

Consideremos un conjunto infinito de números irracionales, este conjunto carece de punto de acumulación ya que cualquiera que sea $a$ racional o irracional en el entorno de $a$ $ax \leqq p < 1$, no puede haber ningún número irracional distinto de $a$, ya que siempre se tiene $ai = 1$, luego dicho conjunto infinito de números irracionales no puede tener ningún punto del conjunto como punto de acumulación. Queda pues demostrado que:

F) *En un espacio $D_0$ el conjunto derivado de un conjunto compacto puede no ser compacto.*

Puede observarse que el espacio estudiado no sólo es un espacio $D_0$, sino también un espacio cuasi-métrico (pues no hay puntos distintos de distancia nula) y por lo tanto la propiedad F) es válida también para los espacios cuasi-métricos.