SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE MONGE - AMPERE

por

ALEJANDRO TERRACINI
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional, Tucumán

1.- Hace pocos años dí a conocer un significado geométrico de las características de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en una función incógnita $z = z(x, y)$ de las dos variables independientes x, y[1]. Lo que me empujó a buscar tal significado ha sido el deseo de darme cuenta *a priori* de lo que son las características, independientemente de toda referencia a las soluciones de la ecuación en derivadas parciales. El significado que encontré estriba en una conveniente representación geométrica de dichas ecuaciones, que me parece imponerse por su espontaneidad y sencillez, aunque no me consta que a ella se hubiese anteriormente acudido, y casi sale naturalmente de la representación, brindando de tal manera una explicación de naturaleza geométrica de la importancia que tienen las características en la teoría de aquellas ecuaciones en derivadas parciales.

Al iniciar más recientemente las investigaciones cuyos resultados doy a conocer en el presente trabajo, me propuse conseguir un objeto análogo para las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden del tipo de Monge-Ampère, las cuales — debido a la presencia de dos sistemas de características de primer orden, la que las diferencia de las demás ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden — desempeñan un papel particularmente notable en la teoría de las características. Los resultados que conseguí en este orden de ideas están consignados en el n. 5 del presente trabajo: sobre las características para las ecuaciones

(1) A. TERRACINI: *Sur l'interprétation géométrique des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre,* Bull. de la Société Royale des Sciences de Liège, séance du 25 mai 1939.

más generales de segundo orden espero volver en otra oportunidad.

Sin embargo, al proporcionarme con el objeto aludido un conveniente modelo geométrico hiperespacial de las ecuaciones de Monge-Ampère, me dí cuenta de que ese propio modelo merecía ser profundizado un poco más en su estructura: llegué de tal manera a formular la descripción de las figuras A que doy a conocer en el n. 4.

La noción prima en la cual estriba el aludido modelo es la de la *imagen hiperespacial* de un elemento superficial de segundo orden del espacio ordinario, la cual está integrada por cierto par de haces de rectas (n. 3).

Para las ecuaciones de primer orden

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1.1}$$

el punto de partida de mis investigaciones anteriores consistió en concebir un elemento superficial de primer orden $E_1 \equiv A\alpha \equiv$ $\equiv (x, y, z, p, q)$ del espacio ordinario S_3, integrado por un punto A de coordenadas x, y, z y un plano α por el mismo, individualizado por la ecuación (en coordenadas corrientes X, Y, Z)

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \tag{1.2}$$

como el haz de rectas de centro A en el plano α; y representar luego este haz de rectas en una recta g de la cuádrica de Klein M_4^2 del espacio proyectivo S_5 de cinco dimensiones. Entonces la consideración de la (1.1) equivale a la de la figura integrada por un sistema ∞^4 de rectas de la cuádrica de Klein M_4^2 (figura a la cual en mi trabajo citado llamé sistema F).

Pues bien, el punto de partida análogo para las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden [2]

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1.3}$$

(2) Sobreentendemos a continuación que se tratará de ecuaciones en derivadas parciales en una función incógnita de *dos* variables independientes.

Las x, y, z se interpretan constantemente a continuación como coordenadas cartesianas de un punto del espacio ordinario. Sería substancialmente equivalente considerarlas como coordenadas proyectivas no homogéneas.

está un poco escondido debido a la naturaleza más complicada que tiene un elemento superficial de segundo orden E_2 del espacio ordinario S_3, en comparación con uno de primer orden, y sobre todo a la menor espontaneidad con la cual se ofrece una figura geométrica, no demasiado complicada, representativa de un elemento de segundo orden. Una parte de esta figura se presenta por sí misma sin dificultad. Si el E_2 tiene las coordenadas x, y, z, p, q, r, s, t, es decir está representado (en coordenadas corrientes X, Y, Z) por

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) + \frac{1}{2} r(X - x)^2 + s(X - x)(Y - y) + \frac{1}{2} t(Y - y)^2, \qquad (1.4)$$

dicha parte es el haz de rectas $A\alpha$ definido por el E_1 (x, y, z, p, q), que podemos llamar *sostén* del E_2, junto con las dos rectas del haz con las que coinciden las tangentes asintóticas en A de las superficies que contienen el E_2, es decir las dos rectas representadas en coordenadas corrientes X, Y, Z por el par de ecuaciones integrado por la (1.2) y

$$r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2 = 0. \qquad (1.5)$$

Sin embargo, la figura ahora aludida depende tan sólo de x, y, z, p, q y de $r : s : t$, de manera que le falta algo para que sea apta a representar completamente el E_2. El ente ulterior que hace falta agregar podría p. e. buscarse acudiendo a la curvatura total del E_2, pero saldría de esa manera una noción un tanto híbrida, integrada por el conjunto de una figura geométrica y un ente numérico, aún cuando se prescinda de la falta de coherencia que existiría en representar un concepto de naturaleza puramente proyectiva, cual es el de un elemento superficial de segundo orden, de manera por lo menos parcialmente métrica. El primer inconveniente podría salvarse acudiendo a una figura más compleja entre las que en la geometría diferencial clásica se presentan para describir de manera completa un elemento superficial de segundo orden, p. e. el conjunto de las dos tangentes de curvatura y de los correspondientes radios principales de curvatura: no se salvaría empero así el segundo inconveniente, y además se introduciría una figura que distaría de ser muy sencilla. Por estas razones preferí adoptar otra representación geométrico-proyectiva de los E_2, a la cual ya tuve la oportunidad de aludir incidentalmente en otro trabajo reciente [3], la que me pareció reunir las ventajas que necesitaba para mi objeto, incluída la de dar de un E_2 un modelo hiperespacial vinculado con la cuádrica M_4^2 de Klein, en el mismo orden de ideas al cual ya aludí para los elementos de primer orden, y antes bien de complementar de forma coherente la imagen hiperespacial del E_1 sostén del E_2: llegué de tal forma al par de haces que brinda (n. 3) la imagen hiperespacial de un E_2 (x, y, z, p, q, r, s, t).

En el n. 2 me detengo sobre algunos detalles relativos a la representación hiperespacial de los E_1 (x, y, z, p, q).

2. - De acuerdo con lo aludido en el n. 1, identifico un elemento superficial E_1 de primer orden $A\alpha \equiv (x, y, z, p, q)$ de S_3 con el haz de rectas de centro A en el plano α, y adopto como imagen del mismo la recta g de la cuádrica de Klein de S_5 en la que se representa ese haz. Para traducir tal concepto en fórmulas [4], podemos observar que una recta genérica r del haz $A\alpha$ puede considerarse como determinada por el punto $A \equiv (x, y, z)$ y un punto impropio genérico del plano (1. 2), es decir un punto de coordenadas homogéneas $(1, m,\ p+qm,\ 0)$, siendo m un parámetro arbitrario, de modo pues que las coordenadas radiales homogéneas p_{ik} $(i, k=1, 2, 3, 4;\ i \neq k)$ de la recta r son los determinantes extraídos de la matríz:

$$\left\| \begin{matrix} x & y & z & 1 \\ 1 & m & p+qm & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Las ∞^1 rectas del espacio ordinario que pertenecen al haz $A\alpha$ tienen por lo tanto las coordenadas

$$\left. \begin{array}{lll} p_{12} = mx - y, & p_{13} = (p+qm)\,x - z, & p_{14} = -1, \\ p_{23} = (p+qm)\,y - mz, & p_{24} = -m, & p_{34} = -(p+qm). \end{array} \right\} \qquad (2.1)$$

(3) A. Terracini: *Tangentes a la curva de contacto de una superficie dada y de una superficie reglada con dos directrices rectilíneas*, Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. IX, 1943; véase el n. 4.

(4) Para el presente nº 2 compárese mi trabajo citado en la referencia (1).

Interpretamos las propias p_{ik} como coordenadas de los puntos del espacio de cinco dimensiones S_5 imágenes de las rectas del espacio ordinario, y más precisamente como puntos de la cuádrica M_4^2 de Klein:

$$p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23} = 0. \tag{2.2}$$

Entonces el haz $A\alpha$ tiene como imagen la recta $g \equiv AB$ de la M_4^2 que une los puntos A, B cuyas coordenadas son respectivamente:

$$p_{12} = -y, \quad p_{13} = px - z, \quad p_{14} = -1, \quad p_{23} = py, \quad p_{24} = 0, \quad p_{34} = -p; \tag{2.3}$$

$$p_{12} = x, \quad p_{13} = qx, \quad p_{14} = 0, \quad p_{23} = qy - z, \quad p_{24} = -1, \quad p_{34} = -q. \tag{2.4}$$

Las mismas se logran de las fórmulas (2. 1) poniendo respectivamente $m = 0$ y $m = \infty$.

De tal manera una recta g de la cuádrica (2. 2) de Klein tiene dos representaciones analíticas distintas:

a) mediante las 5 cantidades x, y, z, p, q que son las coordenadas del elemento superficial de primer orden $E_1 \equiv A\alpha$ cuya imagen en S_5 es la recta g: las mismas x, y, z, p, q pueden también considerarse como coordenadas de la propia recta g;

b) mediante las fórmulas (2. 3), (2. 4) que dan a conocer directamente en S_5 las 6 coordenadas p_{ik} de cada uno de los puntos A y B, los que individualizan la recta g.

Las coordenadas de un punto de la recta g son dadas por las (2. 1) en cuanto se fije un valor para el parámetro m: es obvio que m desempeña sobre la puntual g el papel de coordenada proyectiva.

A continuación conviene tener presente lo siguiente. La recta g de la M_4^2 tiene con respecto a esta misma cuádrica un espacio polar de 3 dimensiones g'_3 (espacio tangente a la M_4^2 a lo largo de g, es decir común a los hiperplanos tangentes a la M_4^2 en los puntos de g). Pues bien, *la condición necesaria y suficiente para que una recta* g^* *de la cuádrica de Klein infinitamente vecina a* g, *y correspondiente* — de acuerdo con a) — *a las coordenadas* $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $p+dp$, $q+dq$, *pertenezca al espacio* g'_3, *tangente a* M_4^2 *a lo largo de* g, *es:*

$$dz = pdx + qdy. \tag{2.5}$$

En efecto, al imponer que los puntos A^* y B^* cuyas coordenadas se obtienen de las (2.3), (2.4) reemplazando las coordenadas x, y, z, p, q de g por aquellas de g^* sean respectivamente conjugados a los puntos B y A con respecto a la cuádrica (2.2), se logran dos fórmulas que coinciden ambas con (2.5).

3.-Pasamos ahora a ocuparnos de la representación geométrica en el espacio S_5 de los E_2 superficiales (x, y, z, p, q, r, s, t) de S_3: sobreentendemos a continuación que se trata de E_2 *no parabólicos*. De acuerdo con lo aludido en el n. 1, una parte de la representación está brindada por la recta g de S_5 imagen del E_1 sostén del E_2: la recta g se logra del modo indicado en el n. 2.

Una parte ulterior de la figura representativa es el par de puntos de g, a los que llamaré $F^{(1)}$ $F^{(2)}$, imágenes de las tangentes asintóticas (1.5) del E_2 considerado. Cuando el E_1 sostén se representa analíticamente de la manera *b*) aclarada en el n. anterior, hay que completar dicha representación de forma que se tengan en cuenta también $F^{(1)}, F^{(2)}$, lo que se hace en cuanto se indiquen los valores de la coordenada proyectiva m sobre la puntual g que individualizan tales puntos. Es claro que esos valores de m son las dos raíces m_1, m_2 de la ecuación cuadrática

$$r + 2sm + tm^2 = 0 \tag{3.1}$$

es decir

$$\left.\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} \tag{3.2}$$

Luego, *los puntos* $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ *son los puntos de* g *de coordenadas* (2.1), *en cuanto* m *se reemplace por uno u otro de los valores* (3.2). Para fijar las ideas, podemos p.e. suponer de escribir los signos $+$ y $-$ respectivamente en correspondencia con los puntos $F^{(1)}$ y $F^{(2)}$.

Queda ahora por completar la representación hiperespacial del E_2. La idea que indiqué en mi trabajo citado en [3] es la si-

guiente. Consideremos una superficie S (analítica) del espacio ordinario S_3 la que contenga regularmente el E_2 considerado; ella puede representarse en el espacio S_5 como una congruencia (g) de rectas, imágenes de los haces de rectas tangentes a la S: en particular cada recta tangente en A tiene como imagen un punto de g, y las dos tangentes asintóticas en A tienen como imágenes los puntos $F^{(1)}, F^{(2)}$. Entonces, como es bien sabido, los dos puntos $F^{(1)}, F^{(2)}$ son los dos focos de la recta g con respecto a la congruencia (g): al variar g dentro de la congruencia (g), cada uno de ellos describe generalmente una superficie focal, respectivamente $(F^{(1)})$ y $(F^{(2)})$ —eventualmente reducida a una curva focal— cuyo plano tangente en el punto $F^{(1)}$ o respectivamente $F^{(2)}$ lo indicaremos con $\vartheta_2^{(1)}$, $\vartheta_2^{(2)}$, estando entendido que, si p. e. $(F^{(1)})$ se reduce a una línea, $\vartheta_2^{(1)}$ indique el plano que une su recta tangente en $F^{(1)}$ con la correspondiente recta g. En cada caso, los dos planos $\vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}$ no sólo pasan por la recta g, sino que están contenidos dentro del espacio g'_3 polar de g con respecto a la M_4^2, y además son mutuamente polares con respecto a la M_4^2, es decir, conjugados armónicos con respecto a los dos planos de M_4^2, que pasan por g.

Pues bien, como p. e. lo observé en mi trabajo citado en [3], al variar la superficie S que contiene el E_2 considerado, no sólo se mantienen fijos, como es obvio, la recta g y sus puntos $F^{(1)}$ y $F^{(2)}$, sino también los dos planos $\vartheta_2^{(1)}$ y $\vartheta_2^{(2)}$, de modo que el E_2 (1.4) lleva a considerar en S_5 —de manera perfectamente determinada— una figura de conjunto $g F^{(1)} F^{(2)} \vartheta_2^{(1)} \vartheta_2^{(2)}$ integrada por una recta g de la cuádrica de Klein, junto con dos puntos $F^{(1)}, F^{(2)}$ de la misma recta, y dos planos $\vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}$ que pasan por g, están en el espacio polar g'_3, y son conjugados armónicos con respecto a los dos planos de la cuádrica que pasan por g.

En mi trabajo citado me ha resultado suficiente estudiar E_2 de S_3 colocados de manera particular con respecto a la terna de referencia. Necesitamos ahora en cambio las ecuaciones en S_5 de los planos $\vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}$ cuando en S_3 el E_2 está situado genéricamente con respecto a esa terna. Al buscar tales ecuaciones, se confirmará lo dicho más arriba acerca de la figura $g F^{(1)} F^{(2)} \vartheta_2^{(1)} \vartheta_2^{(2)}$.

Con este objeto, parto del E_2 (1.4) y considero la ecuación de una superficie S que lo contenga, cuya ecuación en proximidad de A sea

$$Z=\varphi(X,Y),$$

donde el valor de φ y de sus derivadas parciales primeras y segundas para $X=x$, $Y=y$ coincidan con los calculados en base a (1. 4): pondremos además

$$\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial X^3}\right)_A=\alpha,\ \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial X^2\,\partial Y}\right)_A=\beta,\ \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial X\ \partial Y^2}\right)_A=\gamma,\ \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial Y^3}\right)_A=\varepsilon.$$

En relación con los E_2 de S determinados por los puntos de la superficie próximos a A, tenemos que considerar los correspondientes puntos $F^{(1)}$: las propias (2. 1), con el reemplazo de m por el valor m_1 brindado por (3. 2), son las ecuaciones paramétricas de la superficie $(F^{(1)})$, en cuanto se apliquen ahora a dichos E_2. Luego el plano $\vartheta_2^{(1)}$ es el plano del punto $F^{(1)}$ y de los puntos cuyas coordenadas son respectivamente las derivadas parciales con respecto a X o con respecto a Y de los segundos miembros de esas ecuaciones paramétricas calculadas en el punto A: p. e. el primero de los dos puntos ahora considerados tiene las coordenadas

$$p_{12}=m_1+x\frac{\partial m_1}{\partial x},\ p_{13}=(q\frac{\partial m_1}{\partial x}+r+sm_1)\,x+qm_1,\ p_{14}=0,$$

$$p_{23}=(q\frac{\partial m_1}{\partial x}+r+sm_1)\,y-pm_1-z\frac{\partial m_1}{\partial x},\ p_{24}=-\frac{\partial m_1}{\partial x},$$

$$p_{34}=-q\,\frac{\partial m_1}{\partial x}-r-sm_1.$$

Cabe observar que en estas coordenadas las derivadas terceras de φ figuran únicamente a través de $\frac{\partial m_1}{\partial x}$, en cuanto de la ecuación (3. 1) se deducen las

$$\frac{\partial m_1}{\partial x}=-\frac{\alpha+2\beta m_1+\gamma m_1{}^2}{2(s+tm_1)},\ \frac{\partial m_1}{\partial y}=-\frac{\beta+2\gamma m_1+\varepsilon m_1{}^2}{2(s+tm_1)}.$$

Luego el punto G cuyas coordenadas se obtienen de las ahora indicadas al restar las coordenadas homónimas del punto B multiplicadas por $\frac{\partial m_1}{\partial x}$ ya no depende de las α, β, γ, ε. Por otra parte, debido a que sabemos a priori que el plano $\vartheta_2^{(1)}$ tiene que contener la recta $g \equiv F^{(1)} F^{(2)} \equiv AB$, ese plano puede considerarse como individualizado por los puntos A, B junto con el primero de los puntos derivados ahora aludidos, o —lo que da lo mismo— por los tres puntos A, B, G: de esta manera ya se hace evidente la independencia del plano $\vartheta_2^{(1)}$ de la elección de una u otra superficie S entre las que contienen el E_2 considerado.

Resulta además de lo dicho que el plano $\vartheta_2^{(1)}$ está representado por el anularse de la matriz

$$\left\| \begin{array}{cccccc} p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{23} & p_{24} & p_{34} \\ -y & px-z & -1 & py & 0 & -p \\ x & qx & 0 & qy-z & -1 & -q \\ m_1 & (r+sm_1)x+qm_1 & 0 & (r+sm_1)y-pm_1 & 0 & -r-sm_1 \end{array} \right\|$$

y luego por el sistema

$$\left.\begin{array}{l} q(p_{12}-yp_{14}+xp_{24})-p_{13}+zp_{14}-xp_{34}=0 \\ -p(p_{12}-yp_{14}+xp_{24})-p_{23}+zp_{24}-yp_{34}=0 \\ pp_{14}+qp_{24}-p_{34}+(s+tm_1)(p_{12}-yp_{14}+xp_{24})=0 \end{array}\right\} (\boldsymbol{\Sigma})$$

Las tres ecuaciones que integran el sistema $(\boldsymbol{\Sigma})$ se designarán a continuación, en el orden, como ecuaciones $(\boldsymbol{\Sigma}_1)$, $(\boldsymbol{\Sigma}_2)$, $(\boldsymbol{\Sigma}_3)$. Las $(\boldsymbol{\Sigma}_1)$, $(\boldsymbol{\Sigma}_2)$ dependen únicamente del E_1 considerado: se reconoce de inmediato que ellas representan los S_4 tangentes a la M_4^2 de Klein respectivamente en el punto B y en el punto A.

De lo dicho también se desprende que el conocimiento de la figura $g F^{(1)} F^{(2)} \vartheta_2^{(1)} \vartheta_2^{(2)}$ en S_5 individualiza a su vez un E_2 de S_3; la g lleva al E_1 sostén del E_2, el par de puntos $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ da a conocer r, s, t a menos de un factor común, y la ecuación $(\boldsymbol{\Sigma}_3)$ permite determinar el valor de este factor.

Observando que

$$s+tm_i = \pm\sqrt{s^2-rt},$$

donde el signo $+$ o $-$ corresponde respectivamente a $i=1$, $i=2$, también puede decirse que los planos $\vartheta_2^{(1)}$, $\vartheta_2^{(2)}$ resultan respectivamente como intersecciones del espacio g'_3 tangente a la M_4^2 a lo largo de g —representado por el sistema (Σ_1) (Σ_2)— con uno u otro de los dos hiperplanos

$$pp_{14}+qp_{24}-p_{34}\pm\sqrt{s^2-rt}(p_{12}-yp_{14}+xp_{24})=0. \qquad (3.3)$$

Cada una de las ecuaciones

$$p_{12}-yp_{14}+xp_{24}=0, \qquad (3.4)$$

$$pp_{14}+qp_{24}-p_{34}=0, \qquad (3.5)$$

junto con (Σ_1), (Σ_2) representa respectivamente el plano π', o π'' del *primero* o del *segundo sistema,* situado sobre la cuádrica de Klein y pasante por la recta g: llamamos *primero* y *segundo* sistema de planos de la cuádrica a los descriptos por las imágenes de las radiaciones de rectas o respectivamente de los planos reglados del espacio ordinario (5).

En definitiva la imagen hiperespacial de un E_2 no parabólico de S_3 viene a ser un par de puntos distintos $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ de la cuádrica M_4^2 de Klein pertenecientes a una recta g de la misma, junto con dos planos $\vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}$, igualmente distintos, pasantes por g y situados en su g'_3 polar, conjugados armónicos con respecto a los dos planos de M_4^2 que pasan por g: cada uno de los planos tiene que ser considerado con referencia a uno determinado de los puntos $F^{(1)}, F^{(2)}$. Dicho de otra manera, *la imagen hiperespacial de un* E_2 *no parabólico de* S_3 *es un par de haces de rectas cuyos centros (distintos) son dos puntos* $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ *de una recta* g *de la cuádrica de Klein, y cuyos planos son dos planos* $\vartheta_2^{(1)}$, $\vartheta_2^{(2)}$ *por* g, *situados dentro del espacio tangente* g'_3, *y mutuamente polares.*

$F^{(1)}$ y $F^{(2)}$ se llamarán brevemente *los dos puntos* de la imagen, $\vartheta_2^{(1)}$ y $\vartheta_2^{(2)}$ *los dos planos,* $F^{(1)}\vartheta_2^{(1)}$ *y* $F^{(2)}\vartheta_2^{(2)}$ *los dos haces,* la recta g y el espacio g'_3 *la recta sostén* y *el espacio sostén* de la imagen.

(5) Los (3.3), (3.4), (3.5) confirman que los dos planos $\vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}$ son conjugados armónicos con respesto a π', π''.

La involución en el haz de planos gg'_3 que tiene como dobles los dos planos π' y π'' de M_4^2 pasantes por g se indicará a continuación con j, y se llamará la *involución cardenal* de la imagen.

Por fin, al hablar a continuación de *imágenes*, sin ninguna determinación ulterior, sobreentendemos que se trata de imágenes de E_2 no parabólicos, en el sentido que acabamos de aclarar.

Observación. - Aunque no tiene mayor interés para los desarrollos sucesivos, cabe observar que, si en la imagen hiperespacial de un E_2 se intercambian los dos planos, dejando invariados los puntos, el E_2 originario se transforma en el que tiene con él, en A, un *contacto armónico*: en efecto los valores de m_1, m_2 tienen que quedar invariados, mientras que en (Σ_3) el coeficiente $s+tm_1$ tiene que cambiar de signo, de modo que r, s, t cambian de signo al pasar del primer E_2 al segundo y x, y, z, p, q quedan invariados.

4. - Dada una ecuación en derivadas parciales de segundo orden (1. 3), ella define (en cierto campo de variabilidad, como lo sobreentendemos a continuación) una doble infinidad de E_2 para cada E_1 que se prefije como sostén. Luego, debido a los resultados del nº. anterior, para cada recta g de la cuádrica de Klein que se prefije como recta sostén de la imagen, queda definida una doble infinidad de imágenes, las que tienen en común recta y espacio sostén, además de la involución cardenal.

Esas ∞^2 imágenes tienen obviamente sus planos conjugados en la involución j, de modo que los pares de planos de las ∞^2 imágenes consideradas integran tan sólo una simple infinidad. En cambio, los pares de puntos de dichas imágenes constituyen una doble infinidad, excepto en el caso en que la ecuación (1. 3) es homogénea, en el cual aún los pares de puntos de esas imágenes integran tan sólo una simple infinidad.

Esta observación, en particular, se aplica a las ecuaciones de Monge-Ampère:

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0 \qquad (4.1)$$

(donde H, K, L, M, N indican funciones de x, y, z, p, q). Los pares de puntos de las imágenes que tienen una recta genérica g como recta sostén integran una doble infinidad, a menos que sea $M=N=0$, o bien $H=K=L=M=0$; es decir, a menos que la ecuación sea lineal homogénea en las derivadas segundas, o bien se reduzca a la clásica ecuación $rt-s^2=0$, la cual última sin embargo está fuera de nuestras consideraciones, debido a que define únicamente E_2 parabólicos.

Prescindiendo de estas observaciones casi evidentes, nos proponemos estudiar en este nº. la configuración de las ∞^2 imágenes definidas por la ecuación de Monge-Ampère (4. 1) al prefijar la recta sostén g: se comprende a priori que, debido a la particular estructura que ofrecen las ecuaciones de Monge-Ampère con respecto a las más generales ecuaciones de segundo orden, esa configuración deberá presentar circunstancias particularmente sencillas.

Llamo u, v los valores de m_1, m_2 que corresponden a los puntos $F^{(1)}, F^{(2)}$ de una de esas ∞^2 imágenes, U, V los correspondientes valores de $\sqrt{s^2-rt}$ y $-\sqrt{s^2-rt}$, de modo que, según lo dicho en el n. 3, los planos $\vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}$ de la imagen son, de acuerdo con (3. 3), las intersecciones del espacio g'_3 sostén con los hiperplanos del haz

$$pp_{14}+qp_{24}-p_{34}+\lambda(p_{12}-yp_{14}+xp_{24})=0 \tag{4. 2}$$

que corresponden respectivamente a $\lambda=U$, $\lambda=V$; U y V son por consiguiente coordenadas proyectivas de los planos $\vartheta_2^{(1)}$, $\vartheta_2^{(2)}$ en el haz de eje g dentro de g'_3.

De las expresiones de u, v dadas por los (3. 2) y de las de U, V se despeja

$$r=\frac{2uv}{u-v}U, \quad s=-\frac{u+v}{u-v}U, \quad t=\frac{2}{u-v}U;$$

por consiguiente, al reemplazar en la (4. 1), resulta que las u, v, U, V están vinculadas por las dos condiciones

$$U+V=0, \tag{4. 3}$$

$$M(u-v)+2U(L-K(u+v)+Huv)-NU^2(u-v)=0, \tag{4. 4}$$

la segunda de las cuales puede obviamente considerarse como el resultado del reemplazo del valor de V brindado por la primera en la ecuación cuadrilineal entre u, v, U, V:

$$M(u-v)+2U(L-K(u+v)+Huv)+NUV(u-v)=0. \qquad (4.5)$$

De lo dicho ya se desprende que los dos puntos y los dos planos de una imagen variable, en el sistema ∞^2 que representa el de los E_2 definido por una ecuación de Monge-Ampère (4.1) con un dado E_1 sostén, son las ∞^2 cuaternas de una correspondencia cuadrilineal cuyos planos son conjugados en la involución cardenal j.

En general, en un espacio de tres dimensiones g'_3, dada una correspondencia cuadrilineal entre dos puntuales de sostén g, descriptas por dos puntos $F^{(1)}, F^{(2)}$, y dos haces de planos de eje g, descriptos por dos planos $\vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}$, y dada además una proyectividad J entre estos dos últimos haces, la correspondencia «intersección» de las dos, es decir subordinada dentro de la cuadrilinearidad por la proyectividad J (correspondencia que define las ∞^2 cuaternas de la cuadrilinearidad cuyos planos se corresponden en J) puede considerarse como una correspondencia biunívoca Γ dentro de la totalidad ∞^2 de haces de rectas que contienen la g, totalidad que designamos con la notación (g, g'_3). La correspondencia Γ asocia a cada haz $F^{(1)}\vartheta_2^{(1)}$ de la totalidad (g, g'_3) el haz $F^{(2)}\vartheta_2^{(2)}$ de la misma: su biunivocidad se desprende del hecho que el haz $F^{(1)}\vartheta_2^{(1)}$ individualiza el plano $\vartheta_2^{(2)}$ como correspondiente en J del plano $\vartheta_2^{(1)}$, y luego la correspondencia cuadrilineal da a conocer también el centro del haz $F^{(2)}\vartheta_2^{(2)}$. Huelga observar que, al decir que Γ es una correspondencia entre los mencionados haces de rectas, nos referimos a esos haces como individuos asociados por la correspondencia, y no como conjuntos de rectas. La correspondencia Γ entre los haces de rectas del sistema (g, g'_3) se llamará a continuación *correspondencia elemental,* debido a su génesis particularmente sencilla que la diferencia de las otras correspondencias birracionales del sistema (g, g'_3) en sí mismo. Más precisamente cabe hablar de una correspondencia elemental que tiene la J como *proyectividad cardenal.*

Al comparar la particular correspondencia elemental definida por las (4.3), (4.5) con la más general correspondencia elemental dentro del sistema (g, g'_3), se nota de inmediato que en este caso no sólo es involutoria la proyectividad cardenal J (la que se reduce a la involución j), sino que también es involutoria la propia correspondencia Γ entre los haces de la totalidad considerada, debido a la circunstancia que en la imagen de un E_2 los dos haces $F^{(1)}\vartheta_2^{(1)}$, $F^{(2)}\vartheta_2^{(2)}$ desempeñan un papel simétrico. Por lo demás es claro que el sistema integrado por las (4. 3), (4. 5) se transforma en sí mismo por el intercambio simultáneo de u con v y de U con V.

Para caracterizar de manera completa los sistemas ∞^2 de imágenes que estamos considerando, cabe por lo tanto preguntarse si una correspondencia elemental *involutoria* entre los haces de rectas del sistema (g, g'_3) que tenga como cardenal la involución j representada por la (4. 3) siempre puede representarse por una ecuación del tipo (4. 5). Pues bien, si una ecuación cuadrilineal entre u, v, U, V, en la cual se haya reemplazado V por $-U$, de acuerdo con la (4. 3) tiene que transformarse en sí cuando se intercambian u y v, U y $-U$, es claro que al considerar su primer miembro como polinomio cuadrático en U con coeficientes funciones de u, v, existen únicamente dos posibilidades, a saber:

1) que el término independiente y el coeficiente de U^2 sean ambos alternados, y el coeficiente de U simétrico en u, v;

2) que el término independiente y el coeficiente de U^2 sean ambos simétricos, y el coeficiente de U alternado en u, v.

En los dos casos, la correspondencia elemental resulta respectivamente representada por ecuaciones del tipo

$$d_0(u-v)+(a_1+b_1(u+v)+c_1uv)U-d_2(u-v)U^2=0, \tag{4. 6}$$

$$a_0+b_0(u+v)+c_0uv+d_1(u-v)U- \\ -(a_2+b_2(u+v)+c_2uv)U^2=0, \tag{4. 7}$$

donde las a_i, b_i, c_i, d_i $(i=0,1,2)$ indican constantes.

En el caso 1) la ecuación así lograda difiere de la (4. 4) únicamente en las notaciones.

Un carácter geométrico que diferencia las dos correspondencias elementales representadas respectivamente por (4. 6) y (4. 7) es el siguiente: en la correspondencia (4. 6) cada haz del sistema (g, g'_3) cuyo plano sea un plano doble de j es unido; en cambio en la (4. 7) esto no ocurre, a menos que la correspondencia se reduzca al tipo degenerado $U(u-v)=0$, en el cual cada haz genérico (en el sentido de que su plano no sea un plano doble de j) tiene como correspondiente un haz con el mismo centro (mientras que si el plano del haz es doble en j, el centro del haz correspondiente resulta indeterminado).

Podemos distinguir entre sí las correspondencias elementales de los tipos 1) y 2) llamándolas respectivamente *de primera y de segunda especie.*

En resumen, *para una ecuación de Monge-Ampère las* ∞^2 *imágenes de los* ∞^2 E_2 *que cumplen con ella, y tienen como sostén una dada recta* g *de la cuádrica de Klein* $M_4{}^2$, *son pares de haces de rectas del sistema* (g, g'_3), *tales que los dos haces de un mismo par se corresponden en una correspondencia elemental involutoria de primera especie, cuya involución cardenal* j *es la que tiene como dobles los dos planos de* $M_4{}^2$ *que pasan por* g.

Puede agregarse que la propiedad caracteriza las ecuaciones de Monge-Ampère entre las demás ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

Fijar una ecuación de Monge-Ampère da lo mismo como considerar en el espacio de 5 dimensiones S_5 una figura de conjunto lograda al prefijar para cada recta g de la cuádrica $M_4{}^2$ (en cierto campo de variabilidad), dentro del correspondiente sistema (g, g'_3), una correspondencia elemental involutoria de primera especia cuya involución cardenal sea la que tiene como dobles los dos planos de $M_4{}^2$ que pasan por g.

Llamaremos a continuación *figura* Λ la figura que acabamos de describir; y, para un haz de rectas arbitrario en el sistema (g, g'_3), llamaremos *haz conjugado* a su homólogo en la correspondencia elemental involutoria de primera especie subordinada por la figura Λ en ese sistema.

Observación. - Aunque la naturaleza de las correspondencias que hemos llamado elementales involutorias de primera especie resulta ya completamente aclarada por lo que precede, agrego a continuación una caracterización de las mismas que tiene un carácter más concreto.

Conviene con este objeto representar los ∞^2 haces de rectas de un sistema (g, g'_3) en los ∞^2 puntos de una cuádrica Q de un espacio tridimensional E_3, lo que se hace (sin excepciones) al individualizar cada uno de dichos haces mediante su centro y su plano, y representar luego los ∞^2 pares integrados por un punto de g y un plano del haz de eje g dentro de g'_3, a la manera de Segre, en los puntos de una cuádrica Q de E_3. Si en E_3 usamos coordenadas proyectivas homogéneas de punto $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$, e indicamos con u, U respectivamente las coordenadas proyectivas del centro y del plano de uno de los haces de rectas considerados, dentro de las figuras de primera categoría a las cuales pertenecen, la representación puede realizarse mediante las

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 1 : u : U : uU$$

(de modo que Q tiene ecuación $\xi_0\xi_3 - \xi_1\xi_2 = 0$). De las dos familias de rectas generatrices de Q una (*primera*) representa los puntos de g, y la *segunda* los planos por g: una involución j en el haz de planos por g dentro de g'_3 (que seguiremos representando mediante (4.3)) tiene como imagen una involución j dentro de la segunda familia de generatrices de Q: sean $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ sus generatrices dobles (las que coinciden con las aristas B_0B_1, B_2B_3 del tetraedro de referencia de las coordenadas proyectivas ξ_i).

Pues bien, al referirnos a esta representación, *las correspondencias elementales involutorias de primera especie del sistema* (g, g'_3) *en sí mismo vienen a ser las involuciones cortadas sobre la cuádrica* Q *por las rectas de una congruencia lineal* C *arbitraria contenida en el complejo lineal de rectas* Λ *que contiene las rectas tangentes a* Q *en los puntos de las generatrices* $c^{(1)}$, $c^{(2)}$. Hay que excluir únicamente aquellas particulares congruencias lineales C que se encuentran en las condiciones ahora indicadas teniendo como directrices dos generatrices de Q pertenecientes a la segunda familia (y por lo tanto necesariamente correspondientes en la involución j).

Para comprobar lo dicho, partimos de la observación que, llamando π_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$, las coordenadas radiales homogéneas de recta en E_3, el complejo lineal Λ tiene la ecuación $\pi_{03} - \pi_{12} = 0$. Una congruencia lineal C contenida en Λ, y definida como intersección de Λ con un complejo lineal de ecuación

$$\Sigma c_{ik}\, \pi_{ik} = 0, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3; \;\; i < k) \qquad (4.8)$$

determina por sección sobre la cuádrica Q la involución en la cual se corresponden los puntos (u, U) y (v, V) [6] cuando sus coordenadas curvilíneas están vinculadas por la (4.3) y la

$$c_{01}(u-v) + U[2c_{02} + (c_{03} + c_{12})(u+v) + 2c_{13}uv] - c_{23}U^2(u-v) = 0.$$

La comparación con la (4.5) enseña por lo tanto que se trata de la imagen de una correspondencia elemental involutoria de primera especie, y viceversa, porque si partimos de la (4.5), pueden reconstruirse, a menos de un inesencial factor común, los coeficientes de la ecuación (4.8), con la única indeterminación que de los coeficientes c_{03}, c_{12} queda tan sólo individualizada la suma, lo que por lo demás no tiene inconveniente porque el complejo lineal (4.8) es arbitrario dentro del haz que lo une al complejo Λ.

Cabe observar (independientemente de la consideración de las ecuaciones de Monge-Ampère) que la cuádrica Q lleva a representar los ∞^3 E_2 que tienen como sostén un dado E_1 mediante los ∞^3 pares de puntos de Q correspondientes a los ∞^3 pares de haces del sistema (g, g'_3) que integran las imágenes de los ∞^3 E_2; los dos puntos de cada par están situados sobre dos generatrices de la segunda familia conjugadas en la involución j. Lo mismo da decir que esos ∞^3 E_2 se representan en E_3 en las ∞^3 rectas que unen los puntos de cada par: estas rectas constituyen el mismo complejo lineal Λ considerado más arriba, de modo que en definitiva tenemos una *representación de los* ∞^3 E_2 *de dado* E_1 *sostén en las rectas del complejo lineal* Λ. Este puede llamarse el *complejo lineal asociado* al E_1 sostén (o a la recta g de $M_4{}^2$ imagen del E_1 sostén). Por lo tanto *una ecuación en derivadas parciales de segundo orden define para cada* E_1 *una congruencia de rectas perteneciente al complejo lineal asociado (y a su vez queda individualizada por tal conjunto de congruencias)*. El teorema anterior expresa que *las ecuaciones de Monge-Ampère corresponden al caso algebraicamente más sencillo*, es decir al caso *en que la mencionada congruencia es lineal*. Esto explica, desde el punto de vista adoptado, la situación pri-

---

(6) Al restar miembro a miembro las dos ecuaciones que expresan que la recta que une estos dos puntos pertenece a la congruencia lineal C, se logra $(u-v)(U+V) = 0$. De anularse para u, U genéricos el primer factor, resultaría únicamente el caso de excepción señalado más arriba: por esto puede deducirse que subsiste la (4.3).

vilegiada que corresponde a las ecuaciones de Monge-Ampère entre las demás ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

5.-Podemos ahora comprobar el teorema siguiente, el que resuelve por completo la cuestión planteada al principio del presente trabajo.

Dada una ecuación de Monge-Ampère, es decir la correspondiente figura Λ, *ordenemos las rectas de la cuádrica de Klein* M_4^2 *en superficies regladas* R, *no degeneradas en planos, de manera tal que para cada punto genérico* P *de cada generatriz genérica* g *de una reglada* R *el haz de las rectas tangente a* R *en* P *tenga un haz conjugado el que esté igualmente integrado por rectas tangentes a* R. *Las regladas* R *así definidas son las imágenes de las características de la dada ecuación de Monge-Ampère.*

En el teorema enunciado hemos puesto la condición que las superficies regladas R no deben degenerar en planos. Con este respecto cabe observar que, si tomamos una superficie reglada R cuyas generatrices g estén en un plano π (del primer o segundo sistema) de la cuádrica M_4^2 de Klein, y P es un punto genérico de una generatriz g, el haz $P\pi$ —de acuerdo con lo observado en el n. 4 sobre las correspondencias elementales involutorias de primera especie— coincide con su propio conjugado, de modo pues que esa R cumpliría con la condición geométrica mediante la cual definimos las características.

Para demostrar el teorema, observemos enseguida lo siguiente: si R es una superficie reglada en las condiciones requeridas, debido a la propia definición, los planos tangentes a R en los puntos de una generatriz genérica g tienen que estar en el espacio g'_3 polar de g, de forma que g'_3 coincide con el S_3 tangente a R a lo largo de g, o sea el espacio que une g con la generatriz «infinitamente vecina». Luego, si indicamos con d el símbolo de diferenciación relativo al desplazamiento de una generatriz dentro de una superficie reglada R, y representamos analíticamente estas generatrices de la manera a) del n. 2, tenemos como primera condición necesaria la

$$dz = pdx + qdy, \tag{5.1}$$

de acuerdo con la última parte del mismo n. 2.

Si adoptamos las (2.1) como coordenadas de un punto genérico P de la generatriz g de la reglada R, el plano π tangente a la R en P es el plano que une la g con el punto:

$$\left.\begin{array}{l} p_{12}=mdx-dy,\ p_{13}=(dp+mdq)x+q(mdx-dy),\ p_{14}=0, \\ p_{23}=(dp+mdq)y+p(dy-mdx),\ p_{24}=0,\ p_{34}=-(dp+mdq). \end{array}\right\} \quad (5.2)$$

Al reemplazar los valores (5. 2) en la ecuación (4. 2) resulta que el plano π está cortado sobre g'_3 por el hiperplano (4. 2) para el cual

$$\lambda=\frac{dp+mdq}{dy-mdx}. \quad (5.3)$$

Por lo tanto, si la ecuación de Monge-Ampère a la cual nos referimos es la (4. 1), el haz $Q\chi$ del sistema (g, g'_3) conjugado al haz $P\pi$ se logra de las (4. 3), (4.4) al reemplazar u, U por m y el valor (5. 3), de modo pues que χ es el plano cortado sobre g'_3 por el hiperplano (4. 2) correspondiente al valor

$$\mu=\frac{dp+mdq}{mdx-dy} \quad (5.4)$$

de λ, y Q es el punto (2. 1) en el cual m está reemplazado por

$$n=\frac{(dy-mdx)\phi+Nm(dp+mdq)^2}{(dy-mdx)\psi+N(dp+mdq)^2}, \quad (5.5)$$

donde he indicado con ϕ, ψ las formas diferenciales lineales

$$\begin{aligned} \phi&=2(Km-L)(dp+mdq)-Mm(dy-mdx), \\ \psi&=2(Hm-K)(dp+mdq)-M(dy-mdx). \end{aligned}$$

La definición de las regladas R se traduce ahora en la condición siguiente: tiene que subsistir, idénticamente con respecto a m, la (5. 3) en la cual se reemplacen m y λ respectivamente por los valores n y μ dados por las (5. 5) y (5. 4); es decir tiene que ser *idénticamente* con respecto a m:

$$\begin{aligned} &[2m\,dq\,dx+dp\,dx-dq\,dy][(dy-mdx)\,\phi+Nm(dp+mdq)^2]+ \\ &+[m(dp\,dx-dq\,dy)-2dp\,dy][(dy-mdx)\,\psi+N(dp+mdq)^2]=0. \end{aligned}$$

Debido a que ϕ, ψ son polinomios cuadráticos en m, el primer miembro es un polinomio de cuarto grado en esta misma variable. Al imponer que sea idénticamente nulo resultan cinco condiciones: llamamos (T_h) a la que se logra al escribir que se anula el coeficiente de m^h $(h=0, 1, \ldots, 4)$.

Pues bien, al desarrollar los cálculos resulta lo siguiente. Si definimos tres formas diferenciales cuadráticas J_1, J_2, J_3 por

$$J_1 \equiv -L(dp\,dx - dq\,dy) + 2K\,dp\,dy + Mdy^2 - Ndp^2,$$

$$J_2 \equiv H(dp\,dx - dq\,dy) + 2K\,dq\,dx + Mdx^2 - Ndq^2,$$

$$J_3 \equiv M\,dx\,dy + L\,dq\,dx + H\,dp\,dy + N\,dp\,dq,$$

las condiciones (T_h) pueden escribirse de la forma siguiente:

$$dp\,dy\,J_1 = 0, \tag{T_0}$$

$$(dp\,dx - dq\,dy)\,J_1 + 2\,dp\,dy\,J_3 = 0, \tag{T_1}$$

$$(dp\,dx - dq\,dy)\,J_3 = 0, \tag{T_2}$$

$$(dp\,dx - dq\,dy)\,J_2 - 2\,dq\,dx\,J_3 = 0, \tag{T_3}$$

$$dq\,dx\,J_2 = 0. \tag{T_4}$$

Una discusión casi inmediata permite reducir este sistema de condiciones a las

$$J_1 = 0, \; J_2 = 0, \; J_3 = 0 \tag{5. 6}$$

a menos que sea $dx=dy=0$, o bien $dp=dq=0$. Pues bien, las $dx=dy=0$ y $dp=dq=0$ tienen que ser descartadas debido a que llevarían a superficies regladas degeneradas en planos de la cuádrica de Klein del primero o respectivamente segundo sistema; de modo que en definitiva las superficies regladas consideradas en el teorema quedan caracterizadas por el sistema (5. 6).

A este punto podría darse por acabada la demostración, debido a que el sistema (5. 6) es equivalente al conjunto de condiciones resumidas en el anularse de la matríz

$$\left\| \begin{matrix} H\,dy + N\,dq & 2K\,dy - N\,dp & L & M\,dy \\ dx & dy & 0 & -dp \\ 0 & dx & 1 & -dq \end{matrix} \right\|$$

y este conjunto es apto a definir las características (7).

Sin embargo preferimos seguir transformando las (5. 6) hasta llegar a la forma originaria de las ecuaciones diferenciales de las características como se encuentra en las *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles de second ordre* de Goursat (8). Dichas ecuaciones son las siguientes, a las cuales en cada caso queda sobreentendido que hay que agregar la (5, 1):

para $N \neq 0$	$N dp + L dx + \lambda_1 dy = 0$ $N dq + \lambda_2 dx + H dy = 0.$	$N dp + L dx + \lambda_2 dy = 0,$ $N dq + \lambda_1 dx + H dy = 0.$	(I)
para $N = 0$, $H \neq 0$	$dy - \mu_1 dx = 0$ $H dp + H \mu_2 dq + M dx = 0$	$dy - \mu_2 dx = 0$ $H dp + H \mu_1 dq + M dx = 0$	(II)
para $N = H =$ $= L = 0$	$dx = 0,$ $2K dp + M dy = 0$	$dy = 0,$ $2K dq + M dx = 0.$	(III)

Si $N=0$, $H=0$, $L \neq 0$, se tienen ecuaciones análogas a las (II) mediante el intercambio de x con y y los demás que se deducen del mismo. En las (I), (II) λ_1, λ_2, y respectivamente μ_1, μ_2 (9) son las raíces de las ecuaciones cuadráticas en λ, o respectivamente μ:

(7) Véase p. e. COURANT-HILBERT: *Methoden der mathematischen Physik* II, (1937), p. 344 (donde empero el signo de $M dy$ está equivocado, a raíz de un evidente error de imprenta).

(8) ed. 1896, t. I, cap. II, nº 22 y siguientes.

(9) En la obra citada de Goursat nuestras μ_1, μ_2 se indican en cambio otra vez con λ_1, λ_2. Además las (II) aparecen en Goursat en la forma un poco distinta

$dy - \mu_1 dx = 0,$ $H \mu_1 dp + L dq + M \mu_1 dx = 0$	$dy - \mu_2 dx = 0$ $H \mu_2 dp + L dq + M \mu_2 dx = 0$	(II')

Las dos formas son generalmente equivalentes, pero la adoptada en el tex-

$$\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0, \tag{5.7}$$

$$H\mu^2 - 2K\mu + L = 0. \tag{5.8}$$

Para efectuar la transformación de las (5.6) en los sistemas (I), (II), (III) interpreto dx, dy, dp, dq como coordenadas proyectivas homogéneas de punto en un espacio auxiliario de 3 dimensiones Θ_3. En Θ_3 las tres ecuaciones $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $J_3 = 0$ representan respectivamente tres cuádricas ω_1, ω_2, ω_3 (10), de discriminantes L^4, H^4, $(MN - LH)^2$. Se trata de encontrar la base del sistema lineal individualizado por las tres cuádricas, con la advertencia que en el caso en que una o ambas las rectas e_1, e_2 representadas respectivamente por $dx = dy = 0$, $dp = dq = 0$ pertenezcan a tal base hay que excluirlas por las razones expuestas anteriormente. Llamaré β la base residua. En la búsqueda de β resulta útil acudir a la identidad, de comprobación inmediata:

$$dq\,dx\,J_1 - dp\,dy\,J_2 + (dp\,dx - dq\,dy)\,J_3 = 0. \tag{5.9}$$

En lo siguiente podemos suponer que no sea $N = H = L = 0$ ni $M = H = L = 0$, debido a que en ambos estos casos se reconoce de inmediato la equivalencia del sistema (5.6) con (III) o (I). Por consiguiente, si $N = 0$ (o si $M = 0$) una de las dos funcioness H, L puede suponerse no idénticamente nula: fijaremos las ideas suponiendo en tal caso $H \neq 0$. Cabe observar que, en las hipótesis hechas, una por lo menos de las dos cuádricas ω_2, ω_3 no está degenerada, de modo que, con respecto a tal cuádrica que llamaré Ω, tiene sentido hablar de sus dos familias de generatrices (reales o no).

Las cuádricas ω_2, ω_3, necesariamente distintas entre sí, individualizan un haz φ, de cuya base forman parte las dos rectas r_1, r_2, representadas respectivamente por los dos sistemas

---

to tiene la ventaja de que no da lugar a casos de excepción (los que en cambio para las (II') se presentan en el caso $L = 0$, en cuanto una por lo menos de las ecuaciones escritas en el renglón inferior viene a ser idéntica).

(10) Hay excepciones únicamente si una de las tres ecuaciones (5.6) se reduce a una identidad; esto ocurre tan sólo cuando la ecuación de Monge-Ampère se reduce a $r = 0$, o $s = 0$, o $t = 0$; en estos casos el resultado se comprueba inmediatamente de manera directa.

$$dx = H\,dy + N\,dq = 0;\quad dq = H\,dp + M\,dx = 0;$$

cada uno de los cuales está integrado por dos ecuaciones distintas entre sí y en nuestras hipótesis no idénticas. Si $H \neq 0$, las rectas r_1, r_2 son distintas entre sí y alabeadas, y pertenecen por consiguiente a una misma familia de generatrices de Ω; si $H=0$, las dos rectas coinciden entre sí y (debido a que ω_2 se reduce a un par de planos por $r_1 \equiv r_2$) a lo largo de $r_1 \equiv r_2$ las cuádricas no especializadas del haz φ son tangentes entre sí. Por consiguiente, en todos los casos, la base del haz φ queda completada por un par de generatrices s_1, s_2 distintas o no entre sí, pertenecientes a la familia opuesta de Ω.

Las rectas r_1, r_2 pueden eventualmente pertenecer también a la cuádrica ω_1, lo cual ocurre para r_1 cuando $N=0$ y para r_2 cuando $M=0$; sin embargo en estos casos $r_1 \equiv e_1$ o respectivamente $r_2 \equiv e_2$, de modo que r_1, r_2 nunca pueden ser componentes de aquella parte de la base del sistema lineal (5.6) que llamamos β.

En cambio cada una de las dos rectas s_1, s_2 pertenece necesariamente a ω_1, como se desprende de la identidad (5.9): la conclusión no subsistiría únicamente si a lo largo de esta recta resultase $dx=0$, o $dq=0$, lo que puede excluirse debido a que p. e. el plano $dx=0$ corta ω_2, ω_3, fuera de la recta r_1, en dos rectas que resultan distintas entre sí. Además ninguna de las dos rectas s_1, s_2 puede reducirse a una de las e_1, e_2 (porque si p. e. e_1 pertenece a ω_2, resulta $N=0$, y entonces $e_1 \equiv r_1$).

Concluímos por lo tanto que en las hipótesis hechas la base β está integrada por el par de rectas s_1, s_2. Para encontrar en Θ_3 se representación analítica, hay que tratar de llevar por r_1 un plano

$$l_1\,dx + l_2\,(H\,dy + N\,dq) = 0, \tag{5.10}$$

tal que tenga común con ω_2, ω_3 una misma recta, además de la r_1. Resulta de inmediato que esto equivale a decir que el sistema integrado por la (5.10) y las

$$l_1\,dq + l_2\,(H\,dp + 2K\,dq + M\,dx) = 0, \tag{5.11}$$

$$l_1\,dp - l_2\,(M\,dy + L\,dq) = 0, \tag{5.12}$$

se reduzca a menos de tres ecuaciones independientes, o también que $l_1 : l_2$ cumpla con

$$l_1^2 + 2K\, l_1\, l_2 + (HL - MN)\, l_2^2 = 0. \tag{5.13}$$

Por combinación lineal de las (5.10), (5.11), (5.12) se logra la

$$l_2 N\, dp + l_2 L\, dx - (l_1 + 2K\, l_2)\, dy = 0, \tag{5.14}$$

la que para $N \neq 0$ es distinta de (5.10).

Luego, si $N \neq 0$, cada una de las dos rectas s_1, s_2 puede representarse por el sistema (5.10), (5.14), siendo $\dfrac{l_1}{l_2} = \lambda$ una de las dos raíces de (5.13), es decir de (5.7); el sistema logrado se transforma en el sistema (I).

Si en cambio $N = 0$, puede suponerse $H \neq 0$, y se pasa a las (II) representando cada una de las rectas s_1, s_2 por el sistema (5.10) (5.11), y poniendo $\dfrac{l_1}{l_2} = -H\mu$ con lo cual la (5.13) se transforma justamente en la (5.8).