OBSERVACIONES SOBRE UN TEOREMA DE REY PASTOR SOBRE EL METODO DE GRAFFE

por

LUIS VIGIL

Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias

Madrid

En el Algebra de Rey Pastor (I, § 14, nº 92) se encuentra un teorema preliminar al estudio general del método de Gräffe que acota el error de la variable en función del error de la función. El teorema en cuestión afirma que dadas dos ecuaciones de grado n, $f(x)=0$, $f(x)=\delta$ *cada raíz de una de ellas difiere de una raíz de la otra en menos de* $\sqrt[n]{|\delta|}$, suponiendo reducido a la unidad el primer coeficiente.

Ostrowski, que se ha ocupado ampliamente de este método de resolución de ecuaciones (¹) hace observar que no se trata de una correspondencia raíz a raíz (lo que por otra parte resulta evidente en la demostración de Rey Pastor), esto es, que si son $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las soluciones de $f(x)=0$ no siempre se verificará que existan $x'_1, \ldots, x'_n$ soluciones de $f(x)=\delta$ tales que

$$|x'_i - x_i| \leqq \sqrt[n]{|\delta|}$$

apoyando su indicación en el siguiente ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^3 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\,x^2 - 1 \\ g(x) &= x^3 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\,x^2 \end{aligned}\right\} \sqrt[3]{|\delta|} = 1$$

(¹) *Recherches sur la methode de Gräffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent* (Acta Mathematica, t. 72).

siendo las raíces de $f(x)$ y de $g(x)$ respectivamente.

$$x_1 = -\sqrt[3]{2}\, x_2 = -\sqrt[3]{2} \qquad\qquad x_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0{,}62996$$

$$x'_1 = 0 \quad x'_2 = 0 \qquad\qquad x'_3 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = -1{,}89$$

$x_1 = x_2$ está en el entorno $\sqrt[n]{|\delta|}$ de x'_3, mientras que x_3 lo está en el de $x'_1 = x'_2$.

Para que la correspondencia biunívoca deje de verificarse no es preciso que se trate de raíces múltiples.

He aquí otro ejemplo nuestro con raíces simples

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + 3\,x^2 + 0{,}56\,x = 0 \\ g(x) = x^3 + 3\,x^2 + 0{,}56\,x = 2{,}88 \end{array}\right| \qquad \sqrt[3]{2{,}88} < 1{,}5$$

$$x_1 = -2{,}8 \qquad x_2 = -0{,}2 \qquad x_3 = 0$$

$$x'_1 = -2 \qquad x'_2 = -1{,}8 \qquad x'_3 = 0{,}8$$

x_1 está en el entorno 1,5 de x'_1 y x'_2, mientras que x_2 y x_3 lo están en el de x'_3.

Vamos a ver que para valores de δ suficientemente pequeños puede hablarse de correspondencia raíz a raíz.

a) En el caso de que $f(x) = \delta$ tenga únicamente raíces simples, si δ es tal que

$$|x'_i - x'_j| > 2\sqrt[n]{|\delta|} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad i \neq j$$

como en cada entorno de radio $\sqrt[n]{|\delta|}$ de cada raíz de $f(x) = \delta$ tiene que hallarse una de $f(x) = 0$, la correspondencia será seguramente biunívoca.

b) En el caso de que en $f(x) = 0$ haya raíces múltiples también la misma condición de que los entornos $2\sqrt[n]{|\delta|}$ no se imbriquen es suficiente. Sean $x_1 = x_2 = \ldots = x_p < x_{p+1} \leqq \cdots \leqq x_n$. las raíces de $f(x) = 0$.

Tomamos δ, tal que

$$(1) \qquad |x_i - x_j| > 2\sqrt[n]{|\delta_1|} \quad \text{para} \quad p < j \leqq n.$$

Por el teorema de la continuidad de las raíces, cuando δ tiende a cero hay p raíces de $f(x) = \delta$ que tienden a x_1, luego si en el entorno de x_1 fijado por un valor δ_1 de δ que verifique (1) no hay p raíces de $f(x) = \delta_1$, para un valor de δ suficientemente pequeño tendrá que haberlas de $f(x) = \delta$ lo cual es absurdo, pues por el teorema citado de Rey Pastor cada raíz de la ecuación aproximada $f(x) = \delta$ ha de moverse en el entorno $\sqrt[n]{|\delta|}$ de alguna raíz de la dada $f(x) = 0$ y la condición (1) supone que el entorno $\sqrt[n]{|\delta_1|}$ de x_1 y con más razón el $\sqrt[n]{|\delta|}$ de cualquier $\delta < \delta_1$ es exterior a los de las restantes raíces.

Resumiendo, si el valor de δ es suficientemente pequeño para que los entornos de dos raíces desiguales cualesquiera de $f(x) = \delta$ den intersección nula, en cada entorno $\sqrt[n]{|\delta|}$ de cada raíz de la ecuación aproximada habrá tantas raíces de la exacta como indique su grado de multiplicidad, y viceversa.