UNA APLICACION DE LAS APROXIMACIONES DIOFANTICAS A LA ECUACION FUNCIONAL $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

por

R. San Juan
Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias
Madrid

Las soluciones reales finitas [1] *de la ecuación funcional,*

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$

son lineales, $f(x)=Cx$, o su gráfica llena densamente el plano, esto es, penetran en todo entorno de cada punto (a,b).

Si todos los valores homólogos de x y $f(x)$ son proporcionales, es decir:

$$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\ldots=C \qquad f(0)=0$$

la solución es evidentemente $f(x)=Cx$, donde queda incluída la $f(x)\equiv 0$ (idénticamente nula) para $C=0$.

En caso contrario, es decir, si existen dos pares de valores $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$ que hacen distinto de cero el determinante

$$\begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(1) Cuando se admite $+\infty$ como valor de la función con los consabidos convenios o definiciones de suma: $a+(+\infty)=+\infty, (+\infty)+(+\infty)=+\infty$, la solución puede ser lineal hasta un valor x_0 de x y $+\infty$ desde éste, es decir:

$$\begin{aligned} f(x) &= Cx & &\text{para} & x &\leqq x_0 \\ f(x) &= +\infty & &\text{,,} & x &> x_0 \end{aligned}$$

el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} x_1 X_1 + x_2 X_2 &= a \\ f(x_1)\, X_1 + f(x_2)\, X_2 &= b \end{aligned}\right\}$$

tiene solución única exacta $X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2$, cualquiera que sean los números reales a y b, en virtud de la regla de Cramer, y solución racional aproximada $X_1 = r_1, X_2 = r_2$, que verifica las ecuaciones con errores prefijados arbitrariamente pequeños, en virtud de un conocido teorema de Kronecker sobre aproximaciones diofánticas ([2]); es decir, dado $\varepsilon > 0$, existen dos números racionales r_1 y r_2 que hacen

$$\begin{aligned} r_1 x_1 + r_2 x_2 &= a + \varepsilon' & \quad |\varepsilon'| < \varepsilon \\ r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2) &= b + \varepsilon'' & \quad |\varepsilon''| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto se comprueba muy fácilmente de un modo directo aproximando los dos números reales α_1 y α_2, que satisfacen exactamente el sistema mediante sendos números racionales r_1 y r_2 con errores menores que $\frac{\varepsilon}{2M}$, siendo M el mayor de los cuatro números $|x_1|$, $|x_2|$, $|f(x_1)|$, $|f(x_2)|$; por ejemplo mediante sus desarrollos en fracción continua; pues siendo

$$r_1 = \alpha_1 + \delta_1 \qquad |\delta_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$r_2 = \alpha_2 + \delta_2 \qquad |\delta_2| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

resulta

$$\begin{aligned} r_1 x_1 + r_2 x_2 &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2) = a + (\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2) \\ r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2) &= [\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)] + [\delta_1 f(x_1) + \delta_2 f(x_2)], \\ &= b + [\delta_1 f(x_1) + \delta_2 f(x_2)] \end{aligned}$$

([1]) Véase, por ejemplo, el libro de Perron *Irrationalzahlen*, Göschens Lehrbuchern. Berlin un Leipzig. 1921 pág. 153, teorema 64. Caso $r = l = n$ mencionado al final.

donde es

$$|\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2| \leqq |\delta_1||x_1| + |\delta_2||x_2| \leqq \frac{\varepsilon}{2M}|x_1| + \frac{\varepsilon}{2M}|x_2| < \varepsilon$$

$$|\delta_1 f(x_1) + \delta_2 f(x_2)| \leqq |\delta_1|\,|f(x_1)| + |\delta_2||f(x_2)| \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2M}\,|f(x_1)| + \frac{\varepsilon}{2M}\,|f(x_2)| < \varepsilon.$$

Ahora bien, de la ecuación funcional resulta inmediatamente, como es sabido, por ser r_1 y r_2 racionales y cualesquiera que sean x_1 y x_2:

$$r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2) = f(r_1 x_1) + f(r_2 x_2) = f(r_1 x_1 + r_2 x_2).$$

Existe, pues, un punto de la gráfica cuyas coordenadas $r_1 x_1 + r_2 x_2$ y $f(r_1 x_1 + r_2 x_2)$ difieren de las (a, b) en menos de ε, o sea que hay puntos de la gráfica en todo entorno cuadrado de (a, b) con amplitud arbitrariamente prefijada.

Como corolarios resultan todos los teoremas clásicos sobre la resolución de esta ecuación; en particular, la acotación en un entorno, que era la mínima condición a que había llegado nuestro querido maestro J. Rey Pastor (3), es la no penetración de la gráfica en las dos partes de la zona vertical sobre este de ordenadas superiores a la cota en valor absoluto, o sea de la función en los correspondientes semientornos de $-\infty$ y $+\infty$ para los valores de x contenidos en aquel.

La construcción de estas soluciones discontinuas que llenan densamente el plano fué lograda por Hamel (4) sirviéndose de la buena ordenación del continuo que resulta del axioma de Zermelo, el cual naturalmente no ha sido necesario para nuestro teorema que se establece solamente mediante el principio del «tertio excluso», implícito ya en su enunciado.

Nótese que el razonamiento anterior, apoyado en la resolución del sistema lineal con coeficientes numéricos no propor-

(3) Véase Rey Pastor. *Funciones Reales.* 2ª edición.

(4) Hamel. *Eine Basis aller zahlen und die Unstetigen Lösungën der Funktionalgleichung* $f(x+y) = f(r) + f(y)$. Mathemastische Annalen Band 60 pág. 459.

cionales cae en defecto si es $+\infty$ o $-\infty$ la ordenada no proporcional a su abcisa, y deja, por tanto, abierta la posibilidad de una solución no totalmente discontinua que valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos y lineal en todos los demás: posibilidad que ha quedado excluída con la condición de ser finita la función impuesta en el enunciado. La construcción efectiva de esta solución se logra por la teoría de Hamel dando valores numéricos proporcionales $f(x) = Cx$ a todos los elementos de la base menos a uno al que se asigna $+\infty$ o $-\infty$, deduciendo los demás según las reglas operativas con estos símbolos (5).

La generalización de este teorema para varias variables y sus aplicaciones a otras ecuaciones funcionales y a la teoría general de las magnitudes escalares derivadas, ha sido expuesta detalladamente en nuestro curso sobre «*Magnitudes con introducción de álgebra moderna*» explicado en la Cátedra de la fundación Conde de Cartagena, que será publicado en breve en la Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid.

(5) Véase, por ejemplo, HANS HAHN. *Reelle Franktionen*. S. 177.