LAS INDICATRICES DE LOS FUNCIONALES ANALITICOS n-LINEALES Y SU APLICACION A LA INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

por

FRANCISCO SANVISENS
Seminario Matemático de la Universidad
Barcelona (España)

Introducción. — Aportamos, con este modesto trabajo, una nueva contribución al estudio de los funcionales analíticos n-lineales (1), dependientes de funciones de una variable. Damos además, una aplicación de las teorías que en él se exponen a la integración de funciones racionales.

Nos situamos en la Escuela de Fantappié, es decir, en el campo de las funciones de variable compleja, *analíticas localmente y ultrarregulares* (2), ciñéndonos al caso de funcionales analíticos n-lineales dependientes de un punto $\{y\}=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, del espacio funcional analítico $\{S\}$ de orden n, definido por funciones coordenadas dependientes de *una sola variable aparente*, o sea, funciones del espacio funcional analítico de Fantappié $S^{(1)}$.

Unas nociones sobre el espacio funcional analítico $\{S\}$ pueden verse en la citada Memoria de Fantappié, «Nuovi fondamenti...». Cap. III, n.º 21.

Limitaremos, además, nuestro estudio a funcionales analítiocs n-lineales tales que las regiones lineales R_j, componentes de la $\{R\}=\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ de definición de dicho funcional, contengan a los polinomios y por tanto los conjuntos característicos A_i de dichas regiones lineales R_i formados de puntos propios.

Empezamos dando la noción de *indicatriz mixta hemisi-*

(1) F. SANVISENS, *Sobre los funcionales analíticos n-lineales.* Nota publicada en la "Revista Matemática Hispano-Americana", 4ª Serie, t. III, 1943.

(2) L. FANTAPPIE, *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici.* Mem. Acc. d'Italia, 1941. Cap. I, nº 5.

métrica-simétrica de un funcional analítico n-lineal, más general que la de indicatriz hemisimétrica y que la de simétrica que dimos en un trabajo precedente. Relacionamos luego las diversas indicatrices entre sí, lo que permitirá, mediante la fórmula integral (3) que da el valor del funcional conocida la indicatriz hemisimétrica del mismo, calcular el funcional conocida una cualquiera de sus indicatrices mixtas. Damos, finalmente, la aplicación a la integración de funciones racionales, previo el estudio del funcional analítico n-lineal que resulta aplicando un funcional analítico lineal F a un producto.

1. - *Indicatrices de un funcional analítico n-lineal.*

Consideremos la variedad analítica $\{M\}$ del espacio funcional analítico $\{S\}$ de orden n, definida por n lineas analíticas del espacio funcional analítico de Fantappié $S^{(1)}$, unas del tipo

$$y_j = \frac{1}{\alpha_j - t} \qquad (j = j_1, j_2, \ldots, j_{n'}) \tag{1. 1}$$

y otras del tipo

$$y_k = \frac{1}{1 - \alpha_k t} \qquad (k = k_1, k_2, \ldots, k_{n''}) \tag{1. 2}$$

siendo los subíndices $j_1, j_2, \ldots, j'_n$; $k_1, k_2, \ldots, k_{n''}$ enteros menores o iguales que n, todos distintos entre sí y además $n' + n'' = n$.

Esta variedad analítica $\{M\}$ hace corresponder a cada multiplicidad de números complejos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha'_n$ un punto $\{y\}$ del espacio $\{S\}$ definido para todo valor de la variable compleja t excepto para aquellos en que t satisface a alguna de las rectas

$$\begin{aligned} \alpha_j - t = 0 \qquad & (j = j_1, j_2, \ldots, j_{n'}) \\ 1 - \alpha_k t = 0 \qquad & (k = k_1, k_2, \ldots, k_{n''}). \end{aligned}$$

Al variar la multiplicidad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n'}$, los conjuntos *cerrados* de puntos t en que no están definidas las (1. 1) o (1. 2) *varían con continuidad*. Por lo tanto las expresiones (1. 1) y (1. 2) definen efectivamente n líneas analíticas del espacio de

(3) F. SANVISENS, *loc. cit.*, nº 4.

Fantappié $S^{(1)}$ y su multiplicidad una variedad analítica $\{M\}$ del espacio funcional analítico $\{S\}$ de orden n.

Esta variedad analítica $\{M\}$ así definida, penetra en toda región funcional lineal $\{R\}=\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$, de definición de un funcional n-lineal F, pues efectivamente basta tomar la multiplicidad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n'}$ de tal modo que todas las $\alpha_j (j=j_1, j_2, \dots, j_{n'})$ verifiquen la desigualdad

$$|\alpha_j| > \rho,$$

siendo ρ, el máximo (4) de t en los conjuntos característicos A_j de las regiones lineales R_j, componentes de la $\{R\}$, y todas las $\alpha_k \ (k=k_1, k_2, \dots, k_{n''})$ verifiquen esta otra

$$|\alpha_k| < \frac{1}{\rho_2}$$

siendo ρ_2 el máximo de t en los conjuntos característicos A_k de las regiones lineales R_k, para que los denominadores de (1. 1) y (1. 2) no puedan anularse para ningún valor de t de los conjuntos característicos $A_i \ (i=1, 2, \dots, n)$ de las regiones lineales R_i y definan dichas funciones (1. 1) y (1. 2) un punto $\{y\}$ del espacio funcional analítico $\{S\}$ de orden n, de la región lineal $\{R\}=\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$.

La región Ω de la variedad de Segre V_{2n} donde se representan las multiplicidades de las α que definen los elementos de la variedad $\{M\}$ que penetran en la región $\{R\}$, se compone de los puntos propios de dicha variedad de Segre V_{2n} incluyendo los en que alguna de las $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ satisface respectivamente a uno de los hiperplanos

$$\alpha_j - t = 0 \qquad (j=j_1, j_2, \dots, j_{n'})$$
$$1 - \alpha_k t = 0 \qquad (k=k_1, k_2, \dots, k_{n''})$$

para toda t de los conjuntos característicos A_i y A_k de las regiones lineales R_j y R_k respectivas.

(4) Recuérdese que los conjuntos característicos A_i $(i = 1,2,\dots,n)$ de las regiones lineales R_i son conjuntos cerrados y están formados exclusivamente de puntos propios, por contener dichas regiones R_i los polinomios.

Todo funcional analítico n-lineal F se puede aplicar a la parte de la variedad $\{M\}$ definida en la región Ω, obteniéndose la función

$$m^{j_1, j_2, \ldots, j_{n'}}_{k_1, k_2, \ldots, k_{n''}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = F\left[\frac{1}{\alpha_j - t}, \frac{1}{1-\alpha_k t}\right] \quad (1.3)$$

analítica en dicha región Ω, que llamamos *indicatriz mixta hemisimétrica-simétrica* del funcional analítico n-lineal F. Con $F\left[\frac{1}{1-\alpha_k t}, \frac{1}{\alpha_j - t}\right]$ hemos simbolizado el funcional n-lineal aplicado a la parte de la variedad $\{M\}$ indicada.

Si todas las líneas analíticas componentes de la variedad $\{M\}$ son del tipo (1.1) o todas del tipo (1.2) la indicatriz que obtendremos, al aplicar el funcional analítico n-lineal F a dicha variedad, será su correspondiente indicatriz hemisimétrica o la simétrica que definimos en un trabajo precedente (5), o sea que designando por $u(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $w(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ a dichas indicatrices hemisimétrica y simétrica respectivamente, será

$$m^{1, 2, \ldots, n}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = u(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad (1.4)$$

$$m_{1, 2, \ldots, n}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = w(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad (1.5)$$

2.- *Relaciones entre las diversas indicatrices.* — Las indicatrices mixtas de un funcional analítico n-lineal pueden relacionarse entre sí y con las hemisimétrica y simétrica del mismo funcional. Así, por ejemplo, para relacionar la indicatriz mixta $m^{j_1, j_2, \ldots, j_{n'}}_{k_1, k_2, \ldots, k_{n''}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, del funcional analítico n-lineal F, con la indicatriz hemisimétrica $u(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, del mismo funcional, basta considerar las transformaciones

$$\beta_k = \frac{1}{\alpha_k} \quad (k = k_1, k_2, \ldots, k_{n''}) \quad (2.1)$$

mediante las cuales será

(5) *Sobre los funcionales analíticos n-lineales*, Rev. Mat. Hispano-Americana, 4ª Serie, t. III, 1943.

$$m^{j_1, j_2, \ldots, j_{n'}}_{k_1, k_2, \ldots, k_{n''}} (\alpha_j, \alpha_k) =$$

$$= F\left[\frac{1}{\alpha_j - t}, \frac{1}{1 - \alpha_k t}\right] = F\left[\frac{1}{\alpha_j - t}, \frac{1}{1 - \frac{t}{\beta_k}}\right] =$$

$$= F\left[\frac{1}{\alpha_j - t}, \frac{\beta_k}{\beta_k - t}\right] = \beta_{k_1} \beta_{k_2} \ldots \beta_{k_{n''}} F\left[\frac{1}{\alpha_j - t}, \frac{1}{\beta_k - t}\right],$$

o sea

$$m^{j_1, j_2, \ldots, j_{n'}}_{k_1, k_2, \ldots, k_{n''}} (\alpha_j, \alpha_k) = \frac{1}{\alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \ldots \alpha_{k_{n''}}} u\left(\alpha_j, \frac{1}{\alpha_k}\right) \qquad (2.2)$$

y

$$u(\alpha_j, \alpha_k) = \frac{1}{\alpha_{k_1} . \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_{n''}}} m^{j_1, j_2, \ldots, j_{n'}}_{k_1, k_2, \ldots, k_{n''}} \left(\alpha_j, \frac{1}{\alpha_k}\right). \qquad (2.3)$$

Obsérvese que las transformaciones (2.1) hacen corresponder a toda región $\bar{\Omega}$, formada de multiplicidades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha'_n$ en que está definida la indicatriz hemisimétrica, otra región Ω, formada de multiplicidades $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_{n'}}, \beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \ldots, \beta_{k_{n'}}$, transformadas de las anteriores mediante las (2.1), en la que está definida la indicatriz mixta considerada.

De modo análogo puede relacionarse la indicatriz mixta considerada con otra indicatriz mixta cualquiera o con la simétrica. Las relaciones con ésta serían

$$m^{j_1, j_2, \ldots, j_{n'}}_{k_1, k_2, \ldots, k_{n''}} (\alpha_j, \alpha_k) = \frac{1}{\alpha_{j_1} . \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_{n'}}} w\left(\frac{1}{\alpha_j}, \alpha_k\right) \qquad (2.4)$$

$$w(\alpha_j, \alpha_k) = \frac{1}{\alpha_{j_1} . \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_{n'}}} m^{j_1, j_2, \ldots, j_{n'}}_{k_1, k_2, \ldots, k_{n''}} \left(\frac{1}{\alpha_j}, \alpha_k\right). \qquad (2.5)$$

En particular las relaciones entre las indicatrices hemisimétrica y simétrica de un funcional analítico n-lineal serán

$$u(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{\alpha_1 . \alpha_2, \ldots, \alpha_n} w\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right) \qquad (2.6)$$

$$w(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{\alpha_1 . \alpha_2, \ldots, \alpha_n} u\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right) \qquad (2.7)$$

ya encontradas en nuestro trabajo citado.

3.-*Funcional lineal aplicado a un producto.* — Al aplicar un funcional analítico lineal $F[y^{(t)}]$, definido para toda función $y^{(t)}$ de la región lineal (A) del espacio funcional analítico de Fantappié $S^{(1)}$, a la función

$$y^{(t)} = y_1^{(t)} \, y_2^{(t)} \ldots y_n^{(t)} \qquad (3.1)$$

producto de las $y_1^{(t)}, y_2^{(t)}, \ldots, y_n^{(t)}$, resulta el funcional analítico n-lineal

$$F[y_1^{(t)} \; y_2^{(t)} \ldots y_n^{(t)}]. \qquad (3.2)$$

En nuestro trabajo ya citado (6), hemos relacionado la indicatriz hemisimétrica $u_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de este funcional n-lineal con la indicatriz hemisimétricca $u(\alpha)$ del funcional lineal dado, mediante la siguiente fórmula

$$u_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{\sum_1^n {}_i (-1)^{i+1} \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) u(\alpha_i)}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} \qquad (3.3)$$

donde Δ representan determinantes de Vandermonde formados con las variables que figuran dentro de los paréntesis.

Recordando (7) la relación existente entre las indicatrices hemisimétricas y simétricas de un funcional lineal

$$u(\alpha) = \frac{1}{\alpha} w\left(\frac{1}{\alpha}\right) \qquad (3.4)$$

(6) *Sobre los funcionales...*

(7) L. Fantappie, *I funzionali analitici* (Memorie della R. Acc. Nazionale dei Lincei, 1930, cap. II, nº 30). Obsérvese que en la relación (3,4) dada arriba, no figura el signo menos de la relación dada en esta Memoria de Fantappié; pero es que, como ya hace el mismo Fantappié en sus más recientes trabajos, tomamos líneas analíticas del tipo $\frac{1}{\alpha - t}$, en vez del $\frac{1}{t - \alpha}$, para definir la indicatriz hemisimétrica.

podemos obtener, a partir de la (3. 3), la relación siguiente, entre la indicatriz hemisimétrica $u_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ del funcional n-lineal (3. 2) y la indicatriz simétrica del funcional lineal dado,

$$u_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{\sum\limits_1^n {}_i(-1)^{i+1} \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \frac{1}{\alpha_i} w\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} \tag{3. 5}$$

Asimismo teniendo en cuenta la relación

$$w(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} u\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right) \tag{3. 6}$$

existente entre las indicatrices hemisimétricas y simétrica de un funcional analítico n-lineal, se pueden obtener a partir de las (3. 3) y (3. 5), las siguientes:

$$w_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{\sum\limits_1^n {}_i(-1)^{i+1} \Delta\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha i-1}, \frac{1}{\alpha i+1}, \ldots, \frac{1}{\alpha n}\right) u\left(\frac{1}{\alpha i}\right)}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \Delta\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha n}\right)} \tag{3. 7}$$

$$w_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{\sum\limits_1^n {}_i(-1)^{i+1} \frac{1}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha i-1\, \alpha i+1, \ldots, \alpha n} \Delta\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha i-1}, \frac{1}{\alpha i+1}, \ldots, \frac{1}{\alpha n}\right) w(\alpha_i)}{\Delta\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha n}\right)} \tag{3. 8}$$

que expresan la indicatriz simétrica del funcional n-lineal (3.2), en función de las hemisimétrica y simétrica respectivamente, del funcional lineal dado.

Finalmente de las relaciones (3. 3) y (3. 5) y habida cuenta de la (2. 2), existente entre una indicatriz mixta $m^{j_1, j_2, \ldots, j_n,}_{k_1, k_2, \ldots, k_n,}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de un funcional analítico n-lineal y la correspondiente indicatriz hemisimétrica del mismo, se podrá relacionar cualquier indicatriz mixta del funcional n-lineal (3. 2) con las indicatrices hemisimétricas o simétrica del funcional lineal F dado.

4.- *Aplicación a la integración de funciones racionales.* — Consideremos el funcional lineal

$$F[f(x)] = \int_a^b f(x)\, dx \tag{4. 1}$$

y apliquémoslo a la función $f(x) = f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)$ con lo que obtenemos el funcional n-lineal

$$F[f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)] = \int_a^b f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)\, dx \tag{4. 2}$$

cuya indicatriz hemisimétrica viene definida aplicando el funcional a la función racional

$$\frac{1}{(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \ldots (\alpha_n - x)} \tag{4. 3}$$

es decir, designándola por $u(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$$u_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \int_a^b \frac{dx}{(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \ldots (\alpha_n - x)} \tag{4. 4}$$

Con la aplicación de la relación (3. 3), podremos expresar dicha integral en función de la indicatriz hemisimétrica $u(\alpha)$ del funcional (4. 1), o sea, de la integral

$$u(\alpha) = \int_a^b \frac{dx}{\alpha - x} = -\log \frac{\alpha - b}{\alpha - a} \tag{4. 5}$$

y será

$$\int_a^b \frac{dx}{(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \ldots (\alpha_n - x)} =$$

$$\frac{\sum_1^n i(-1)^i \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \log \frac{\alpha_i - b}{\alpha_i - a}}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} \tag{4. 6}$$

fórmula que nos resuelve la integración de la función racional (4. 3).

La integral de toda función racional $f(x)$, puesta en forma de cociente de dos polinomios

$$f(x)=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \tag{4.7}$$

supuesto el grado de $\psi(x)$ menor que el de $\varphi(x)$ y $\varphi(x)$ exento de factores múltiples, se puede expresar mediante integrales de fracciones del tipo (4. 3). En efecto, la fracción (4. 7) se podrá descomponer linealmente en otras de la forma

$$\frac{x^p}{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\dots(\alpha_n-x)} \quad p<n \tag{4.8}$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ las raíces del denominador $\varphi(x)$. Agrupando los p factores iguales a x del numerador con los p primeros factores del denominador y teniendo en cuenta que

$$\frac{x}{\alpha_i-x}=-1+\frac{\alpha_i}{\alpha_i-x}\,(i=1,2,\dots,p) \tag{4.9}$$

será

$$\int_a^b \frac{x^p dx}{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\dots(\alpha_n-x)}= \tag{4,10}$$

$$=\int_a^b \left(-1+\frac{\alpha_1}{\alpha_1-x}\right)\left(-1+\frac{\alpha_2}{\alpha_2-x}\right)\dots\left(-1+\frac{\alpha_p}{\alpha_p-x}\right)\frac{dx}{(\alpha_{p+1}-x)\dots(\alpha_n-x)}$$

pero

$$\left(-1+\frac{\alpha_1}{\alpha_1-x}\right)\left(-1+\frac{\alpha_2}{\alpha_2-x}\right)\dots\left(-1+\frac{\alpha_p}{\alpha_p-x}\right)=$$

$$=(-1)^p+(-1)^{p-1}\sum_1^p{}_{i_1}\frac{\alpha_{i_1}}{\alpha_{i_1}-x}+$$

$$+\frac{2}{(-1)^{p-2}}\sum_{1}^{p}{}_{i_1,i_2}\frac{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}}{(\alpha_{i_1}-x)(\alpha_{i_2}-x)}+\ldots+\frac{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\ldots(\alpha_p-x)} \tag{4. 11}$$

y por tanto la integral (4. 10) se transformará

$$\int_a^b\frac{x^p dx}{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\ldots(\alpha_n-x)}=\int_a^b\frac{(-1)^p dx}{(\alpha_{p+1}-x)\ldots(\alpha_n-x)}+$$

$$+\int_a^b(-1)^{p-1}\left\{\sum_1^p{}_{i_1}\frac{\alpha_{i_1}}{\alpha_{i_1}-x}\right\}\frac{dx}{(\alpha_{p+1}-x)\ldots(\alpha_n-x)}+$$

$$+\int_a^b\frac{(-1)^{p-2}}{2}\left\{\sum_1^p{}_{i_1,i_2}\frac{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}}{(\alpha_{i_1}-x)(\alpha_{i_2}-x)}\right\}\frac{dx}{(\alpha_{p+1}-x)\ldots(\alpha_n-x)}+$$

$$+\ldots+\int_a^b\frac{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p.dx}{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\ldots(\alpha_n-x)}=(-1)^p\int_a^b\frac{dx}{(\alpha_{p+1}-x)\ldots(\alpha_n-x)}+$$

$$+(-1)^{p-1}\sum_1^p{}_{i_1}\alpha_{i_1}\int_a^b\frac{dx}{(\alpha_{i_1}-x)(\alpha_{p+1}-x)\ldots(\alpha_n-x)}+$$

$$+\frac{(-1)^{p-2}}{2}\sum_1^b{}_{i_1,i_2}\alpha_{i_1}\,.\,\alpha_{i_2}\int_a^b\frac{dx}{(\alpha_{i_1}-x)(\alpha_{i_2}-x)(\alpha_{p+1}-x)\ldots(\alpha_n-x)}+$$

$$+\ldots+\alpha_1\,.\,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\int_a^b\frac{dx}{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\ldots(\alpha_n-x)}. \tag{4. 12}$$

Mediante esta expresión de las integrales del tipo (4. 10) en función de otras del tipo (4. 4), la integral

$$\int_a^b\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}dx \tag{4. 13}$$

de la función racional dada, podrá expresarse en función de integrales del tipo (4. 4) a las que aplicando la fórmula (4. 6) encontrada tendremos resuelta la (4. 13).

Observaciones:

1ª. — La aplicación de este método es válida solamente cuando todas las raíces del denominador $\varphi(x)$ son simples, pues en el caso de que alguna fuese múltiple el determinante de Vandermonde que aparece en el denominador de la fórmula (4. 6) se anularía. En el caso de que el denominador $\varphi(x)$ de la fracción racional a integrar, tenga raíces múltiples, puede procederse, para resolver la integral, aplicando primero el método de Hermite y luego la fórmula (4. 6) en la forma indicada.

2ª. — La fórmula (4. 6) podría obtenerse elementalmente rehaciendo particularmente para el funcional lineal (4. 1) la demostración que sirvió para encontrar dicha (4. 6), válida para todo funcional lineal. Otra manera de llegar a ella, es la de transformar convenientemente el resultado obtenido en la integración de (4. 4) por el método de Lagrange.

3ª. — La integración indefinida de una función racional puede también resolverse mediante la fórmula (4. 6) sin más que poner x en lugar del límite superior b, pues, dicha sustitución transforma el funcional analítico n-lineal (4. 2) en un funcional mixto, al cual son aplicables las propiedades y relaciones existentes para los funcionales puros, al variar x en la región en que es regular la función definida por el funcional mixto.