CONVERGENCIA UNIFORME E INVERSION DE LAS INTEGRALES D EN EL CAMPO COMPLEJO ELIPTICO Y PARABOLICO

por

CELINA REPETTO

Buenos Aires

Los teoremas relativos a la convergencia simple y a la convergencia absoluta de las funciones D_λ, están expuestos en el excurso de Rey Pastor de 1916, donde se introdujeron tales expresiones, dando también las fórmulas de las abscisas correspondientes c y a; y demostrando la convergencia uniforme en un ángulo que tiene por vértice un punto de convergencia.

Prosiguiendo tal estudio establecemos los casos en que existe convergencia uniforme y consideramos luego la convergencia de funciones D_λ, de variable compleja parabólica, pues en ellas se presenta la particularidad de coincidir las abscisas de convergencia simple y uniforme.

En algunos de los teoremas que damos, la demostración es paralela a la ya conocida para la transformación ordinaria de Laplace e igualmente sencilla, a pesar de la doble generalización del tipo de integral y de la exponencial que figura en el integrando, resultando así, con el mismo esfuerzo, propiedades más generales que comprenden a aquellas ya conocidas como casos particulares de éstas. En otros teoremas la demostración exige nuevos artificios.

1. Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,A(r) \tag{1}$$

converge absolutamente para $r=r_0=x_0+iy_0$, converge también uniformemente en el semiplano $x \geqq x_0$.

2. Si $A(r)\downarrow 0$, es decir, si es decreciente desde un valor de r en adelante y converge a cero y además existe $\lambda(r)$ y es creciente desde otro valor de r en adelante, la integral converge uniformemente en el semiplano $x \geqq 0$, con exclusión de un entorno arbitrariamente pequeño del origen.

3. Si $A(r)\downarrow L>0$, es decir, si es decreciente desde un valor de r en adelante y converge a $L>0$, y además existe $\lambda'(r)$ creciente para $r \geqq R$, la integral converge uniformemente para $x>\sigma$, siendo σ positivo pero arbitrariamente pequeño.

4. Si $A(r)\downarrow 0$ para $r \longrightarrow \infty$, y son $A(r)$ y $\lambda(r)$ funciones continuas, la integral converge uniformemente para $x \geqq 0$.

5. Si $A(r) \longrightarrow L>0$ para $r \longrightarrow \infty$ cumpliéndose las demás condiciones del teorema anterior, la integral converge uniformemente para $x \geqq \sigma > 0$.

6. Si $A(r)$ y $\lambda(r)$ son derivables para $r>0$ y la (1) tiene un campo de convergencia uniforme (que en particular puede ser absoluta) siendo $\sigma > 0$ la abscisa de convergencia uniforme, si además $\lambda(r)$ es creciente para $y>K>0$, desde un $r \geqq R$ en adelante se verifica:

1º. Si $\sigma>0$ la integral (1) converge uniformemente para $x \geqq \sigma$.

2º. Si $\sigma=0$ y $A(r) \longrightarrow 0$ para $r \longrightarrow \infty$, la (1) converge uniformemente para $x \geqq 0$ con excepción a lo sumo de un entorno arbitrariamente pequeño del origen.

7. Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-x\lambda(r)}\, \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

converge uniformemente para $x \geqq \sigma > 0$, la integral (1) en que

$$A(r) = \int_0^r \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

también converge unifomemente para $x \geqq \sigma$ siempre que $|A(r)| < K$.

8. Si la

$$\int_0^\infty e^{-x\lambda(r)}\, a(r)\, d\lambda(r)$$

converge uniformemente para $x \geqq 0$ y la integral

$$A(r) = \int_0^r a(r)\, d\lambda(r) \longrightarrow 0$$

entonces la integral (1) también converge uniformemente para $x > 0$, con excepción de un pequeño entorno del origen.

9. Si $A(r) \uparrow 0$, es decir, es creciente desde un valor de r en adelante y converge hacia 0 y $A(0) \neq -\infty$, la integral

$$\int_0^\infty e^{-x\lambda(r)}\, A(r)\, d\lambda(r) \tag{1}$$

converge uniformemente en el semiplano $x \geqq 0$, con exclusión de un entorno arbitrariamente pequeño del origen.

10. Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-x\lambda(r)}\, a(r)\, dr$$

converge uniformemente para $x \geqq \sigma > 0$, y existe $\lambda'(r)$ tal que $k \leqq \lambda'(r) \leqq K$ la (1) converge también uniformemente para $x \geqq \sigma$, siendo $A(r) = \int_0^r a(r)\, dr$.

11. Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-x\lambda(r)}\, a(r)\, d\lambda(r)$$

converge uniformemente para $x \geqq \sigma > 0$, también converge uniformemente para $x \geqq \sigma > 0$, la integral (1), siendo:

$$A(r) = \int_0^r a(r)\, d\lambda(r)$$

y $k \leqq \lambda'(2) \leqq K$ y $\alpha(z)$ de variación acotada, de acuerdo con las condiciones de la hipótesis.

12. Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r)$$

converge uniformemente para $x \geqq \sigma > 0$, siendo:

$$\alpha(r) = o\left(e^{|\sigma|\lambda(r)}\right)$$

también converge uniformemente para $x \geqq \sigma > 0$ la integral

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, \alpha(r)\, d\,\lambda(r).$$

13. Dada la función

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r)$$

de variable compleja parabólica, la abscisa de convergencia uniforme coincide con la de convergencia simple.

14. Si la integral de variable z parabólica

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r)$$

converge en un punto z_0, converge uniformemente en el semiplano $R(z) \geqq R(z_0)$.

15. Dada la integral

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r)$$

que converge para $x > c$, donde $\lambda(r)$ es continua y estrictamente creciente $\lambda(0) = 0$; la función $\alpha(r)$ de variación acotada está texpresada así:

$$\alpha(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{e^{z\lambda(z)}f(z)}{z}\,dz \quad \text{para} \quad h > c.$$

16. Si la integral

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(z)}\,d\,\alpha(z)$$

donde $\lambda(z)$ es estrictamente creciente, converge para $x > c$, para todo $h > c$ se verifica que:

$$D_{r_0}^{-\rho} A(r_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)e^{\lambda(r_0)z}}{z^{\rho+1}}$$

para $r_0 > 0$ y $\rho < 0$ (¹).

17. Si $A(r)$ es una función de variación acotada en todo intervalo finito $0 \leqq r \leqq R$ y coincidente con $\psi(r)$ para $r \geqq K$ tal que $\psi(r)$ es analítica en la región $|r| \geqq K$ y se anula en el infinito, y $\lambda(r)$ es una función positiva infinitamente creciente, entonces la función

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\,d\,A(r)$$

es analítica en todo el plano cortado a lo largo del semi-eje real negativo.

18. Si $A(r)$ es una función acotada en el intervalo $(0; \infty)$, de variación acotada en cada intervalo finito, definida por la serie absolutamente convergente:

$$A(r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,\lambda(r) + b_n \operatorname{sen} n\,\lambda(r)$$

siendo $\lambda(r) > 0$ infinitamente creciente, la función

(¹) Usamos aquí el concepto de derivada de índice fraccionario de Riemann-Liouville. Sobre ellas pueden verse los trabajos recientes de Marchand, 1927 y Smith, 1941.

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\,d\,A(r)$$

tiene a lo sumo como puntos singulares en el plano, polos de primer orden en los puntos $\pm ni$.

19. Si la función $A(r)$ está definida por la serie:

$$A(r)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-k\,\lambda(r)} \quad (0 \leqq k_0 < k_1 < \ldots < k_n \rightarrow \infty)$$

absolutamente convergente para $r \geqq 0$ y $\lambda(r)$ es continua e infinitamente creciente, la función

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\,d\,A(z)$$

tiene a lo sumo polos de primer orden en los puntos $-k_0$; $-k_1$; ....