PROPIEDADES DE LA TRANSFORMACION D_λ

por

MARÍA ANGÉLICA FERRARI
(Buenos Aires)

Sobre la transformación de Laplace con integral de Riemann-Stieltjes existen algunos trabajos, especialmente de Wider, pero integrando por partes la integral se reduce a una de Riemann, por ser derivable el factor e^{-zr}. No sucede lo mismo con la generalización de Rey Pastor [1] que considera el factor $e^{-z\lambda(r)}$ donde $\lambda(r)$ puede no ser derivable, desarrollando así una teoría más general que comprende a las series de Dirichlet y que no es reducible a la clásica transformación de Laplace por mero cambio de variable, si no se imponen a $\lambda(r)$ condiciones restrictivas, que sólo excepcionalmente nos hemos visto obligados a suponer.

Por limitaciones de espacio nos limitamos a dar los enunciados de algunos de los teoremas demostrados en nuestra tesis doctoral, todavía inédita [2].

En todo el trabajo llamaremos «integral D_λ» a toda expresión del tipo

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,A(r) \tag{1}$$

siendo $\lambda(r)$ función real infinitamente creciente y $A(r)$ función real o compleja, con la condición de que la integral de Stieltjes sea convergente, en cuyo caso es $f(z)$ analítica y regular en el semiplano de convergencia.

1. Si en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, la integral D_λ converge absolutamente, está $f(z)$ acotada en el semiplano $R(z) \geqq x_0$.

---

(1) J. REY PASTOR, *Series e integrales D*, Madrid, 1926.

(2) *Teoría de las funciones D_λ*, Buenos Aires, 1942.

2. Si la integral D_λ converge uniformemente para $R(z) \geqq x_0$, $f(z)$ está acotada en el mismo semiplano.

3. Si la función regular $f(z)$, definida por la integral (1) de abscisa de convergencia c, se puede prolongar analíticamente en el semiplano $x \geqq \sigma$ $(\sigma \leqq c)$ y cumple las siguientes condiciones:

a) $|f(z)| \leqq M$ sobre $x = \sigma$,

b) $|f(z)| = 0$ $(e^{|y|^k})$ uniformemente para $x \geqq \sigma$, donde k es fijo pero arbitrariamente grande, (es decir, es de orden finito en las rectas verticales) entonces es $|f(z)| \leqq M$ en el semiplano $x \geqq \sigma$.

4. Si la función (1) está acotada sobre una recta interior al semiplano de convergencia, a la derecha de esta recta la función se mantiene menor que esa misma cota.

5. Si la integral (1) tiene un semiplano de acotación $(x \geqq \sigma)$ es $\log M(x)$ una función convexa de x.

6. Si $A(r)$ es real y creciente, en el semiplano de convergencia es $\log f(x)$ una función convexa.

7. Si $f(z)$ es una función analítica y nula en el infinito, y $\lambda(r)$ es continua o infinitamente creciente, es $f(z)$ del tipo (1) desde un x en adelante.

8. Una condición necesaria y suficiente para que la función definida por (1) sea analítica y nula en el infinito y tenga una singularidad en la circunferencia de radio $|z| = k$, es que $A(r)$, sea una función entera de orden unidad y tipo k $(k \geqq 0;\ k \neq \infty)$ con respecto a $\lambda(r)$, siendo $\lambda(r)$ estrictamente creciente.

9. Una condición necesaria y suficiente para que la función definida por (1) sea analítica en todo el plano, excepto en el origen, es que $A(r)$ sea una función entera y satisfaga la desigualdad

$$|A(r)| < e^{\varepsilon \lambda(r)}$$

para todo ε positivo.

10. Si

$$\text{(I)} \qquad f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\, A(r)$$

converge para $x > a_1$, y

(II) $$\phi(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, dB(r)$$

converge absolutamente para $x > a_2$, llámese:

$$\alpha_k = \alpha'_k + \alpha''_k i \quad \text{a los puntos singulares de } f(z)$$
$$\beta_i = \beta'_i + \beta''_i i \quad \text{a los puntos singulares de } \phi(z)$$

y

$$\gamma_l = \gamma'_l + \gamma''_l i$$

a los puntos obtenidos por la suma de puntos α_k con puntos β_i. Si todos estos puntos son aislados y además existe un número t tal que: las distancias entre las proyecciones de dos puntos α cualesquiera sobre los ejes es mayor que t, la distancia entre dos puntos β y entre dos puntos γ es también mayor que t, es decir, se satisfacen las condiciones:

(III) $$|\alpha'_k - \alpha'_l| > t, \ |\alpha''_k - \alpha''_l| > t,$$
$$|\beta_k - \beta_l| > t, \ |\gamma_k - \gamma_l| > t.$$

Si además para un número η arbitrariamente pequeño, existen μ y ν tales que

$$f(z) = 0\,(|y|^{\mu}) \quad \text{uniformemente para } |z - \beta_i| \geqq \eta$$

y

$$\phi(z) = 0\,(|y|^{\nu}) \quad \text{uniformemente para } |z - \beta_i| \geqq \eta;$$

entonces se verifica que la función:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} D_r^{-\rho} A(r)\, d\beta(r)$$

tiene a lo sumo singularidades, en los puntos β y $\alpha + \beta$; siendo $\rho > \mu + \nu$ y $\rho > \mu$.

11. Condición necesaria y suficiente para que una función $f(z)$ pueda ser desarrollada en una serie factorial convergente de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

es que sea una función D_λ tal que: $\lambda(r)$ continua y

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(e^{-\lambda(r)} - 1\right)^n$$

donde los coeficentes a_n cumplen la condición $|a_n| < n^k$ para algún valor de k y n suficientemente grande.

12. Sean infinitas funciones $f_n(x)$ continuas en el intervalo $(0; \infty)$. Si las series

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

y

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$$

convergen uniformemente para todo x, y $\varphi(x)$ es una función de variación acotada definida en $0 \leqq x < \infty$, tal que converja una de las dos expresiones siguientes:

(a) $$\int_0^{\infty} |d\,\varphi(x)| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|,$$

entonces se verifica:

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, d\,\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, d\,\varphi(x)$$

13. Si admitimos las mismas condiciones de hipótesis que en el teorema anterior con excepción que la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ hacia $f(x)$ y $\tilde{f}(x)$ respectivamente no sea uniforme, la conclusión de dicho teorema es igualmente válida.

14. Sea $f(z)$ una función meromorfa, tal que todos sus polos z_ν estén situados en el semiplano $R(z) < \sigma$ y desarrollable en la serie:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a_1^{(\nu)}}{z - z_\nu} + \ldots + \frac{a_{m\nu}^{(\nu)}}{(z - z_\nu)} \right)$$

(donde los $a_\mu^{(\nu)}$ son los residuos de las funciones $f(z)\,(z - z_\nu)^{\mu-1}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ en los polos z_ν).

Supongamos además que la serie:

$$A(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} + \ldots + a_{m\nu} \frac{\lambda(r)^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!}\right) e^{z_\nu \lambda(r)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(r)$$

sea uniformemente convergente, igual que la serie de los módulos correspondientes, en cada intervalo finito $0 < R_0 \leqq r \leqq R_1$, y que converja una de las dos expresiones siguientes:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma\lambda(r)} \sum_{\nu=0}^{\infty} |A_\nu(r)|\, d\lambda(r)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\sigma\lambda(r)} |A_\nu(r)|\, d\lambda(r).$$

Entonces para toda $\lambda(r)$ infinitamente creciente es $f(z)$ del tipo (1) para $R(z) \geqq \sigma$.

15. Si $A(r)$ es una función que puede expresarse en todo intervalo finito (R_0, R_1) mediante la serie

$$A(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} + \ldots + a_{m_\nu}^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!} \right] e^{z_\nu \lambda(r)}$$

que es uniformemente convergente, suponiendo que lo son:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_1^{(\nu)} e^{z_\nu \lambda(r)}; \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} e^{z_\nu \lambda(r)}; \quad \ldots$$

si además:

$$\text{(I)} \qquad \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_1^{(\nu)} e^{z_\nu \lambda(r)} z_\nu| \, d\lambda(r)$$

es convergente, entonces la $A(r)$ es una función de repartición de una función D_λ, definida por la serie convergente:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^{(\nu)} z}{z - z_\nu} + \frac{a_2^{(\nu)} z}{(z - z_\nu)^2} + \ldots + \frac{a_{m_\nu}^{(\nu)} z}{(z - z_\nu)^{m_\nu}} \right).$$

16. Si $f(z)$ es una función regular en todo el plano excepto los polos z_ν de orden m_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) situados todos en el semiplano $R(z) \lesssim \gamma$ y tal que:

$$\text{(I)} \qquad f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \, d\, A(r)$$

cumpliendo la condición necesaria para la inversión, de que sea estrictamente creciente, y, en consecuencia

$$A(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h - i\infty}^{h + i\infty} \frac{f(z)}{z} e^{z\lambda(r)} \, dz.$$

Si además existe un k fijo mayor que cero, de modo que: $|z^k f(z)|$ este acotado sobre los arcos $|z| = \rho_n$ ($n = 1, 2, \ldots$, $\rho_n \to \infty$), $R(z) \leqq \gamma$; entonces es:

$$A(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} + \ldots + a_{m_\nu}^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!} \right) \frac{e^{z_\nu \lambda(r)}}{z}$$

donde los $a_\mu^{(\nu)}$ son los coeficientes de las potencias de exponente negativo, del desarrollo de la serie de Laurent de $f(z)$ en el entorno de z_ν:

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{a_\mu^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^\mu} + \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu^{(\nu)} (z-z_\nu)^\mu$$

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2} \left[\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{a_\mu^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^\mu} + \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu^{(\nu)} (z-z_\nu)^\mu\right]$$

17. Si la función definida por (1) es regular en un punto de la recta de convergencia $R(z)=c$ $(c>0)$, la integral converge en dicho punto y la convergencia es uniforme en todo segmento de la recta $R(z)=c$ constituído por puntos de regularidad de la función.