ALGUNOS PROCEDIMIENTOS PARA LA SIMULACION DE MODELOS LINEALES EN TIEMPO DISCRETO BAJO PREVISION PERFECTA

CARLO GRAZIANI[1]

RESUMEN

En este trabajo se presentan y comparan algunos procedimientos, utilizados para simular modelos lineales en tiempo discreto bajo previsión perfecta. Partiendo de la forma estructural estándar del tipo de Buiter (1984) en tiempo discreto, se ob-tiene la forma reducida utilizada tanto por Blanchard y Kahn (1980) como por McKibbin y Sachs (1987, 1991). Seguidamente se presentan los procedimientos de simulación de estos autores y se efectúa una comparación. Luego se introduce la forma estructural modificada según King, Plosser y Rebelo (1990) y se presenta su procedimiento de simulación el que no es más que la aplicación de una solución del tipo de Blanchard y Kahn (1980) a la forma estructural modificada. Se con-cluye el trabajo ilustrando el uso y el alcance de los procedimientos expuestos por medio de algunos ejemplos sencillos, extraídos de la literatura macroeconómica conocida.

ABSTRACT

In this paper we present and compare several procedures for simulating discrete time linear models under perfect foresight. Starting from the standard structural form of the type of Buiter (1984) in discrete time, we obtain the reduced form which has been used by Blanchard and Kahn (1980) as

---

1 Universidad Católica del Uruguay (UCUDAL). Deseo agradecer los comentarios de Elvio Accinelli (Facultad de Ingeniería, Universidad de la República) que han sido muy útiles para la revisión del trabajo. Deseo dedicar este artículo a la memoria de Daniel Vaz con quien tuve el gusto de trabajar en el Banco Central del Uruguay y de estudiar luego en el programa de Posgrado en Economía del CEMA en Buenos Aires.

well as by McKibbin and Sachs (1987, 1991), and we present and compare the procedures of these authors. Then we introduce the modified structural form used by King, Plosser and Rebelo (1990) and present their simulation procedure which, in effect, is the application of a solution of the type of Blanchard and Kahn (1980) to the modified structural form. Finally we illustrate the use and scope of the different procedures on the basis of a few simple models, taken from the known macroeconomic literature.

I. INTRODUCCION

El estudio de un problema macroeconómico comporta a menudo la construcción de un modelo dinámico que, en el contexto de una formulación en tiempo discreto, puede muchas veces escribirse - por lo menos al cabo de algunas transformaciones - como un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden. En el caso de sistemas no lineales es frecuente la linealización en un entorno apropiado. Cuando el sistema de ecuaciones no supera el orden de dos y cuando se buscan sólo implicaciones cualitativas, se suele analizar el modelo en cuestión por medio de los métodos conocidos del análisis dinámico cualitativo [véase, por ejemplo, Azariadis (1993)]. Sin embargo, cuando el modelo es de orden superior o se busca obtener órdenes de magnitud cuantitativos para los efectos estudiados, es cada vez más común la utilización de la simulación numérica.

La resolución numérica de un modelo dinámico "tradicional" puede hacerse simplemente en forma recursiva, partiendo de los valores iniciales para todas las variables endógenas. En los modelos con expectativas racionales o - en un contexto determinístico - con previsión perfecta, sin embargo, existen valores iniciales únicamente para las variables de estado predeterminadas, obteniéndose, por otro lado, distintas sendas de ajuste dinámico, todas compatibles con el postulado de previsión perfecta, para distintos valores iniciales de las variables de estado no predeterminadas. Estas constituyen muchas veces las variables sobre las cuales los agentes económicos supuestamente forman sus expectativas de manera racional, es decir utilizando toda la información disponible relevante para el futuro. Sin embargo, en un modelo lineal bien especificado sólo una senda convergerá al equilibrio final, en tanto que todas las demás divergerán.

Haciendo referencia a una variante del principio de correspondencia de Samuelson, se supone generalmente que los sujetos económicos no poseen sólo previsión perfecta a corto plazo, sino también a largo plazo y que, en base a su comportamiento racional, eligen la senda convergente, descartando las demás sendas divergentes, ya que éstas implicarían un comportamiento de la economía poco creible a largo plazo. Este supuesto no implica, por tanto, otra cosa que la introducción de una condición de convergencia con respecto a las variables de estado no predeterminadas para suplir la falta de valores iniciales para estas variables. De esta manera, los valores corrientes de las variables no predetermi-nadas vienen a depender, en última instancia, de la evolución futura de las variables exógenas así como de la estructura del modelo, "saltando" ante una nueva información acerca de la evolución prevista para las variables exógenas.

Esta breve descripción sugiere que la resolución de un modelo bajo expecta-tivas racionales o previsión perfecta requiere de algoritmos específicos que tomen en cuenta los elementos expuestos. El propósito de este trabajo es presentar y comparar algunos procedimientos que se encuentran en la literatura para resolver modelos lineales bajo previsión perfecta.

El plan del trabajo es el siguiente. Partiendo de la forma estructural estándar del tipo de Austin y Buiter (1982) y Buiter (1984) en tiempo discreto, se obtendrá y caracterizará la forma reducida, utilizada tanto por Blanchard y Kahn (1980) como por McKibbin y Sachs (1987, 1991). Luego se presentarán los procedi-mientos de simulación de estos autores y se efectuará una comparación entre ellos. En la siguiente sección se introducirá la modificación del modelo estructural estándar según King, Plosser y Rebelo (1990) con su solución que no es más que la aplicación de una solución del tipo de Blanchard y Kahn (1980) a la forma estructural modificada. La penúltima sección contendrá algunos ejemplos sencillos para ilustrar el uso y alcance de los algoritmos expuestos. Algunas observaciones finales concluirán el trabajo.[2]

II. FORMAS ESTRUCTURAL Y REDUCIDA DEL MODELO

Considérese un modelo dinámico lineal, escrito en la siguiente forma estructural estándar:[3]

$$F_1 \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ {}_t y_{t+1} \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + F_3 v_t + F_4 z_t = 0 \tag{1}$$

2 Se ponen a disposición del lector interesado las rutinas escritas por el autor en el lenguaje MATLAB para simular numéricamente los modelos en cuestión.

3 Esta forma estructural es una adaptación al tiempo discreto de la forma estructural estándar introducida por Austin y Buiter (1982) y Buiter (1984) para el caso del tiempo continuo.

$$F_5 \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ {}_t y_{t+1} \end{pmatrix} + F_6 \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + F_7 v_t + F_8 z_t = 0 \tag{2}$$

siendo x = vector columna que contiene las n variables de estado predeterminadas, y = vector columna que contiene las m variables de estado no pre-determinadas ("variables que saltan"), v = vector columna que contiene las s variables endógenas de corto plazo, z = vector columna que contiene las q variables exógenas (o constantes) y t = tiempo. ${}_t y_{t+1}$ indica la expectativa de y para t+1, formada en base a la información acumulada hasta t. Debido al supuesto de previsión perfecta,

$$ {}_t y_{t+1} = y_{t+1} \tag{3}$$

Las matrices constantes F_1 a F_8 deben poseer las dimensiones $F_1 : (n+m) \times (n+m)$, $F_2 : (n+m) \times (n+m)$, $F_3 : (n+m) \times s$, $F_4 : (n+m) \times q$, $F_5 : s \times (n+m)$, $F_6 : s \times (n+m)$, $F_7 : s \times s$, $F_8 : s \times q$.

Partiendo de (1)-(3) se obtiene fácilmente la forma reducida:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + G z_t \tag{4}$$

$$v_t = R \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + S z_t \tag{5}$$

siendo

$$A = -(F_1 - F_3 F_7^{-1} F_5)^{-1} (F_2 - F_3 F_7^{-1} F_6) \tag{6}$$

$$G = -(F_1 - F_3 F_7^{-1} F_5)^{-1} (F_4 - F_3 F_7^{-1} F_8) \tag{7}$$

$$R = - F_7^{-1} (F_6 + F_5 A) \tag{8}$$

$$S = - F_7^{-1} (F_8 + F_5 G) \tag{9}$$

Obviamente, las matrices F_7 y $F_1 - F_3 F_7^{-1} F_5$ deben ser invertibles.

A los efectos de obtener una solución única para (4), se supondrá que la matriz A posee exactamente m raíces características *fuera* del círculo unitario. En efecto, Blanchard y Kahn (1980) demuestran que si el número de valores propios de A fuera del círculo unitario es igual al número de variables no predeterminadas, entonces el sistema de ecuaciones en diferencias (4) posee una solución única (véase su Proposición 1, pág. 1308).

En las secciones que siguen, se presentarán distintos procedimientos para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones en diferencias (4). Una vez que se poseen los valores para x_t , y_t , $t = 0, 1, ..., \tau$, se pueden calcular fácilmente los valores para v_t mediante la fórmula (5).

III. LA SOLUCION DE BLANCHARD Y KAHN

Siguiendo a los autores mencionados, el primer paso consiste en diagonalizar la matriz de transición A:

$$A = C^{-1}\, \Lambda\, C, \tag{10}$$

donde los elementos de la diagonal de $\mathbf{\Lambda}$ corresponden a los valores propios de A.[4] Multiplicando ambos lados del sistema (4) por C y definiendo las variables transformadas como

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \tag{11}$$

se encuentra:

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + C\,G\,z_t\,. \tag{12}$$

Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que los elementos de la diagonal de $\mathbf{\Lambda}$ estén ordenados en base a su valor absoluto, se puede particionar la matriz $\mathbf{\Lambda}$ en

4 En los casos en que la matriz A no puede ser diagonalizada, Blanchard y Kahn (1980) sugieren aplicar la descomposición de Jordan.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

donde $\mathbf{\Lambda_1}$ es una matriz de dimensión $n \times n$ cuyos elementos diagonales corresponden a las n raíces de A dentro o sobre del círculo unitario, y donde $\mathbf{\Lambda_2}$ es una matriz de dimensión $m \times m$ cuyos elementos diagonales corresponden a las m raíces fuera del círculo unitario. Particionando también las matrices C y G de acuerdo a

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

con las dimensiones $C_{11}: n \times n,\ C_{12}: n \times m,\ C_{21}: m \times n,\ C_{22}: m \times m,$ $G_1: n \times q,\ G_2: mxq,$ se puede reescribir el sistema (12) como:

$$X_{t+1} = \Lambda_1 X_t + (C_{11} G_1 + C_{12} G_2) z_t \tag{15}$$

$$Y_{t+1} = \Lambda_2 Y_t + (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_t \tag{16}$$

Mientras que (15) representa una ecuación matricial en diferencias estable o estable "en el borde",[5] debido a que las raíces características contenidas en $\mathbf{\Lambda_1}$ son inferiores o a lo sumo iguales a la unidad en términos absolutos, la ecuación (16) explota, a menos que se cumpla la condición

$$Y_t = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21} G_1 + C_{22} G_2 \right) z_{t+j} \tag{17}$$

que se obtiene resolviendo la ecuación (16) hacia adelante e imponiendo la convergencia a largo plazo, descartando de esta manera todas las sendas de ajuste divergentes o inestables.[6] Esta expresión muestra que - al cumplirse la condición de convergencia a largo plazo - los valores transformados de las variables de estado no predeterminadas dependen únicamente de la evolución futura de las variables exógenas así como de la estructura del modelo.

5 Esta última terminología ha sido traducida de Blanchard y Kahn (1980).

6 Véase el Apéndice.

Partiendo de las expresiones (15) y (17), invirtiendo el cambio de variables de (11) de acuerdo a

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \qquad (18)$$

y eligiendo $t = 0$ como período inicial para la simulación, se encuentra finalmente:[7]

$$x_t = x_0 \,, \quad \text{para } t = 0, \qquad (19)$$

$$x_t = B_{11}\,\Lambda_1\,B_{11}^{-1}\,x_{t-1} + G_1\,x_{t-1} -$$

$$- A_{12}\,C_{22}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21}\,G_1 + C_{22}\,G_2 \right) z_{t-1+j} \,, \quad \text{para t} > 0,$$

$$y_t = - C_{22}^{-1}\,C_{21}\,x_t -$$

$$- C_{22}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21}\,G_1 + C_{22}\,G_2 \right) z_{t+j} \,, \quad \text{para t} \geq 0, \qquad (20)$$

siendo $A_{12} = B_{11}\,\Lambda_1\,C_{12} + B_{12}\,\Lambda_2\,C_{22}$.

Haciendo directamente uso de las expresiones (19) y (20), se obtiene la rutina original de Blanchard y Kahn (1980), resumida también en Blanchard (1980), para la simulación de los modelos que se pueden escribir en la forma estándar (1)-(2) y que cumplen las condiciones mencionadas.[8]

---

7 Los detalles de la derivación son bastante trabajosos y se encuentran explicitados en el Apéndice.

8 En su implementación de este algoritmo, Blanchard (1980) consideró en las sumas contenidas en (19) y (20) nada más (!) que los efectos de las variables exógenas de los 200 períodos futuros. Alternativamente, se pueden considerar en las sumatorias sólo el número de sumandos necesario para obtener el resultado con una precisión preestablecida.

Alternativamente, se pueden calcular primero los valores de las variables transformadas X_t, Y_t, $t = 0, 1, \ldots, \tau$, en base a las expresiones (15) y (17), obteniendo el valor inicial de X para el período $t = 0$, es decir X_0, a partir de

$$X_0 = C_{12} C_{22}^{-1} Y_0 + (C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21})\, x_0 \ , \tag{21}$$

que surge de (11), haciendo uso de (14),[9] y efectuar después la transformación a las variables originales en base a (18). En las simulaciones numéricas de los modelos ilustrativos, que se presentarán más adelante, la rutina que incorpora este procedimiento modificado, ejecuta aproximadamente la mitad de las operaciones en comparación con la rutina que se basa en la solución (19)-(20). La rutina modificada resulta ser, por tanto, bastante más rápida que la original.

IV. LA SOLUCIÓN DE MCKIBBIN Y SACHS

A continuación se presentará la solución básica de McKibbin y Sachs [véanse McKibbin (1987) y McKibbin y Sachs (1991, Apéndice C)] que constituye un procedimiento iterativo que resuelve el modelo desde atrás. La derivación que sigue, parte de la forma reducida (4) que se reescribe, particionando las matrices A y G,

$$x_{t+1} = A_{11}\, x_t + A_{12}\, y_t + G_1\, z_t \tag{22}$$

$$y_{t+1} = A_{21}\, x_t + A_{22}\, y_t + G_2\, z_t \tag{23}$$

Se presupone, además, que el modelo que se desea simular, posee un estado estacionario *constante*,[10] es decir que en el largo plazo las variables endógenas tienden hacia sus valores de equilibrio de largo plazo, constantes en el tiempo. Obviamente, este requerimiento impone también restricciones sobre la evolución admitida para las variables exógenas.

9 Véase el Apéndice.

10 En Graziani (1999) se presentan dos generalizaciones de este procedimiento, una de las cuales se refiere al caso de modelos cuyas variables endógenas crecen o decrecen linealmente a lo largo de la senda de equilibrio de largo plazo.

El primer paso consiste en elegir un período T suficientemente lejano que permita suponer que las variables de estado se hayan estabilizado aproximadamente.[11] Aplicando esta condición de estacionariedad a largo plazo, en particular, a las variables de estado no predeterminadas, se tendrá:

$$y_{T+1} = y_T \tag{24}$$

Esta restricción constituye la condición de convergencia, en el ámbito del procedimiento básico de McKibbin y Sachs, que viene a suplir la falta de valores iniciales para las variables de estado no predeterminadas.

Introduciendo esta condición en la ecuación (23), escrita para $t = T$, se obtiene:

$$y_T = A_{21}\ x_T + A_{22}\ y_T + G_2\ z_T \tag{25}$$

La solución es

$$y_T = \Theta_{1,T}\ x_T + \Theta_{2,T}\ z_T \tag{26}$$

con

$$\Theta_{1,T} = (\ I_m - A_{22}\ )^{-1}\ A_{21} \tag{27}$$

$$\Theta_{2,T} = (\ I_m - A_{22}\ )^{-1}\ G_2 \tag{28}$$

siendo I_m la matriz de identidad de dimensión $m \times m$ y suponiendo que la matriz ($I_{m\ -}\,A_{22}$) pueda ser invertida.

Sustituyendo x_T en (26) por la expresión (22) correspondiente a $t = T - 1$ e igualando el resultado a la expresión (23) para $t = T - 1$, se obtiene:

11 En los casos de duda es preferible elegir un T más elevado. Otra opción (que se puede facilmente incorporar en la rutina de simulación) consiste en incrementar sucesivamente el valor de T hasta que los resultados de simulación se modifiquen en menos que un nivel de tolerancia preestablecido.

$$y_T = \Theta_{1,T}\ (A_{11}\ x_{T-1} + A_{12}\ y_{T-1} + G_1\ z_{T-1}) + \Theta_{2,T}\ z_T$$

$$= A_{21}\ x_{T-1} + A_{22}\ y_{T-1} + G_2\ z_{T-1} \tag{29}$$

Resolviendo esta ecuación según y_{T-1} , se encuentra:

$$y_{T-1} = \Theta_{1,T-1}\ x_{T-1} + \Theta_{2,T-1}\ z_{T-1} + K_{T-1} \tag{30}$$

siendo

$$\Theta_{1,T-1} = (A_{22} - \Theta_{1,T}\ A_{12})^{-1} (\Theta_{1,T}\ A_{11} - A_{21}) \tag{31}$$

$$\Theta_{2,T-1} = (A_{22} - \Theta_{1,T}\ A_{12})^{-1} (\Theta_{1,T}\ G_1 - G_2) \tag{32}$$

$$K_{T-1} = (A_{22} - \Theta_{1,T}\ A_{12})^{-1}\ \Theta_{2,T}\ z_T \tag{33}$$

y suponiendo que $(A_{22} - \Theta_{1,T}\ A_{12})$ pueda ser invertida.

Sustituyendo luego x_{T-1} en (30) por la expresión (22) correspondiente a $t = T - 2$ e igualando el resultado a la expresión (23) para $t = T - 2$, se obtiene de manera análoga:

$$y_{T-2} = \Theta_{1,T-2}\ x_{T-2} + \Theta_{2,T-2}\ z_{T-2} + K_{T-2} \tag{34}$$

siendo

$$\Theta_{1,T-2} = (A_{22} - \Theta_{1,T-1}\ A_{12})^{-1} (\Theta_{1,T-1}\ A_{11} - A_{21}) \tag{35}$$

$$\Theta_{2,T-2} = (A_{22} - \Theta_{1,T-1}\ A_{12})^{-1} (\Theta_{1,T-1}\ G_1 - G_2) \tag{36}$$

$$K_{T-2} = (A_{22} - \Theta_{1,T-1}\ A_{12})^{-1} (\Theta_{2,T-1}\ z_{T-1} + K_{T-1}) \tag{37}$$

y suponiendo que $(A_{22} - \Theta_{1,T}\ A_{12})$ pueda ser invertida.

Continuando este procedimiento, las matrices $\Theta_{1,i}$ y $\Theta_{2,i}$ se aproximan a las matrices constantes Θ_1 y Θ_2, respectivamente.[12] Al mismo tiempo, se genera la secuencia de vectores $K_0, K_1, \ldots, K_{T-2}, K_{T-1}$ que capta el efecto de los valores futuros de las variables exógenas sobre las variables endógenas no predetermi-nadas, y_t ,correspondiente a cada período.

A esta altura es fácil calcular los valores de x_t e y_t a lo largo de todo el período de simulación que se supone va desde $t = 0$ hasta $t = t < T$. Habiendo encontrado un valor de T, suficientemente elevado, tal que las matrices $\Theta_{1,i}$ y $\Theta_{2,i}$ converjan, es decir se vuelvan independientes de T (en base a un criterio apropiado),[13] se obtiene el valor inicial de las variables de estado no predeterminadas, y_0 , mediante la fórmula

$$y_0 = \Theta_1 x_0 + \Theta_2 z_0 + K_0 \ . \tag{38}$$

Los valores correspondientes a los períodos sucesivos $(1 \leq t \leq \tau)$ se calculan en base a

$$x_t = A_{11} x_{t-1} + A_{12} y_{t-1} + G_1 z_t \tag{39}$$

$$y_t = \Theta_1 x_t + \Theta_2 z_t + K_t \tag{40}$$

Nótese que las matrices constantes Θ_1 y Θ_2 no dependen de la secuencia de variables exógenas, contenidas en z. Por lo tanto, cuando se desean estudiar los efectos de distintas secuencias de shocks en el ámbito de un mismo modelo, basta calcular Θ_1 y Θ_2 una sóla vez, teniendo que recalcular únicamente los vectores K_t ,$t = 0, 1, \ldots, \tau$, para cada experimento adicional.

---

12 En una comunicación privada, Warwick McKibbin me hace saber que no conoce ninguna prueba de convergencia general para ello. Sin embargo, me dice que están aplicando el algoritmo para resolver modelos con hasta 7000 ecuaciones y casi 200 variables que saltan, sin tener problemas de convergencia, salvo en los casos de modelos mal especificados.

13 Véase McKibbin y Sachs (1991, pág. 262). A modo de ejemplo vale la pena mencionar que, en la mayoría de las simulaciones numéricas sobre la base de los modelos ilustrativos - supuestamente sencillos - que se presentarán más adelante, alcanzaron valores de T de dos dígitos.

V. COMPARACION

Antes de presentar el tercer procedimiento que parte de una forma estructural estándar modificada, conviene intentar una comparación de los dos procedimientos expuestos. Reescribiendo la solución (20) de Blanchard y Kahn como

$$y_t = - C_{22}^{-1} C_{21} x_t - C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) \; z_t$$

$$- C_{22}^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \Big(C_{21} \; G_1 + C_{22} \; G_2 \Big) \; z_{t+j} \tag{41}$$

y comparándola con la solución (40) de McKibbin y Sachs, se observa que ambas expresiones proporcionan el mismo resultado para todo t si y sólo si

$$\Theta_1 = - C_{22}^{-1} C_{21} \tag{42}$$

$$\Theta_2 = - C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) \tag{43}$$

$$K_t = - C_{22}^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \Big(C_{21} \; G_1 + C_{22} \; G_2 \Big) \; z_{t+j} \tag{44}$$

A continuación se considerarán estas condiciones una a una.[14]

Aun cuando no se logró encontrar una demostración general, se puede establecer numéricamente que, partiendo de una matriz A real, cuadrada, diagonalizable, de dimensión $(n + m) \times (n + m)$ con m autovalores fuera del círculo unitario, la matriz $\Theta_1^{(i)}$ que se obtiene por medio de la fórmula recursiva

$$\Theta_1^{(i)} = (A_{22} - \Theta_1^{(i-1)} A_{12})^{-1} (\Theta_1^{(i-1)} A_{11} - A_{21}) \; , \tag{45}$$

14 Los detalles de las derivaciones que siguen, se encuentran en el Apéndice.

partiendo de cualquier matriz $\Theta_1^{(0)}$ real de dimensión m n, tal que $A_{22} - \Theta_1^{(0)} A_{12} \neq 0$, converge hacia $\Theta_1 = -C_{22}^{-1} C_{21}$, siempre y cuando C_{22}^{-1} existe. Obsérvese que (45) coincide con la fórmula recursiva para obtener la matriz Θ_1 en el marco del procedimiento de McKibbin y Sachs. Lo que sí puede mostrarse es que (42) resuelve la ecuación "final"

$$\Theta_1 = (A_{22} - \Theta_1 A_{12})^{-1} (\Theta_1 A_{11} - A_{21}) \ . \tag{46}$$

Introduciendo la (42) en la expresión

$$\Theta_2 = (A_{22} - \Theta_1 A_{12})^{-1} (\Theta_1 G_1 - G_2) \ , \tag{47}$$

que corresponde a la expresión "final" de la fórmula recursiva para la obtención de la matriz Θ_2 en el ámbito del procedimiento de McKibbin y Sachs, se logra confirmar la condición (43).

Haciendo finalmente uso de (42) y (43) en la expresión

$$K_t = (A_{22} - \Theta_1 A_{12})^{-1} (\Theta_2 z_{t+1} + K_{t+1}) \tag{48}$$

para la generación de la secuencia de vectores K_i, se obtiene por medio de sustituciones sucesivas

$$K_t = - C_{22}^{-1} \sum_{j=1}^{T} \Lambda_2^{-1-j} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_{t+j} +$$

$$+ C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-T} C_{22} K_{t+T} \ . \tag{49}$$

Tomando el límite para $T -> \infty$ y considerando que

$$\lim_{T \to \infty} C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-T} C_{22} K_{t+T} = 0 \ , \tag{50}$$

se confirma también la expresión (44).

Pasando a algunos aspectos de aplicación, se observa que el procedimiento de Blanchard y Kahn tiene - entre otras - la ventaja de no requerir que el equilibrio a largo plazo sea constante. El procedimiento de McKibbin y Sachs, en cambio, es aplicable en la versión expuesta sólo a modelos que poseen un equilibrio a largo plazo constante, además de requerir que se cumplan determinadas condiciones de convertibilidad cruciales. Sin embargo, en los casos de modelos que se pueden considerar medianos o grandes y en los que se cumplen las mencionadas condiciones, este procedimiento ejecuta un número de operaciones muy inferior que el procedimiento de Blanchard y Kahn, resultando, por tanto, significativamente más rápido.

VI. EL PROCEDIMIENTO DE KING, PLOSSER Y REBELO

Considérese ahora la siguiente forma estructural utilizada por King, Plosser y Rebelo (1990):

$$M_{11}\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} + M_{12}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = M_{13}\, v_{t+1} + M_{14}\, v_t + M_{15}\, z_{t+1} + M_{16}\, z_t \tag{51}$$

$$M_{21}\, v_t = M_{22}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + M_{23}\, z_t \tag{52}$$

Al establecer esta forma estructural, partiendo del modelo de crecimiento óptimo estándar, empleado en la teoría de los ciclos reales, King, Plosser y Rebelo identifican las variables v_t con las variables de control, las variables x_t con las variables de estado endógenas o controladas, las variables y_t con las variables de co-estado y las variables z_t con las variables de estado exógenas o no controladas.

Las matrices constantes deben poseer las dimension $M_{11}:(n+m)\times(n+m)$, $M_{12}:(n+m)\times(n+m)$, $M_{13}:(n+m)\times s$, $M_{14}:(n+m)\times s$, $M_{15}:(n+m)\times q$, $M_{16}:(n+m)\times q$, $M_{21}: s\, xs$, $M_{22}: s\times(n+m)$, $M_{23}: s\, xq$.

La forma reducida de (51)-(52) está dada por:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + G\, z_{t+1} + H\, z_t \tag{53}$$

$$v_t = R \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + S\, z_t \ , \tag{54}$$

siendo:

$$A = -(M_{11} - M_{13} M_{21}^{-1} M_{22})^{-1} (M_{12} - M_{14} M_{21}^{-1} M_{22}) \tag{55}$$

$$G = (M_{11} - M_{13} M_{21}^{-1} M_{22})^{-1} (M_{15} + M_{13} M_{21}^{-1} M_{23}) \tag{56}$$

$$H = (M_{11} - M_{13} M_{21}^{-1} M_{22})^{-1} (M_{16} + M_{14} M_{21}^{-1} M_{23}) \tag{57}$$

$$R = M_{21}^{-1} M_{22} \tag{58}$$

$$S = M_{21}^{-1} M_{23} \tag{59}$$

Obviamente, las matrices M_{21} y $M_{11} - M_{13} M_{21}^{-1} M_{22}$ deben ser invertibles.

Antes de pasar a la solución de King, Plosser y Rebelo, vale la pena comparar brevemente las formas estructurales y reducidas de esta sección con las de la sección 2. Es fácil ver que la forma estructural (51)-(52) tiene cierte semejanza con la forma estructural (1)-(2), por lo que cabe preguntarse si es posible escribir un modelo determinado en cualquiera de las dos formas estructurales. Efectivamente, si la matriz F_1 es invertible, la forma estructural (1)-(2) puede ser transformada en la forma estructural (51)-(52) con $M_{11} = F_1$, $M_{12} = F_2$, $M_{13} = 0$, $M_{14} = -F_3$, $M_{15} = 0$, $M_{16} = -F_4$, $M_{21} = F_7 - F_5 F_1^{-1} F_3$, $M_{22} = -(F_6 - F_5 F_1^{-1} F_2)$, $M_{23} = -(F_8 - F_5 F_1^{-1} F_4)$. Por otro lado, si la matriz es invertible, también es posible pasar de la forma estructural (51)-(52) a la forma estructural (1)-(2), redefiniendo el vector de variables exógenas como $3' = (zF'\ z')$, siendo $zF_t = z_{t+1}$. En este case se tendrá $F_1 = M_{11} - M_{13} M_{21}^{-1} M_{22}$, $F_2 = M_{12}$, $F_3 = -M_{14}$, $F_4 = -(M_{15} + M_{13} M_{21}^{-1} M_{23}\ M_{16})$, $F_5 = 0$, $F_6 = -M_{22}$, $F_7 = M_{21}$, $F_8 = -(0\ M_{23})$. Una comparación de las formas reducidas revela que la forma (4)-(5) es un caso particular de la forma (53)-(54) y que, por otro lado, ésta última puede ser reescrita en la forma de (4)-(5), haciendo uso de la mencionada redefinición del vector de variables exógenas.

A continuación nos concentraremos en la solución de la ecuación matricial en diferencias (53). Como se verá, el procedimiento de solución que emplean King, Plosser y Rebelo (1990), sigue básicamente el de Blanchard y Kahn (1980) en su versión alternativa, por lo que nos limitaremos a señalar los principales pasos sin detenernos en los detalles. Una vez obtenidos los valores de x_t , y_t , $t = 0, 1, \ldots, \tau$, se pueden calcular fácilmente los valores para mediante la fórmula (54). Debido a la semejanza entre los dos procedimientos, la elección entre ellos es básicamente una cuestión de conveniencia, en particular de facilidad para llevar el modelo a la forma estructural correspondiente.

Aplicando la transformación de variables (11), se obtiene:

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + C\,G\,z_{t+1} + C\,H\,z_t , \tag{60}$$

que, bajo las condiciones explicitadas más arriba, se puede reescribir como:

$$X_{t+1} = \Lambda_1 X_t + (C_{11} G_1 + C_{12} G_2)\, z_{t+1} + (C_{11} H_1 + C_{12} H_2)\, z_t \tag{61}$$

$$Y_{t+1} = \Lambda_2 Y_t + (C_{21} G_1 + C_{22} G_2)\, z_{t+1} + (C_{21} H_1 + C_{22} H_2)\, z_t \tag{62}$$

Nuevamente observamos que, mientras que (61) es una ecuación en diferencias estable o estable "en el borde", la ecuación (62) explota, a menos que se cumpla la condición:[15]

15 Esta condición se obtiene de una manera análoga a la (17).

$$Y_t = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_{t+1+j}$$

$$-\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} (C_{21} H_1 + C_{22} H_2) z_{t+j} \ . \qquad (63)$$

La simulación del modelo se ajusta a las pautas indicadas más arriba. Los valores de $Y_t \quad ,t = 0,1,...,\tau,$ se generan con la ayuda de la expresión (63) y, una vez encontrado el valor inicial para X_0 en base a (21), se calculan los valores de $X_t \quad ,t = 1,...,\tau,$ por medio de (61). Aplicando finalmente la transformacion (18), se obtienen las sendas dinámicas de las variables originales del modelo.

VII. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

En esta sección se discutirán algunos modelos, extraídos de la literatura macro-económica conocida, para ilustrar el uso y el alcance de los procedimientos de simulación expuestos. Para este fin, se eligieron dos modelos particularmente sencillos a los cuales no se suele aplicar la simulación numérica, además de un modelo mediano como el contenido en Blanchard (1980). Entre los trabajos de mayor alcance que emplean alguno de los procedimientos presentados, vale la pena mencionar Rebelo y Végh (1996) que estudian los efectos reales de los planes de estabilización basados en el tipo de cambio, y McKibbin y Sachs (1991) que investigan la transmisión internacional de shocks y cambios de políticas en el ámbito de un modelo de la economía mundial en el que se modelan las interacciones entre varios países o regiones importantes.

VII.1. EL MODELO DE DORNBUSCH

La primera ilustración se hace en base al conocido modelo del sobrepasamiento del tipo de cambio de Dornbusch (1976) y se discutirán dos versiones en tiempo discreto que se distinguen en la especificación temporal de la dinámica de precios.

Consideraremos primero la siguiente versión sencilla del modelo:

$$m_t - p_t = \kappa - \lambda i_t \tag{64}$$

$$i_t = i^* + e_{t+1} - e_t \tag{65}$$

$$p_t - p_{t-1} = \alpha(d_t - \bar{q}) \tag{66}$$

$$d_t = \delta_0 + \delta_1(e_t - p_t) \tag{67}$$

donde d = demanda agregada, e = tipo de cambio nominal, i = tasa de interés doméstica nominal, i^* = tasa de interés internacional nominal, m = cantidad de dinero nominal, p = nivel de precios doméstico, q = producto potencial, t = variable tiempo. Todas las variables son en logaritmos, excepto las tasas de interés. Los coeficientes se escriben con letras griegas y los coeficientes de pendiente son definidos como positivos.

Para llevar esta versión del modelo a la forma estructural estándar (1)-(3), se sigue el ejemplo de Blanchard (1980), introduciendo la nueva variable,

$$p1_{t+1} = p_t \ , \tag{68}$$

y reescribiendo luego la ecuación (66) como

$$p1_{t+1} - p1_t = \alpha(d_t - \bar{q}) \ . \tag{69}$$

Utilizando las ecuaciones (69), (65), (68), (67) y (64) en el orden indicado, se obtiene la forma estructural estándar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p1_{t+1} \\ e_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p1_t \\ e_t \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_t \\ d_t \\ i_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\bar{q} & 0 \\ i^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m_t \end{pmatrix} = 0 \tag{70}$$

En base a los supuestos del modelo, el nivel de precios es la variable de estado predeterminada, el tipo de cambio es la variable de estado no predeterminada, la demanda agregada y la tasa de interés son las variables endógenas de corto plazo y la cantidad de dinero es la variable exógena, habiendo definido las constantes como múltiplos de uno. Tomando en cuenta la variable adicional, introducida en (68), tenemos $x_t = p1_t$, $y_t = e_t$, $v_t = [\ p_t \ \ d_t \ \ i_t\ ]'$ y $z_t = [\ 1 \ \ m_t\ ]'$.

En esta versión, el modelo de Dornbusch puede ser simulado tanto con el procedimiento de Blanchard y Kahn como con el de McKibbin y Sachs. Para ello

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p1_{t+1} \\ e_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p1_t \\ e_t \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t \\ d_t \\ i_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\delta_0 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m_t \end{pmatrix} = 0 \qquad (71)$$

basta ingresar las matrices de la forma estructural, F_1 a F_8, los valores iniciales de las variables predeterminadas, x_0, el período de simulación, el horizonte temporal y los valores de las variables exógenas, z_t. Finalmente, el mismo modelo también puede ser simulado por medio del procedimiento de King, Plosser y Rebelo.

Considérese ahora una versión levemente modificada que contiene una formalización distinta de la dinámica de precios, dada por:

$$p_{t+1} - p_t = \alpha(d_t - \bar{q}\ ) \ . \qquad (72)$$

El modelo compuesto por las ecuaciones (72), (65), (67) y (64) puede escribirse directamente en la forma estructural estándar (1)-(3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{t+1} \\ e_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_t \\ e_t \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_t \\ i_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\bar{q} & 0 \\ i^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m_t \end{pmatrix} = 0 \tag{73}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{t+1} \\ e_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 & -\delta_1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_t \\ e_t \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_t \\ i_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta_0 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m_t \end{pmatrix} = 0 \tag{74}$$

En esta versión, el modelo puede ser simulado por medio de los procedimientos de Blanchard y Kahn y de King, Plosser y Rebelo. Sin embargo, se puede mostrar en base a la forma reducida que no puede ser simulado por medio del procedimiento de McKibbin y Sachs, en la versión expuesta en el presente trabajo, al no cumplirse la condición de invertibilidad de la matriz $(I_m - A_{22})$.

VII.2. EL MODELO DE BLANCHARD

La segunda ilustración se basa en un modelo utilizado por Blanchard (1980) en un estudio sobre las consecuencias del supuesto de expectativas racionales o previsión perfecta para la dinámica de los efectos de la política monetaria sobre la economía real. Concretamente, Blanchard investiga los efectos dinámicos de una reducción en la cantidad de dinero del 5 % en el ámbito de un modelo estructural, parcial-mente estimado en base a datos trimestrales de Estados Unidos para 1953-1976. En una primera versión parcial del modelo, Blanchard supone que el nivel de precios mantiene su crecimiento constante del 1 % trimestral, tasa a la cual ya venía creciendo antes de la medida restrictiva. En cambio, en la versión más amplia del modelo se permite un ajuste endógeno del nivel de precios.[16]

En su forma linealizada y después de efectuar alguna sustitución menor, la primera versión del modelo puede ser escrita en términos de las siguientes ecuaciones:

$$y_t = \zeta_0 + \zeta_1 y_{t-1} + \zeta_2 h_t + \zeta_3 q_t + \zeta_4 q_{t-1} + \zeta_5 q_{t-2} + \zeta_6 q_{t-3} \quad (75)$$

$$m_t - p_t = \lambda_0 + \lambda_1 (m_{t-1} - p_{t-1}) + \lambda_2 y_t + \lambda_3 i_t \quad (76)$$

$$r_t = i_t - 4 (p_{t+1} - p_t) \quad (77)$$

$$q_t = \omega_0 + \omega_1 (q_{t+1} - q_t) + \omega_2 \pi_t + \omega_3 r_t \quad (78)$$

$$\pi_t = \rho_0 + \rho_1 y_t + \rho_2 y_{t-1} + \rho_3 y_{t-2} \quad (79)$$

$$h_t = \eta_0 + \eta_1 (h_{t+1} - h_t) + \eta_2 y_t + \eta_3 r_t \quad (80)$$

donde h = valor real (sombra) de una unidad de mano de obra (en unidades de eficiencia), i = tasa de interés nominal de corto plazo, m = logaritmo de la cantidad de dinero nominal, p = logaritmo del nivel de precios, q = valor real de una acción que representa una unidad de capital físico, r = tasa de interés real de corto plazo (ex ante), t = tiempo, y = producto real, π = ganancias reales. Los stocks y flujos son definidos en forma intensiva, es decir por unidad de capital físico.

Antes de pasar las transformaciones que permiten llevar el modelo a la forma (1)-(3), vale la pena dar algunas explicaciones intuitivas sobre cada una de las ecuaciones. La expresión (75) caracteriza el equilibrio en el mercado de bienes. El producto depende - además del efecto rezagado de la misma variable - básicamente de la riqueza humana (human wealth), representada por h, y del valor del capital real, representado por q. La ecuación (76) es una demanda de dinero dinámica, en tanto que la ecuación (77) define la tasa de interés real ex ante. La tasa de inflación esperada

16 Blanchard (1981) contiene una formalización sencilla del mismo modelo en tiempo continuo.

$(p_{t+1} - p_t)$ aparece multiplicada por 4 por tratarse de una tasa trimestral, mientras que las tasas de interés son anuales. La ecuación (78) se deriva de la condición de arbitraje entre las acciones y los bonos de corto plazo

$$\frac{\pi_t}{q_t} + 4\,\frac{q_{t+1} - q_t}{q_t} = r_t + \beta \ , \tag{81}$$

siendo β = prima de riesgo entre las acciones y los bonos de corto plazo. Reescribiendo la (81) como

$$q_t = \frac{1}{r_t + \beta}\left(4(q_{t+1} - q_t) + 1.04\,\pi_t \right) \tag{82}$$

y linealizando la (82), se obtiene la expresión (78).[17] La (79) relaciona las ganancias con el producto real. La ecuación (80) se deriva, partiendo de la definición de la riqueza humana como valor presente de los ingresos de trabajo corriente y futuros que, bajo el supuesto de expectativas racionales e utilizando la misma tasa de descuento del mercado de acciones, puede ser escrita como una condición de arbitraje del tipo de (81). Siguiendo los mismos pasos como en la derivación de la (78), se obtiene finalmente la expresión (80).

Efectuando ahora las sustituciones $y_t = y1_{t+1}$, $y_{t-1} = y1_t$, $y_{t-2} = y2_t$, $q_{t-1} = q1_t$, $q_{t-2} = q2_t$ y $q_{t-3} = q3_t$ y agregando las relaciones $y2_{t+1} = y1_t$, $q1_{t+1} = q_t$, $q2_{t+1} = q1_t$ y $q3_{t+1} = q2_t$, es posible escribir el modelo en la forma estructural estándar (1)-(3) en términos de los vectores $x' = \left(y1 \ \ y2 \ \ q1 \ \ q2 \ \ q3 \right)$, $y' = \left(h \ \ q \right)$, $v' = \left(i \ \ r \ \ \pi \right)$, $z' = \left(1 \ \ (m-p) \ \ (m-p)_{-1} \right)$. Las matrices F_1 a F_8 tendrán las dimensiones $F_1 : 7\times7$, $F_2 : 7\times7$, $F_3 : 7\times3$, $F_4 : 7\times3$, $F_5 : 3\times7$, $F_6 : 3\times7$, $F_7 : 3\times3$, $F_8 : 3\times3$.[18] Como se dijo más arriba, en esta primera versión Blanchard supone que el nivel de precios sigue creciendo a la tasa constante a la que venía creciendo antes de la restricción monetaria por lo que la tasa de inflación $(p_{t+1} - p_t)$ es tratada como constante (igual a 0.01). Por su parte, la cantidad de dinero se reduce en un 5 % en forma tanto no preanunciada como preanunciada, según el

17 El coeficiente 1.04 que multiplica π_t constituye una pequeña corrección, utilizada por Blanchard (1980), para hacer compatibles las series de q_t y π_t.

18 Los detalles de la forma estructural estándar están a disposición de los lectores interesados.

experimento bajo consideración. De esta forma, la cantidad de dinero real $(m - p)_t$ es tradada como variable exógena que experimenta una caída del 5 % en el período correspondiente a la implementación de la restricción monetaria.

Esta versión del modelo puede ser simulada por medio de los tres procedimientos expuestos. En particular, vale la pena de mencionar que la simulación por medio del procedimiento de McKibbin y Sachs resulta significativamente más rápida que la simulación por medio de los otros dos procedimientos.

La versión completa del modelo de Blanchard (1980) contiene, además de las ecuaciones (75)-(80), las ecuaciones relativas a la dinámica de precios:

$$p^*_{t+1} - p^*_t = \phi_0 + \phi_1 (m_t - p^*_t) + \phi_2 (m_{t-1} - p^*_{t-1}) \tag{83}$$

$$p_t = \xi_1 p^*_t + (1 - \xi_1)(p_{t-1} + \xi_0) \tag{84}$$

siendo p^* = nivel de precios de equilibrio. También estas ecuaciones requieren alguna explicación intuitiva. Para obtener la expresión (83), Blanchard (1980) parte de la idea que, si los mercados fueran del tipo de los mercados subasta (auction markets) y hubiese information completa, entonces los cambios en la cantidad de dinero no tendrían efectos reales, el producto y la tasa de interés real permanecerían en sus respectivos niveles de equilibrio de largo plazo, $y = \bar{y}, r = \bar{r}$, y el nivel de precios correspondería en cada momento a su nivel de equilibrio p^*. Introduciendo la (77) en la (76), sustituyendo p por p^*, utilizando los valores promedio de la muestra para $\bar{y}$ y $\bar{r}$ y despejando $(p^*_{t+1} - p^*_t)$, se obtiene finalmente la expresión (83). La ecuación (84) refleja el supuesto de que, en realidad, los precios no se ajustan instantáneamente al nivel dado por p^*, sino que requieren tiempo, lo que se trata de captar por medio del mecanismo de ajuste parcial contenido en (84).[19]

19 La constante ξ_0 en el paréntesis de (84) es una pequeña extensión de la fórmula clásica del ajuste parcial que Blanchard introduce para adaptar la expresión al caso en que la cantidad de dinero, y por ende también el nivel de precios, siguen una tendencia creciente a lo largo del tiempo.

Efectuando las mismas sustituciones indicadas más arriba, aumentadas por $p_t^* = p1_{t+1}^*$, $p_{t-1}^* = p1_t^*$, $p_t = p1_{t+1}$, $p_{t-1} = p1_t$ y $m_{t-1} = m1_t$, es posible escribir el modelo en la forma estructural estándar (1)-(3) en términos de los vectores $x' = \begin{pmatrix} y1 & y2 & q1 & q2 & q3 & p1 & p1^* \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} h & q & p^* \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} i & r & \pi \end{pmatrix}$, $z' = \begin{pmatrix} 1 & m & m1 \end{pmatrix}$. Las matrices F_1 a F_8 tendrán ahora las dimensiones $F_1 : 10 \times 10$, $F_2 : 10 \times 10$, $F_3 : 10 \times 3$, $F_4 : 10 \times 3$, $F_5 : 3 \times 10$, $F_6 : 3 \times 10$, $F_7 : 3 \times 3$, $F_8 : 3 \times 3$.[20] En esta versión del modelo, tanto el nivel de precios observado *(p)* como el nivel de precios de equilibrio *(p^*)* son ahora variables endógenas, mientras que la variable de política es la cantidad de dinero nominal *(m)*. La particularidad de esta versión del modelo consiste en que - contrariamente a la primera versión del modelo y a las dos versiones del modelo de Dornbusch - los valores de equilibrio de largo plazo de algunas variables, concretamente de $p1$, $p1^*$ y p^*, no son estacionarios, ya que, al aumentar la cantidad de dinero nominal en un 1 % por período (trimestre), en el equilibrio de largo plazo también el nivel de precios crecerá en un 1 % por período (trimestre). Debido a esta característica, el modelo puede ser simulado por medio de los procedimientos de Blanchard y Kahn y de King, Plosser y Rebelo, pero no por medio del procedimiento de McKibbin y Sachs, en la version expuesta en el presente trabajo.[21]

VII.3. UN MODELO PARA LA BALANZA COMERCIAL Y LA CUENTA CORRIENTE INSPIRADO EN SACHS Y LARRAÍN

Como tercer ejemplo se elije un modelo simple, inspirado en Sachs y Larraín (1992, cap. 6), para analizar la dinámica de la balanza comercial y la cuenta corriente de una pequeña economía abierta ante distintos tipos de shocks reales. Contrariamente a los dos primeros ejemplos, el modelo que se presenta a continuación parte de una fundamentación microeconómica dinámica explícita. Dornbusch (1983) desarrolla un modelo del mismo tipo, aunque un poco más elaborado, en el que la economía en cuestión produce y consume tanto bienes transables como no

20 Los detalles de la forma estructural estándar están a disposición de los lectores interesados.

21 En Graziani (1999) se presenta una generalización del procedimiento de McKibbin y Sachs que permite simular también la versión completa del modelo de Blanchard (1980).

transables internacionalmente. Una discusión detallada de este tipo de modelos, incluso de los aspectos técnicos, se encuentra en Obstfeld y Rogoff (1996, cap. 1 y 2).

Se supone que la familia representativa de nuestra economía se comporta como si maximizara la función de utilidad intertemporal

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}(c_t-\bar{c})^{2}\ ,\ 0<\beta<1\ , \tag{85}$$

donde

$$0<c_t<\bar{c}\ ,\ \_\ t\ , \tag{86}$$

sujeta a la restricción presupuestaria

$$b_{t+1}=b_t(1+r)+q_t-c_t\ , \tag{87}$$

la condición inicial

$$b_0=0\ , \tag{88}$$

y la condición de transversalidad,

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{t}b_{t+1}=0\ , \tag{89}$$

siendo b = posición externa neta, representada por la tenencia neta de un bono transable internacionalmente de corto plazo, c = consumo, r = tasa real de interés externa constante, q = producto interno real, considerado como exógeno, t = tiempo y β = factor de descuento. Se supondrá, además, que $\beta = 1 / (1 + r)$.

El superávit de la balanza comercial corresponde a la diferencia entre el producto y el consumo interno,

$$TB_t = q_t - c_t \ , \tag{90}$$

en tanto que el superávit de la cuenta corriente se compone del saldo de la balanza comercial más el saldo de la cuenta intereses,

$$CA_t = TB_t + r\, b_t \ , \tag{91}$$

siendo TB = superávit de la balanza comercial y CA = superávit de la cuenta corriente.

El primer paso consiste en formar el Lagrangeano

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ -\frac{1}{2}(c_t - \bar{c})^2 + my_t \left[b_t (1+r) + q_t - c_t - b_{t+1} \right] \} \ , \tag{92}$$

siendo my = multiplicador de Lagrange. A partir de las primeras derivadas parciales de (87) se obtienen las condiciones de primer orden para un máximo, conocidas también como ecuaciones de Euler,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_t} = 0 \ \Rightarrow \ \bar{c} - c_t = my_t \ , \ t = 0, 1, \ldots \ , \tag{93}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial b_{t+1}} = 0 \ \Rightarrow \ my_{t+1}\, \beta (1 + r) = my_t \ , \ t = 0, 1, \ldots \ , \tag{94}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial my_t} = 0 \ \Rightarrow \ b_{t+1} = (1 + r) b_t + q_t - c_t \ , \ t = 0, 1, \ldots \ . \tag{95}$$

El sistema de ecuaciones compuesto por las expresiones (95), (94), (93), (90) y (91) puede ser escrito fácilmente en la forma estructural (1)-(3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta(1+r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{t+1} \\ my_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(1+r) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_t \\ my_t \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_t \\ TB_t \\ CA_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ q_t \end{pmatrix} = 0 \tag{96}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{t+1} \\ my_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_t \\ my_t \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_t \\ TB_t \\ CA_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\bar{c} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ q_t \end{pmatrix} = 0 \tag{97}$$

En base a los supuestos del modelo, b es la variable de estado predeterminada y my es la variable de estado no predeterminada. Finalmente, c , TB y CA son las variables endógenas de corto plazo. Por lo tanto tenemos: $x = b$, $y = my$, $v = [\ c\ TB\ CA\ ]'$ y $z = [\ 1\ q\ ]'$.

Pasando a la resolución numérica, se puede verificar que este modelo puede ser simulado por medio de los procedimientos de Blanchard y Kahn y de King, Plosser y Rebelo, aunque no por medio del procedimiento de McKibbin y Sachs, en la versión expuesta en el presente trabajo, al no cumplirse la condición de invertibilidad requerida.

VIII. CONSIDERACIONES FINALES

En este ensayo se ha intentado exponer en forma sencilla y comparar algunos procedimientos, utilizados en la literatura, para simular o resolver numéricamente modelos lineales en tiempo discreto bajo el supuesto de previsión perfecta.

Después de explicitar la forma estándar del modelo, utilizada por Blanchard y Kahn y tambien por McKibbin y Sachs, se presentaron las soluciones de estos autores y se efectuó una comparación entre ellas. Luego se introdujo una variación en la forma estructural estándar del modelo, siguiendo a King, Plosser y Rebelo, que también puede ser resuelta por medio de un procedimiento análogo al de Blanchard y Kahn.

Luego se discutió el uso de los algoritmos expuestos, partiendo de algunos ejemplos sencillos, extraídos de la literatura macroeconómica tradicional, mencionando características y limitaciones de cada procedimiento. Como sugieren los ejemplos utilizados, los procedimientos permiten simular tanto modelos formu-lados de manera ad-hoc como modelos que poseen una fundamentación micro-económica explícita.

Finalmente, se hace notar que los procedimientos expuestos se basan en la solución exacta del problema de simulación en cada caso y se aplican estrictamente sólo a modelos lineales (y determinísticos). Sin embargo, en la medida en que la linealización de un modelo no-lineal no altera sustancialmente la dinámica de ajuste, los mismos procedimientos también permitirían simular modelos no lineales.

APENDICE

I. Derivación de (17)

Partiendo de (16) y expresando Y_t en términos de Y_{t+1} y z_t, se obtiene:

$$Y_t = \Lambda_2^{-1} Y_{t+1} - \Lambda_2^{-1} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_t \ . \tag{A.1}$$

Sustituyendo Y_{t+1} por la expresión correspondiente en términos de Y_{t+2} y z_{t+1}, se encuentra:

$$Y_t = \Lambda_2^{-2} Y_{t+2}$$

$$- \Lambda_2^{-1} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_t - \Lambda_2^{-2} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) \ z_{t+1} \ . \tag{A.2}$$

Repitiendo este mismo procedimiento, se llega a:

$$Y_t = \Lambda_2^{-T} Y_{t+T} - \sum_{j=0}^{T-1} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21} \ G_1 + C_{22} \ G_2 \right) \ z_{t+j} \ . \tag{A.3}$$

Tomando el límite para $T \rightarrow \infty$ e imponiendo la condición de convergencia,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Lambda_2^{-T} \ Y_{t+T} = 0 \ , \tag{A.4}$$

se obtiene finalmente la expresión (17).

II. Derivación de (19) y (20)

Es conveniente comenzar por derivar la expresión (20). Introduciendo (17) en la segunda fila de (18) y utilizando la primera fila de (11), se obtiene, después de juntar los términos en y_t :

$$(I_2 - B_{21}C_{12})\,y_t = B_{21}C_{11}\,x_t -$$

$$- B_{22}\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_2^{-1-j}(C_{21}G_1 + C_{22}G_2)\,z_{t+j} \;, \qquad (A.5)$$

siendo I_2 la matriz de identidad de dimensión $m \times m$. Tomando en cuenta que

$$I_2 - B_{21}C_{12} = B_{22}C_{22} \;, \qquad (A.6)$$

$$B_{21}C_{11} = - B_{22}C_{21} \;, \qquad (A.7)$$

se llega finalmente a la expresión (20).

Para encontrar la solución (19), se empieza por introducir en la primera ecua-ción de (18) la expresión (15), retrasada un período, y la condición (17):

$$x_t = B_{11}\Lambda_1 X_{t-1} + B_{11}(C_{11}G_1 + C_{12}G_2)\,z_{t-1}$$

$$- B_{12}\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_2^{-1-j}\left(C_{21}G_1 + C_{22}G_2\right)\,z_{t+j} \;. \qquad (A.8)$$

Sustituyendo X_{t-1} por la primera ecuación de (11), retrasada un período, se obtiene

$$x_t = B_{11}\Lambda_1 C_{11}\,x_{t-1} + B_{11}\Lambda_1 C_{12}\,y_{t-1}$$

$$+ (B_{11}C_{11}G_1 + B_{11}C_{12}G_2)\,z_{t-1} -$$

$$- B_{12}\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_2^{-1-j}\left(C_{21}G_1 + C_{22}G_2\right)z_{t+j} \qquad (A.9)$$

que, tomando en cuenta las relaciones

$$B_{11}C_{11} = I_1 - B_{12}C_{21} \;, \qquad (A.10)$$

$$B_{11} C_{12} = - B_{12} C_{22} \ , \tag{A.11}$$

se transforma en:

$$\begin{aligned} x_t = \ & B_{11} \Lambda_1 B_{11}^{-1} x_{t-1} - B_{11} \Lambda_1 B_{11}^{-1} B_{12} C_{21} x_{t-1} - \\ & - B_{11} \Lambda_1 B_{11}^{-1} B_{12} C_{21} x_{t-1} - B_{11} \Lambda_1 B_{11}^{-1} B_{12} C_{22} y_{t-1} \\ & + G_1 z_{t-1} - B_{12} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_{t-1} \\ & - B_{12} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21} G_1 + C_{22} G_2 \right) z_{t+j} \ . \end{aligned} \tag{A.12}$$

Reemplazando y_{t-1} por la expresión (20), retrasada un período, y simplificando el resultado con la ayuda de (A.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} x_t = \ & B_{11} \Lambda_1 B_{11}^{-1} x_{t-1} + G_1 z_{t-1} \\ & - B_{11} \Lambda_1 C_{12} C_{22}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21} G_1 + C_{22} G_2 \right) z_{t-1+j} \\ & - B_{12} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_{t-1} - \\ & - B_{12} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21} G_1 + C_{22} G_2 \right) z_{t+j} \ . \end{aligned} \tag{A.13}$$

Tomando en consideración que

$$\begin{aligned} & B_{12} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_{t-1} + \\ & + B_{12} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21} G_1 + C_{22} G_2 \right) z_{t+j} \\ & = B_{12} \Lambda_2 \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21} G_1 + C_{22} G_2 \right) z_{t-1+j} \ , \end{aligned} \tag{A.14}$$

se llega a:

$$x_t = B_{11}\Lambda_1 B_{11}^{-1} x_{t-1} + G_1 z_{t-1} - (B_{11}\Lambda_1 C_{12} +$$

$$+ B_{12}\Lambda_2 C_{22}) C_{22}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-1-j} \left(C_{21} G_1 + C_{22} G_2 \right) z_{t-1+j} \ . \qquad \text{(A.15)}$$

y, utilizando la relación

$$A_{12} = B_{11}\Lambda_1 C_{12} + B_{12}\Lambda_2 C_{22} \ , \qquad \text{(A.16)}$$

se obtiene finalmente la solución (19).

III. Derivación de (21)

De la segunda ecuación de (11), reescrita para $t = 0$, surge:

$$y_0 = C_{22}^{-1} (Y_0 - C_{21} x_0) \ . \qquad \text{(A.17)}$$

Introdudiendo esta expresión en la primera ecuación de (11), también reescrita para $t = 0$, se obtiene la (21).

IV. Relaciones (42)-(44)

Para mostrar que la expresión (42) resuelve la ecuación (46), se sustituye la primera en la segunda,

$$- C_{22}^{-1} C_{21} = (A_{22} + C_{22}^{-1} C_{21} A_{12})^{-1} (- C_{22}^{-1} C_{21} A_{11} - A_{21}) \ . \qquad \text{(A.18)}$$

Haciendo luego uso de las relaciones

$$C_{21} A_{11} = \Lambda_2 C_{21} - C_{22} A_{21} \qquad \text{(A.19)}$$

$$C_{21} A_{12} = \Lambda_2 C_{22} - C_{22} A_{22} \qquad \text{(A.19)}$$

que se obtienen a partir de (10), la expresión (A.18) se transforma en una identidad.

Introduciendo (42) en (47) y haciendo uso de (A.20), se obtiene:

$$\Theta_2 = -(A_{22} + C_{22}^{-1} C_{21} A_{12})^{-1} (C_{22}^{-1} C_{21} G_1 + G_2)$$

$$= -\left[A_{22} + C_{22}^{-1} (\Lambda_2 C_{22} - C_{22} A_{22})\right]^{-1} (C_{22}^{-1} C_{21} G_1 + G_2)$$

$$= -C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} C_{22} (C_{22}^{-1} C_{21} G_1 + G_2)$$

$$= -C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2), \qquad \text{(A.21)}$$

confirmándose la relación (43).

Introduciendo (42) y (43) en (48) y haciendo uso de (A.20), se obtiene:

$$K_t = (A_{22} + C_{22}^{-1} C_{21} A_{12})^{-1} \left(-C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_{t+1} + K_{t+1}\right)$$

$$= \left(C_{22}^{-1} (C_{22} A_{22} + C_{21} A_{12})\right)^{-1} \left(-C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_{t+1} + K_{t+1}\right)$$

$$= -C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-2} (C_{21} G_1 + C_{22} G_2) z_{t+1} + C_{22}^{-1} \Lambda_2^{-1} C_{22} K_{t+1}, \qquad \text{(A.22)}$$

legándose a la expresión (49) por medio de sustituciones sucesivas.

REFERENCIAS

Austin, G.P. y W.H. Buiter (1982): *"Saddlepoint": A Programme for Solving Continuous Time Linear Rational Expectations Models*, Documento de Trabajo A.37, LSE Econometrics Programme, London School of Economics and Political Science, Noviembre.

Azariadis, C. (1993): *Intertemporal Macroeconomics*, Oxford/Cambridge: Blackwell.

Blanchard, O.J. (1980): *The Monetary Mechanism in the Light of Rational Expectations*, en: S. Fischer, ed., Rational Expectations and Economic Policy, Chicago: University of Chicago Press, 75-116.

Blanchard, O.J. (1981): *Output, the Stock Market, and Interest Rates*, American Economic Review, 71, 132-143.

Blanchard, O.J. y Ch. M. Kahn (1980): *The Solution of Linear Difference Models Under Rational Expectations*, Econometrica, 48, 1305-1311.

Buiter, W.H. (1984): *Saddlepoint Problems in Continuous Time Rational Expectations Models: A General Method and Some Macroeconomic Examples*, Econometrica, 52, 665-680.

Dornbusch, R. (1976): *Expectations and Exchange Rate Dynamics, Journal of Political Economy*, 84, 1161-1176.

Dornbusch, R. (1983): *Real Interest Rates, Home Goods, and Optimal External Borrowing*, Journal of Political Economy, 91, 141-153.

Graziani, C. (1999): *The Simulation of Discrete Time Linear Models Under Perfect Foresight: The Basic Procedure of McKibbin and Sachs and Two Generalizations*, Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali, 46, 137-158.

King, R.G., Ch.I. Plosser y S.T. Rebelo (1990): *Production, Growth and Business Cycles: Technical Appendix*, Mimeo, Universidad de Rochester, Mayo 1987, Revisión: 15 de Agosto de 1987, Correcciones: 1.o de Mayo de 1990.

McKibbin, W.J. (1987): *Numerical Solutions of Rational Expectations Models With and Without Strategic Behavior*, Research Discussion Paper 8706, Reserve Bank of Australia, Agosto.

McKibbin, W.J. y J.D. Sachs (1991): *Global Linkages: Macroeconomic Interdependence and Cooperation in the World Economy*, Washington, D.C.: Brookings Institution.

Obstfeld, M. y K. Rogoff (1996): *Foundations of International Macroeconomics*, Cambridge, Mass./London, England: MIT Press.

Rebelo, S. y C.A. Végh (1996): *Real Effects of Exchange-Rate-Based Stabilization: An Analysis of Competing Theories*, en: B.S. Bernanke y J.J. Rotemberg, eds., NBER Macroeconomics Annual 1995, Cambridge, Mass./ London, England: MIT Press, 125-187.

Sachs, J.D. y F. Larraín B. (1992): *Macroeconomics In The Global Economy*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

The MathWorks, Inc. (1985-1991): MATLAB: *High-Performance Numeric Computation Software*, User=s Guide.