ACERCA DE LA ESTACIONALIDAD ESTOCÁSTICA
UNA APLICACIÓN PARA LA DEMANDA REAL DE DINERO EN URUGUAY

ELIZABETH BUCACOS[1]
ebucacos@bcu.gub.uy

Junio de 2005

RESUMEN

El tratamiento del componente estacional de las series estadísticas como un fenómeno totalmente determinístico cuando en realidad es estocástico puede generar estimaciones inconsistentes, errores en la inferencia estadística y sesgos en las medidas de política tomadas en base a ellos. En este trabajo se aborda este tema, con especial referencia a la demanda por saldos reales en Uruguay.

ABSTRACT

When the seasonal component of a particular statistical series is treated as if it were a mere deterministic phenomenon instead of a stochastic one, it may lead to inconsistent estimations, statistical inference errors and policy biases. This issue is addressed in this paper, focusing mainly on real money balances demand for Uruguay.

Palabras clave*: Señoreaje, demanda de dinero, inflación, política monetaria, Uruguay.*
JEL: C53, E41, E47, E52, N16

---

1 La autora desea agradecer los comentarios y sugerencias de Marco Nakane y Pablo Mendieta recibidos en la X Reunión de la Red de Investigadores de Bancos Centrales celebrada en Lima, Perú, quienes quedan eximidos de toda responsabilidad por cualquier error remanente.

INTRODUCCIÓN

La estacionalidad presente en un gran número de series económicas es comúnmente tratada como si fuera un fenómeno totalmente determinístico, el cual puede ser pronosticado perfectamente y que, además, nunca cambiará su forma. Sin embargo, muchas veces dicha estacionalidad es estocástica y en ciertas oportunidades "la primavera" se transforma en "verano" y en otras en "otoño". Esta particularidad se complica[2] cuando se consideran series cointegradas, es decir, series que guardan entre sí relaciones de equilibrio estable en el largo plazo pero que presentan patrones estacionales variables que pueden o no coincidir en el corto plazo. Los modelos estimados pasando por alto la naturaleza específica del componente estacional pueden dar como resultado estimaciones inconsistentes, errores en la inferencia estadística y sesgos en las medidas de política económica tomadas en base a ellos.

En el presente documento se aborda el tema de la estacionalidad estocástica a través de dos metodologías diferentes. Una de ellas trata de encontrar movimientos comunes en los patrones estacionales variables de un grupo de series, las que estarían estacionalmente cointegradas *(cointegración estacional)*; el otro enfoque se concentra en encontrar relaciones estables pero estacionalmente variables en el largo plazo y coeficientes de ajuste que pueden variar con la estación *(cointegración periódica)*. Estos procedimientos se aplican luego a la demanda por saldos monetarios reales en Uruguay, en el período 1980.1-2004.4.

El plan del trabajo es como sigue. Primeramente, se presenta el problema de la estacionalidad en la demanda real de dinero en Uruguay. Luego, se realiza una breve reseña de la caracterización de los procesos estacionales y del tratamiento seguido en la literatura. Después, se aplican las dos metodologías a la demanda por saldos reales en Uruguay. Finalmente, se presentan algunas reflexiones finales.

2 Aunque a veces puede hacerse más manejable.

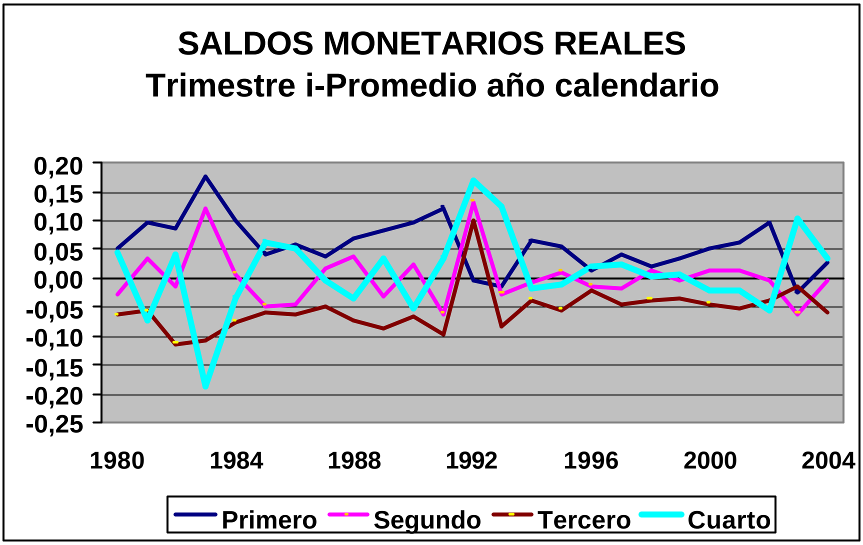
1. ESTACIONALIDAD EN LA DEMANDA POR SALDOS REALES

La evolución trimestral de la demanda por saldos reales[3] (M1R) muestra un patrón estacional, caracterizado por el liderazgo del primer trimestre en cuanto a crecimiento, la gran variabilidad del cuarto y la relativa constancia de los otros dos, aunque el tercero siempre se encuentra por debajo del nivel promedio del año calendario (ver gráfica 1). Sin embargo, ese patrón estacional no es estático, sino que muchas veces la “primavera” se transforma en “verano” y otras veces en “otoño”. En efecto, como puede observarse en la gráfica 1 (donde se dibujan los niveles de M1R de cada trimestre en relación al nivel promedio del año calendario, ambos en logaritmos naturales), la línea que representa al cuarto trimestre (primavera), corta en varias ocasiones a las que representan al primer trimestre (verano) y al segundo (otoño). Por su parte, los fundamentos de los saldos reales en el largo plazo, es decir el producto real y la tasa de interés nominal, tampoco presentarían una estacionalidad determinística: en cuanto al producto, el verano se transforma en “otoño” y en cuanto a la tasa de interés, todo cambia (gráficas 2 y 3). Por tanto, tratar a la estacionalidad presente en la demanda por saldos reales como determinística[4] no parecería ser lo correcto. Todo parece indicar que dicha estacionalidad sería estocástica, es decir, no sería posible pronosticarla perfectamente sino que los shocks durarían para siempre, cambiando los patrones estacionales en forma permanente.

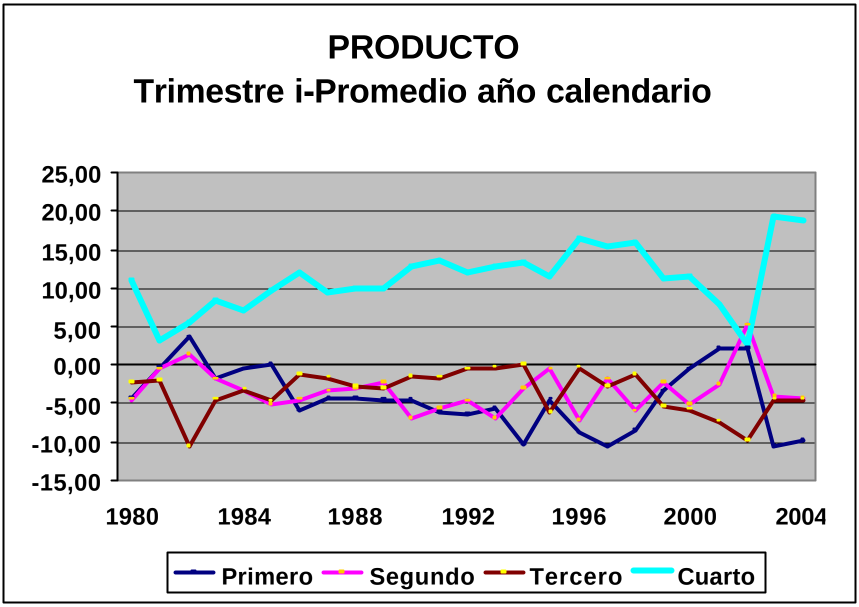
3 Medida en promedios trimestrales.

4 En Bucacos-Licandro (2003), se estima una ecuación de demanda real de dinero donde se trata a la estacionalidad como un fenómeno determinístico: en la ecuación de largo plazo, los coeficientes hallados son: -0.06 (D2), -0.12 (D3) y -0.14 (D4); en la ecuación de corto plazo, son: 0.08 (D1) y –0.07 (D2+D3), junto con un coeficiente de corrección de errores de –0.43.

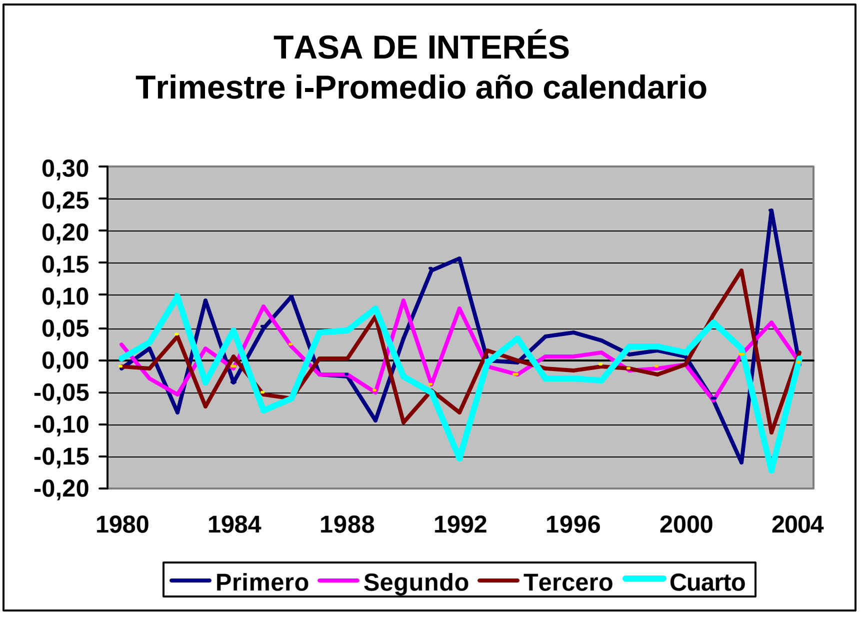
Gráfica 1. Patrón de estacionalidad en los saldos monetarios reales.



Gráfica 2. Patrón de estacionalidad en el producto real.



Gráfica 3. Patrón de estacionalidad en la tasa de interés nominal.



En este trabajo, se realizarán dos aproximaciones al tema de la estacionalidad estocástica, con aplicación a la demanda por saldos monetarios reales en Uruguay, en el período 1980.1-2004.1. Una de ellas trata de encontrar movimientos comunes en los patrones estacionales variables de un grupo de series, las que estarían estacionalmente cointegradas *(cointegración estacional)*; el otro enfoque se concentra en encontrar relaciones estables pero estacionalmente variables en el largo plazo y coeficientes de ajuste que pueden variar con la estación *(cointegración periódica)*.

2. PROCESOS ESTACIONALES: CARACTERIZACIÓN Y TRATAMIENTO

En esta sección, se realiza una breve descripción de los procesos estacionales presentes en las series de tiempo y se señalan los rasgos principales de los procedimientos estándares utilizados en su tratamiento, con especial detenimiento de los dos que ocuparemos más adelante.

2.1 CARACTERIZACIÓN DE LOS PROCESOS ESTACIONALES[5]

Una gran cantidad de series económicas tienen importantes componentes estacionales y existe una variedad de posibles modelos estadísticos para tratarlos. En esta sección, se señalarán brevemente dichos modelos.

Es posible describir a una serie como estacional cuando su espectro presenta picos distintivos en frecuencias estacionales $w_s = 2\pi j / s$, con $j = 1, ..., s/2$, siendo *s* el número de períodos en un año[6] y asumiendo que *s* es un número par y que tal espectro existe.

Para modelar la estacionalidad, se suelen utilizar tres tipos de modelos de series de tiempo: procesos estacionales determinísticos exclusivamente, procesos estacionales estacionarios y procesos estacionales integrados.

Un proceso estacional puramente determinístico es aquél que es generado por variables dummy estacionales:

$$x_t = m_t \text{, donde } m_t = m_0 + m_1 S_{1t} + m_2 S_{2t} + m_3 S_{3t}$$

puede ser pronosticado perfectamente y nunca cambiará su forma.

Un proceso estacional estacionario es aquél que puede ser generado por un proceso autorregresivo potencialmente infinito:

$$f(B)\, x_t = e_t, \quad \varepsilon_t \text{ i.d.d.}$$

con todas sus raíces fuera del círculo unitario pero donde algunas son pares complejos con periodicidad estacional. Su espectro presenta picos en algunas de las frecuencias estacionales.

5 Esta sección está basada en el artículo de S. Hylleberg, R. F. Engle, C. W. Granger y B. S. Yoo, (1990).

6 En la aplicación que nos ocupa, utilizaremos datos trimestrales, por lo que el valor de *s* es 4.

Un proceso estacional integrado es aquél que presenta una raíz unitaria estacional en su representación autorregresiva:

$$x_t \approx I_q(d)$$

lo que indica que la serie x_t es integrada de orden d en la frecuencia q. Las series estacionalmente integradas tienen "memoria larga" de forma tal que los shocks duran para siempre y pueden cambiar los patrones estacionales en forma permanente; sus varianzas se incrementan linealmente y están incorrelacionadas asintóticamente con procesos que presentan raíces unitarias en otras frecuencias.

Se dice que dos series, cada una de ellas integrada en la frecuencia q, están cointegradas a esa frecuencia si una combinación lineal de ellas no es integrada en la frecuencia q. Esta cointegración tiene implicancias para su mecanismo de generación conjunta. Por supuesto, si las series involucradas no tienen raíces unitarias en las frecuencias correspondientes, la posibilidad de cointegración no existe.

2.2 INTEGRACIÓN Y COINTEGRACIÓN ESTACIONAL

Hylleberg, Engle, Granger and Yoo (HEGY, 1990) proponen un test para determinar si una serie univariada tiene raíces unitarias, tanto en todas las frecuencias estacionales como en la frecuencia cero (largo plazo). Dicho test sigue el enfoque de Dickey-Fuller, con variables transformadas para cubrir los casos especiales.

HEGY utilizan la factorización que surge del conocido filtro estacional de Box y Jenkins (1970) para datos trimestrales:

$1-B^4=(1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)$, donde B es el operador de rezago. Si la serie x_t contiene raíces unitarias en todas las frecuencias estacionales θ =0, ¼, ½, ¾ de un ciclo (2π), entonces, cada una de las expresiones x_t-x_{t-1}, x_t+x_{t-1}, x_t+x_{t-2} y x_t-x_{t-2} es no estacionaria. Suponiendo que los datos son generados por un proceso autorregresivo general, del tipo $\varphi(B)\ x_t=\varepsilon_t$, una expansión en torno de los puntos θ_k =+1, -1, +i, -i, define un procedimiento para testear el orden de integración de la serie en cuestión, extendiendo a las frecuencias estacionales el procedimiento de Dickey-Fuller pensado para la frecuencia θ=0. El test se basa en la ecuación auxiliar

$$y_{4t} = (1-B^4)\, x_t = p_1\, y_{1t-1} + p_2\, y_{2t-1} + p_3\, y_{3t-2} + \\ + p_4\, y_{3t-1} + e_t \qquad \textbf{(1)}$$

donde:

$y_{1t} = (1+B+B^2+B^3)\, x_t$ es la serie observada ajustada por las raíces unitarias estacionales en θ = ¼, ½, ¾

$y_{2t} = -(1-B+B^2-B^3)\, x_t$ es la serie observada ajustada por las raíces unitarias en θ = 0, ¼, ¾

$y_{3t} = -(1-B^2)\, x_t$ es la serie observada ajustada por las raíces unitarias en θ = 0, ½

Los tests para las raíces unitarias en las frecuencias 0, ½ y ¼ se basan en los valores "t" para π_1 y $\pi_{2,}$ los cuales se distribuyen como una distribución Dickey-Fuller y un test "F" para $\pi_3 \cap \pi_4$; en caso de que π_4=0, se utiliza el valor "t" de π_3.

En el caso en que dos o más series tengan raíces unitarias estacionales, se abre la posibilidad de que estén cointegradas. Una generalización del procedimiento en dos etapas propuesto por Engle y Granger (1987) es perfectamente aplicable en esta situación, aunque se utilizan las series filtradas y_{it} , con i = 1, 2, 3. En la primera etapa, se estiman las relaciones de largo plazo en cada frecuencia y en la segunda etapa se incorporan los residuos de las mismas como regresores en la ecuación en corrección de errores. Finalmente, se arriba a una especificación del tipo:

$$A(B)\,\Delta_4\, x_t = g_1\, a_1'\, y_{1t-1} + g_2 a_2' y_{2t-1} - \\ -(g_3 + g_4\, B)\,(a_3' + a_4' B)\, y_{3t-2} + e_t \qquad \textbf{(2)}$$

donde A(B) es un polinomio matricial de N x N con todas sus raíces fuera del círculo unitario, a_i son las relaciones de largo plazo en cada frecuencia *i*, g_i los parámetros de ajuste en cada frecuencia *i*, e_t un vector de errores. Como señalan Engle et al. (1993), la presencia de cointegración a una frecuencia estacional específica puede interpretarse como un movimiento paralelo en el componente estacional de las series involucradas, cada una exhibiendo un patrón estacional variable.

Como demuestra Osborn (1993), ese modelo corresponde a:

$$\Delta_4 x_t = \sum_{i=1}^{4} l_i \ (z_{t-i} - q_i \ x_{t-i}) + e_t \qquad \textbf{(3)}$$

es decir, el modelo de cointegración estacional se puede interpretar como un modelo con cuatro relaciones objetivo y parámetros de ajuste diferentes, cada uno de ellos asociado a un diferente rezago. Un enfoque diferente, que permite la variación de los parámetros con respecto a las estaciones en lugar de variaciones respecto al rezago, es presentado en la sección siguiente.

2.3 INTEGRACIÓN Y COINTEGRACIÓN PERIÓDICA

Los modelos periódicos en corrección de errores permiten que tanto los parámetros de largo plazo como los coeficientes de ajuste varíen en cada estación. Puede suceder que en cada una de las estaciones se verifique un ajuste hacia la relación de largo plazo (proceso totalmente cointegrado) o bien que en alguno de los trimestres no haya dicho ajuste (parcialmente cointegrado).

La especificación final de dicho modelo es de la forma:

$$\Delta_4 y_t = l_s (y_{t-4} - q_s^{'} z_{t-4}) + \sum_{i=1}^{p} g_i \Delta_4 y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} b_i^{'} \Delta_4 z_{t-i} + e_t \qquad \textbf{(4)}$$

donde y_t es la variable dependiente, z_t es el vector de variables independientes, l_s reflejan los parámetros de ajuste en la estación *s* y q_s es el vector de parámetros de largo plazo en la estación s. La existencia de cointegración periódica requiere que los parámetros de ajuste l_s sean estrictamente menores a cero.

Como sucede habitualmente, se debe comenzar investigando la existencia de raíces unitarias en las series individuales en las diferentes estaciones s. Franses (1996) propone partir de la autocorrelación periódica de la serie en cuestión[7], escribirla en su representación vectorial de trimestres[8] y chequear si la ecuación característica correspondiente presenta una raíz unitaria (RU)[9]. Si tiene solamente una RU y las otras

---

7 Un modelo autorregresivo periódico de orden p, PAR(p), se expresa como: $y_t = m_t + f_{1s}\, y_{t-1} + ... + f_{ps}\, y_{t-p} + e_t$, donde m_t es un término de intercepción que varía con la estación, y f_{1s}, .., f_{ps} son parámetros autorregresivos hasta el orden p que pueden variar con la estación s, s = 1, 2, 3, 4; se asume que e_t es un proceso ruido blanco estándar con varianza constante f^2, aunque se puede relajar ese supuesto para permitir varianza estacional s_s^2.

8 La representación vectorial de trimestres, *VQ* en inglés, consiste en escribir un modelo PAR(p) como un modelo AR(P) para el vector (4x1) $Y_T = (Y_{1,T}, Y_{2,T}, Y_{3,T}, Y_{4,T})'$, T = 1, 2, ..., N, con n = 4N, donde $Y_{s,T}$ es la observación en la estación *s* del año T, s = 1, 2, 3, 4, es decir: $\Phi_0 Y_T = m + \Phi_2 Y_{T-1} + ... + \Phi_p Y_{T-p} + e_T$ o $\Phi(B) Y_T = m + e_T$, con $\Phi(B) = \Phi_0 - \Phi_1 B - ... - \Phi_p B^p$, donde $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)'$ y $e_T = (e_{1,T}, e_{2,T}, e_{3,T}, e_{4,T})'$ y $e_{s,T}$ es la observación en el proceso de error e_t correspondiente a la estación *s* del año *T*. A su vez, Φ_0, ..., Φ_p son matrices (4x4) de parámetros que cumplen:

$$f_0(i, j) = 1 \qquad i = j$$
$$= 0, \qquad j \rangle i$$
$$= -f_{i-j,i} \qquad j \langle i$$
$$f_k(i, j) = f_{i+4k-j,i}$$

para i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, ..., P.

9 En particular, para un proceso PAR(1), se tiene:

$$y_t = a_s\, y_{t-1} + e_t$$
$$\Phi_0 Y_T = \Phi_1 Y_{T-1} + e_T \qquad \Rightarrow \qquad Y_T = \Phi_0^{-1}\Phi_1 Y_{T-1} + \Phi_0^{-1} e_T$$

donde:

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{14} & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ a_{12}a_{13} & a_{13} & 1 & 0 \\ a_{12}a_{13}a_{14} & a_{13}a_{14} & a_{14} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_0^{-1}\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}a_{12}a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \end{bmatrix}$$

Ese proceso VQ(1) (*vector of quarters*, en inglés) puede escribirse en forma de corrección de errores: $\Delta Y_T = (\Phi_0^{-1}\Phi_1 - I_4) Y_{T-1} + \Phi_0^{-1} e_T$, donde Δ es el filtro de diferenciación para el vector de la serie anual.

Con el supuesto de que Y_{sT} son a lo sumo I(1), el rango de la matriz $\Phi_0^{-1}\Phi_1 - I_4$ es 3, lo que implica tres relaciones cointegadoras entre las series Y_{sT}, del tipo: $Y_{2T} - a_2 Y_{1T}$; $Y_{3T} - a_3 Y_{2T}$; $Y_{4T} - a_4 Y_{3T}$, por lo que $Y_{4T} - a_4 a_3 a_2 Y_{1T}$ es estacionaria y $Y_{1T} - a_1 Y_{4T-1}$ con $a_1 = 1 / a_4 a_3 a_2$ es una variable estacionaria. Esto implica que, en el caso de una única raíz unitaria en el proceso Y_T, la serie trimestral y_t se puede transformar en un proceso sin tendencia estocástica usando el filtro de diferenciación periódica (1-a_sB), donde a_s son parámetros que varían con la estación cumpliendo con la propiedad de que $a_1 a_2 a_3 a_4$ =1 y $a_s \neq a$ para todo s = 1, 2, 3, 4.

raíces caen fuera del círculo unitario, entonces puede decirse que hay una tendencia común y tres relaciones cointegradoras. Para las variables explicativas, el citado autor recomienda utilizar el test HEGY.

En una segunda etapa, se debe investigar la posibilidad de varias relaciones cointegradoras en una especificación en corrección de errores periódica (periodic ECM*)*, donde todas las variables[10] se transforman a series estacionarias (periódicas) a través del filtro Δ_4:

$$\Delta_4 y_t = \sum D_{st}\, l_s (y_{t-4} - q_s\, z_{t-4}) + g\, \Delta_4\, y_{t-1} + b\, \Delta_4\, z_t + e_t \qquad \textbf{(5)}$$

Luego, se testea la existencia de cointegración periódica parcial o total (tests de cointegración de Wald, resumidos como $Wald_s$ y Wald) *en:*

$$\Delta_4 y_t = \sum d'_s\, D_{st}\, x_{t-4} + p'\, w_t + e_t \qquad \textbf{(6)}$$

si es necesario aumentada con términos de tendencia periódica

$$\sum_{s=1}^{4} (m_0\, D_{st} + t\, D_{st}\, t)$$

donde $x_t = (y_t\,, z'_t)$, $d_s = (d'_{1s}, d'_{2s}) = (l_s, -l_s\, q'_s)$, s = 1, …, 4, y w_t denota el vector de variables explicativas en diferencias en (2). Los tests se resumen como:

$Wald_s$	H_{0s}: $d_s = 0$ (No CO-I)	H_1: d ¹ 0, (CO-I Periódica)	W_s = (n- l) (RSS_{0s} - RSS_1)/RSS_1
Wald	H_0: d = (d_1',…, d_4') = 0 (No CO-I)	H_1: d ¹ 0, (CO-I Periódica)	W = (n- l) (RSS_0 - RSS_1)/RSS_1

donde *l* es el número de parámetros estimados en (3), $RSS_{\theta s}$, RSS_0 y RSS_1 denotan las sumas de los cuadrados de los residuos por MCO bajo H_{0s}, H_0 y H_1.

10 Es posible incluir valores rezagados tanto de la variable dependiente como de las independientes.

Si la hipótesis nula de no cointegración se rechaza, entonces debe testearse si los parámetros de ajuste son iguales, si las elasticidades de largo plazo lo son y si los parámetros en los términos de corrección de error (incluyendo las ordenadas de largo plazo) son iguales.

Finalmente, deben realizarse análisis de exogeneidad débil, puesto que de ser rechazada, se deberá considerar estimadores alternativos para los parámetros de largo plazo.

3 ANÁLISIS EMPÍRICO DE LA ESTACIONALIDAD ESTOCÁSTICA EN LA DEMANDA POR SALDOS REALES

Estudios anteriores[11] no han podido rechazar la existencia de una relación de equilibrio en el largo plazo entre los saldos monetarios reales y sus fundamentos para el caso uruguayo, a saber, el producto real y la tasa de interés nominal. Asimismo, aquella relación presentaba un patrón estacional determinístico. En el presente documento se abre la posibilidad de que existan equilibrios entre todas o algunas de dichas variables a otras frecuencias además de la anual. Esa posibilidad determina que, siendo variables, los componentes estacionales de las series involucradas tengan movimientos comunes que puedan ser modelados en forma conjunta para mejorar la descripción del proceso generador de datos de la demanda de dinero[12] .

En esta sección, se aplican a la demanda por saldos reales los dos enfoques brevemente presentados en la sección anterior. Primeramente, se analizan las series individuales, luego la posible cointegración entre ellas y, finalmente, se presenta un pequeño resumen de los resultados encontrados bajo cada una de aquellas modalidades.

11 Bucacos-Licandro (2003), entre otros.

12 Esto es, desde un punto de vista estrictamente empírico.

3.1 COINTEGRACIÓN ESTACIONAL

3.1.1 Análisis de las series individuales

Los resultados del test de Hylleberg, Engle, Granger and Yoo (HEGY, 1990) se exponen en el cuadro 1.

Cuadro 1. TESTS DE INTEGRACIÓN ESTACIONAL (HEGY)
Muestra: 1980.1-2004.4

Serie	Regresión auxiliar: Determinística	Regresión auxiliar: Rezagos variable dependiente	Valores en la muestra: "t" p_1	"t" p_2	"t" p_3	"t" p_4	"F" p_3 Ç p_4
m-p	C	1, 2, 3, 4, 5, 6	*-3.04*	*-2.92***	*-0.84*	*-1.04*	*0.90*
	C, $DE_{2,3}$	1, 2, 3, 4, 5, 6	*-2.82*	*-3.15*	*-3.83*	-3.49**	8.49*
y	C, T	1, 2, 3, 4, 5, 6	*-3,29*	*-0,76*	*-0,78*	*0,19*	*0,32*
	C, T, $DE_{1,2,3}$	1, 2, 3, 4, 5, 6	*-3,30*	*-3,93***	*-2,19*	*-1,08*	*3,04*
i	-	1	*-0,98*	*-7,07***	*-4,87***	-8,09**	*44,53***
	C, T, DE_2	1	*-2,63*	*-6,88***	*-5,10***	*-7,39***	*40,30***
Valores críticos para m-p,							
s/dummies estacionales, al		5%	-3,25	-2,27	-2,23	-2,06	3,78
		2%	-3,66	-2,68	-2,64	-2,44	4,78
c/dummies estacionales, al		5%	-3,39	-3,37	-3,92	-2,37	7,68
		2%	-3,77	-3,75	-4,31	-2,86	9,22
Valores críticos para y,							
s/dummies estacionales, al		5%	-3,85	-2,24	-2,27	-2,05	3,70
		2%	-4,23	-2,65	-2,68	-2,41	4,64
c/dummies estacionales, al		5%	-4,04	-3,41	-4,02	-2,26	6,55
		2%	-4,46	-3,80	-4,46	-2,75	9,27
Valores críticos para i,							
s/dummies estacionales, al		5%	-3,85	-2,24	-2,27	-2,05	3,70
		2%	-4,23	-2,65	-2,68	-2,41	4,64
c/dummies estacionales, al		5%	-4,04	-2,24	-4,02	-2,26	6,55
		2%	-4,46	-2,65	-4,46	-2,75	9,27

Notas:

(1) Las series son: m-p = saldos monetarios reales (M1/IPC), en logaritmos naturales; y = índice de volumen físico del producto bruto interno, en logaritmos naturales; i = tasa de interés nominal, para depósitos en moneda nacional de 1 a 180 días.

(2) La regresión auxiliar es $z_{4t} = (1-B^4)x_t = p_1 z_{1t-1} + p_2 z_{2t-1} + p_3 z_{3t-2} + p_4 z_{3t-1} + e_t$, donde x_t corresponde a cada una de las series que aparecen en la primer columna; las series z_{ij} corresponden a las transformaciones de las series originales x_{ij} ajustadas por las raíces unitarias estacionales (ver sección 2). Para lograr errores bien comportados, la regresión auxiliar puede aumentarse tanto en su parte *determinística*, a saber, con constante (C), tendencia (T) y/o dummies estacionales determinísticas (DE_i, i = 1,2,3,4) o rezagos de la variable dependiente.

(3) Los valores críticos corresponden a los de la distribución *"t" de Dickey-Fuller* y a los de la distribución *"F"* (test de significación conjunta), para un grado de significación de 5%. Fueron tomados de HEGY (1990) y Fuller (1976) para $t_{\pi 1}$ y $t_{\pi 2}$ y de Dickey, Hasza y Fuller (1984) para $t_{\pi 3}$.

(4) (*) y (**) indican rechazo de la H_o de raíz unitaria al 5% y al 2%, respectivamente.

(5) El tamaño muestral fue distinto en cada una de las regresiones, dependiendo del número de rezagos de la variable dependiente que fue necesario incorporar en cada una hasta lograr errores incorrelacionados.

Los resultados indican que las series de saldos monetarios reales (*m-p*) y de producto real (*y*) son integradas de orden 1 en las frecuencias 0 y ½ (al 2% y al 5%[13]). Las pruebas realizadas tienen cierta dificultad en separar una raíz unitaria en las frecuencias ¼ y ¾ de un patrón estacional determinístico. En efecto, cuando se aplica el test estándar de HEGY sin las variables dummies estacionales en la parte determinística de la ecuación auxiliar, resulta que ambas series son integradas de orden 1 en todas las frecuencias 0, ¼, ½; en tanto que, al incorporar las variables estacionales, el test conjunto rechaza la no estacionariedad de (*m-p*) en las frecuencias ¼ y ¾ . Por su parte, la tasa de interés nominal presenta una raíz unitaria en la frecuencia 0 únicamente.

3.1.2 Análisis de cointegración estacional

Como mencionáramos anteriormente, HEGY (1990), basados en la definición de integración a una frecuencia específica, extendieron la teoría de sistemas cointegrados de forma tal de incluir la cointegración a otras frecuencias además de la frecuencia de largo plazo (cuando θ=0).

El modelo en corrección de errores correspondiente, se escribiría de la forma:

$$A(B)\Delta_4 x_t = g_1 a_1{}' y_{1t-1} + g_2 a_2{}' y_{2t-1} - (g_3 + g_4 B)(a_3{}' + a_4{}' B) y_{3t-2} + e_t \qquad \textbf{(7)}$$

donde γ_1, γ_2, γ_3 y γ_4, son matrices de N x r_1, N x r_2, N x r_3 y N x r_3 que contienen los pesos de las relaciones cointegradoras para las diferentes frecuencias en cada una de las N ecuaciones; y_{1t}, y_{2t}, y y_{3t} son vectores de N x 1 que contienen las series transformadas. Del lado izquierdo, se tiene un proceso autorregresivo de cuarto orden multivariado estacionario y del lado derecho, la relación cointegradora representa: las relaciones cointegradas en el largo plazo, $\alpha_1' \, y_{1t}$; las relaciones cointegradas a la frecuencia ½ , $\alpha_2' \, y_{2t}$; y las relaciones cointegradas polinómicas a la frecuencia ¼ (y ¾), $(\alpha_3' + \alpha_4' B)\, y_{3t}$.

13 El producto está en el límite.

En el caso que nos ocupa, es decir, un sistema con tres variables (saldos monetarios reales, producto y tasa de interés) donde las series son integradas de orden uno a diferentes frecuencias θ = 0, ¼, ½, ¾, puede existir uno, varios o ningún vector cointegrador a cada una de dichas frecuencias. Si el rango cointegrador es uno para todas las frecuencias, la primer ecuación del sistema ECM de tres ecuaciones es:

$$
\begin{aligned}
\Delta_4 (m-p)_t = & \sum_{j=1}^{q} d_j \Delta_4 y_{t-j} + \sum_{k=1}^{p} b_i \Delta_4 i_{t-k} + \sum_{n=1}^{u} m_m \Delta_4 (m-p)_{t-n} + \\
& + g_{11} \langle (m-p)_{1,t-1} - a_{12} y_{1,t-1} - a_{13} i_{1,t-1} \rangle + \\
& + g_{12} \langle (m-p)_{2,t-1} - a_{22} y_{1,t-1} - a_{23} i_{1,t-1} \rangle - \\
& - (g_{13} + g_{14} B) \langle (m-p)_{3,t-2} - a_{32} y_{1,t-2} - a_{33} i_{3,t-2} - \\
& - a_{41} (m-p)_{3,t-3} - a_{42} y_{3,t-3} - a_{43} i_{3,t-3} \rangle
\end{aligned} \qquad \textbf{(8)}
$$

y expresiones similares para y_t e i_t. Como tanto el producto como la tasa de interés son débilmente exógenos para los parámetros en el modelo de saldos reales (Bucacos, 2003[14]) es correcto incorporar a los términos $\Delta_4\ y_t$ y $\Delta_4\ i_t$ (j y k partirán desde cero y no desde uno) y los términos de corrección de errores solamente estarán en el modelo de saldos reales.

Para las frecuencias 0 y ½, los vectores cointegradores z_1 y z_2 pueden estimarse superconsistentemente por medio de Mínimos Cuadrados Ordinarios, como en el método en dos etapas de Engle-Granger (EG-2E):

$$
\begin{aligned}
z_{1t} &= (m-p)_{1t} - a_{12} y_{1t} - a_{13} i_{1t} \\
z_{2t} &= (m-p)_{2t} - a_{22} y_{2t} - a_{23} i_{2t} \\
z_{3t} &= (m-p)_{3t} - a_{32} y_{3t} - a_{33} i_{31} - (m-p)_{3tt-1} - a_{42} y_{3t-1} - a_{43} i_{3t-1}
\end{aligned}
$$

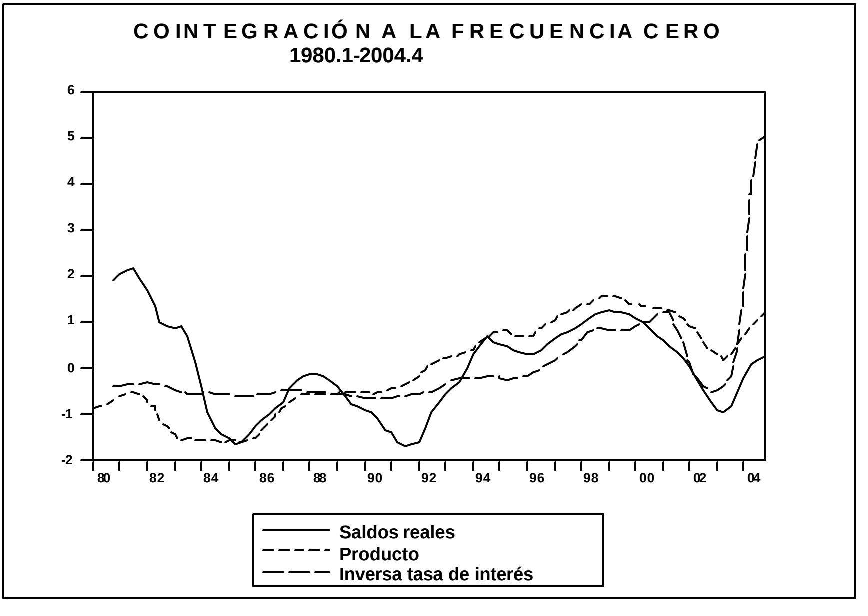
Luego, las pruebas de cointegración se realizan en base a los residuos respectivos. Para el caso de las frecuencias ¼ y ¾, por su parte, como se trata de una relación dinámica y para asegurar una identificación de los

14 Igualmente, se testeó exogeneidad débil del producto y de la tasa de interés en el modelo de saldos reales especificado en variaciones anuales.

parámetros, se elimina el valor rezagado de los saldos reales[15] y la relación cointegradora z_3 se estima a través de la regresión de $(m-p)_{3t}$ sobre (y_{3t}, i_{3t}, y_{3t-1}, i_{3t-1}). Los estimadores así encontrados serán superconsistentes. Del mismo modo, los tests de no cointegración a las frecuencias ¼ y ¾ se practican sobre los residuos de la regresión anterior.

En el cuadro 2, se presentan los resultados de la prueba de cointegración a la frecuencia cero, es decir, en el largo plazo. Es posible rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria en los residuos de dicha relación, al 5%, lo cual estaría validando la presunción de cointegración a la frecuencia cero entre las variables en cuestión. En el largo plazo, parecería que los saldos monetarios reales guardan una relación de equilibrio estable con sus fundamentos, a saber, el producto real y la tasa de interés nominal. Resulta interesante notar que los valores de la elasticidad-producto, de la semielasticidad-tasa de interés y de la tendencia[16], resultan muy similares a los estimados en Bucacos-Licandro (2003), donde se trató a la estacionalidad como un fenómento determinístico.

Gráfica 4. Relación de largo plazo



15 Por más detalles, ver Engle-Granger-Hylleberg -Lee (1993).

16 Solamente se encontró evidencia de la presencia de innovaciones tecnológicas, reflejadas en la variable tendencia, a la frecuencia anual, es decir, en el largo plazo.

Cuadro 2 - TEST DE COINTEGRACIÓN A LA FRECUENCIA 0: EL LARGO PLAZO
Variable dependiente: $(m-p)_1$
Período muestral: 1980.4-2004.4

Regresor	*Coeficiente*	*Error estándar*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Constante	29.39	1.23	23.86	0.00
y_1	0.95	0.06	14.74	0.00
i_1	-0.14	0.03	-4.68	0.00
T	-0.02	0.003	-5.92	0.00

R^2 aj. = 0.97 EER = 0.10 SRC = 0.95 F = 431.50 DW = 0.91

Regresión auxiliar (Dickey-Fuller aumentada): $\Delta u_t = p_1 u_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} b_j \Delta u_{t-j}$

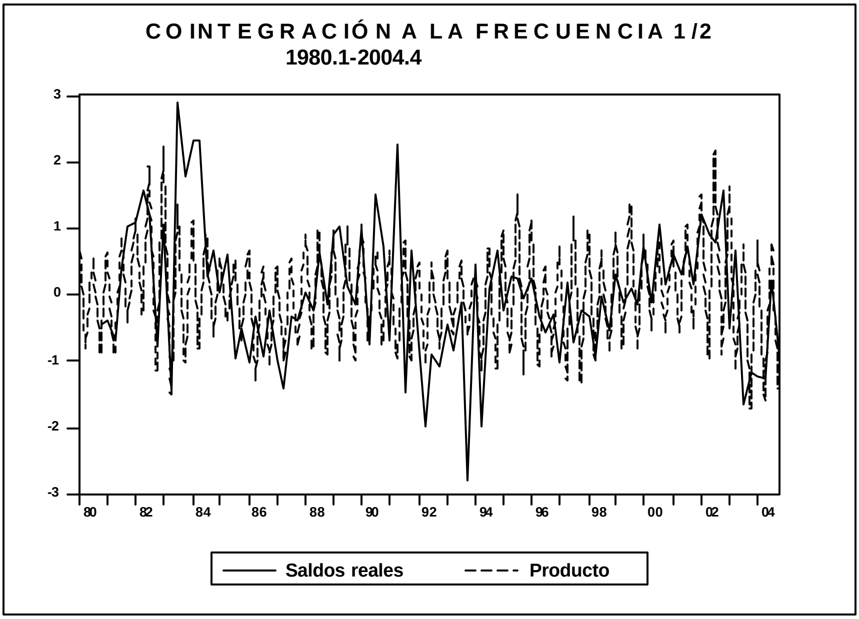
donde u_t son los residuos de la regresión de cointegración (estimada anteriormente).

Regresión auxiliar				**Test de raíz unitaria en los residuos**		
Parte determinística	***Aumentada en***	***R^2 aj.***	***DW***	***"DF" t_{p1}***	***Valores críticos***[2] 5%	1%
No	1, 2, 3, 4, 5	0.69	1.92	*-3.21**	-3.17	-3.77

Notas:
1. Las variables corresponden a las transformaciones de las series originales x_{tj} ajustadas por las raíces unitarias estacionales en la frecuencia 0 (ver sección 2); T es una variable de tendencia, vale cero en 1980.1. Se incluyeron además cuatro variables de quiebre, dos en la ordenada (en 1984.1 y en 1991.2) y dos en la tendencia (en 1992.1 y en 1994.3).
2. Los valores críticos para el test de raíz unitaria corresponden a Engle y Granger (1987) y Engle y Yoo (1987).
3. Se rechaza la hipótesis de no cointegración a la frecuencia 0, con un grado de significación de 5%.

A la frecuencia bianual y con 5% de significación, no puede rechazarse la presencia de cointegración entre los saldos monetarios reales y el producto real, sin la tasa de interés (ver cuadro 3). Este resultado es coherente con el hecho de que la tasa de interés es estacionaria a dicha frecuencia, en tanto que las otras dos series analizadas presentan una raíz unitaria a la frecuencia ½ (ver cuadro 1). La elasticidad-ingreso es un tanto más baja que para la frecuencia anual, como era de esperar, pero se encuentra dentro de valores "estándares". Cabe destacar la presencia de estacionalidad determinística totalmente compensada en el trimestre siguiente.

Gráfica 5. Relación bianual entre saldos reales y producto.



Cuadro 3 - TEST DE COINTEGRACIÓN A LA FRECUENCIA 1/2: BIANUAL
Variable dependiente: $(m-p)_2$
Período muestral: 1980.4-2004.4

Regresor	*Coeficiente*	*Error estándar*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Constante	0.07	0.02	3.55	0.00
y_2	0.59	0.14	4.14	0.00
D1+D3	-0.13	0.04	-3.46	0.00

R^2 aj. = 0.14 EER = 0.07 SRC = 0.42 DW = 2.06

Regresión auxiliar: $(v_t + v_{t-1}) = p_2\ (-v_{t-1}) + \sum_{j=1}^{k} b_j\ (v_{t-j} + v_{t-j-1}) + e_t$

donde v_t son los residuos de la regresión de cointegración (estimada anteriormente).

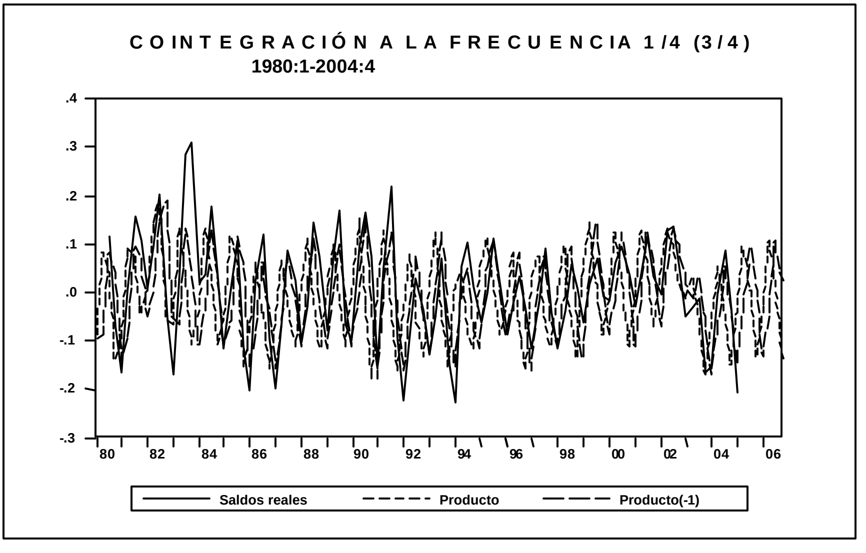
Regresión auxiliar				**Test de raíz unitaria en los residuos**		
Parte determinística	***Aumentada en***	***R^2 aj.***	***DW***	***"DF" t_{p1}***	***Valores críticos*** 5%	1%
No	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0.68	1.87	*-3.90**	-3.17	-3.77

Notas:

1. Las variables corresponden a las transformaciones de las series originales x_{jt} ajustadas por las raíces unitarias estacionales en la frecuencia 1/2 (ver sección 2).
2. Los valores críticos para el test de raíz unitaria corresponden a Engle y Granger (1987) y Engle y Yoo (1987).
3. Se rechaza la hipótesis de no cointegración a la frecuencia ½, con un 1% de significación estadística.

Finalmente, se analiza la posibilidad de cointegración estacional a las frecuencias ¼ y ¾. Cabe recordar que las pruebas realizadas sobre *m-p* y *y* tienen cierta dificultad en separar una raíz unitaria en las frecuencias ¼ y ¾ de un patrón estacional determinístico, en tanto que fueron concluyentes en cuanto a la estacionariedad de la tasa de interés a dichas frecuencias. Los resultados indican rechazo de la hipótesis nula de no cointegración a las frecuencias estacionales ¼ y ¾ entre los saldos reales y el producto real.

Gráfica 6. Relación anual entre saldos reales y producto.



Cuadro 4 - TEST DE COINTEGRACIÓN A LA FRECUENCIA ¼ (Y ¾): ANUAL
Variable dependiente: $(m\text{-}p)_3$
Período muestral: 1980.4-2004.4

Regresor	*Coeficiente*	*Error estándar*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Constante	0.07	0.02	3.81	0.00
y_3	0.58	0.14	4.10	0.00
$y_{3,-1}$	0.42	0.15	2.70	0.01
D1	-0.12	0.03	-3.39	0.00
D2	-0.10	0.03	-3.03	0.00

R^2 aj. = 0.63 EER = 0.06 SRC = 0.40 F = 44.51 DW = 1.10

Regresión auxiliar: $(w_t + w_{t-2}) = p_3(-w_{t-2}) + p_4(-w_{t-1}) + \sum_{j=1}^{k} b_j (w_{t-j} + w_{t-j-2}) + e_t$

donde w_t son los residuos de la regresión de cointegración (estimada anteriormente).

Regresión auxiliar			**Test de raíz unitaria en los residuos**					
Parte determinística	***Aumentada en***	***R^2 aj.***	***Test HEGY***			***Valores críticos***		
			$t_{\pi'3}$	$t_{\pi'4}$	$F_{\pi'3 \cap \pi'4}$	$t_{\pi 3}$, $t_{\pi 4}$	$F_{\pi 3 \cap \pi 4}$	Al
No	1, 2, 3, 4	0.64	-3.63	*-4.64**	*17.73***	-4.18	10.65	5%
						-4.87	14.11	1%

Notas:

1. Las variables corresponden a las transformaciones de las series originales x_{tj} ajustadas por las raíces unitarias estacionales en la frecuencia ¼ (¾) (ver sección 2); T es una variable de tendencia, vale cero en 1980.1.
2. Los valores críticos para el test de raíz unitaria corresponden a Engle y Granger (1987) y Engle y Yoo (1987).
3. Se rechaza la hipótesis de no cointegración en las frecuencias ¼ y ¾, con un 1% de significación estadística.

3.1.3 Estimación

En esta sección, se procederá a la estimación de la segunda etapa del procedimiento de Engle-Granger. Es decir, se ajustará una ecuación del tipo:

$$
\begin{aligned}
\Delta_4 (m-p)_t = {} & \sum_{j=0}^{q} d_j \Delta_4 y_{t-j} + \sum_{k=0}^{p} b_i \Delta_4 i_{t-k} + \\
& + \sum_{n=1}^{u} m_m \Delta_4 (m-p)_{t-n} + \\
& + g_{11} \langle (m-p)_{1,t-1} - a_{12} y_{1,t-1} - a_{13} i_{1,t-1} \rangle + \\
& + g_{12} \langle (m-p)_{2,t-1} - a_{22} y_{1,t-1} \rangle - \\
& - (g_{13} + g_{14} B) \langle (m-p)_{3,t-2} - a_{32} y_{1,t-2} - \\
& - a_{41} (m-p)_{3,t-3} - a_{42} y_{3,t-3} \rangle
\end{aligned}
$$

donde los dos primeros términos señalan el efecto impacto sobre la tasa de cambio (anual) de los saldos monetarios reales, el tercero recuerda al *efecto Koyck*, en tanto que los tres últimos indican las relaciones de cointegración a las frecuencias cero, ½ y ¼ (¾), respectivamente. Dichos vectores corresponden a los residuos de las regresiones efectuadas en la sección anterior, con las series ajustadas por las raíces unitarias estacionales en aquellas frecuencias.

Los resultados expuestos a continuación muestran un ajuste relativamente bueno a los datos muestrales. En efecto, es posible explicar alrededor del 88% de la tasa de variación anual de los saldos monetarios reales, aunque con una desviación estándar de 3.9%. Los errores son relativamente bien comportados (estacionarios, incorrelacionados, homoscedásticos, pero no normalmente distribuidos). Además, debido a la superexogeneidad del producto y de la tasa de interés a la determinación de los parámetros en la ecuación de demanda por saldos reales, no es necesario estimar un vector en corrección de errores estacional, por lo que es correcta la especificación uniecuacional aquí utilizada.

Los datos ajustados estacionalmente[17] (m-p, y, i), están cointegrados a la frecuencia de largo plazo; además, se verificaría cointegración estacional a la frecuencia bianual y a la frecuencia anual entre (m-p) y y . Esto indica que tanto los componentes anuales como los bianuales en los saldos reales y en el producto, son similares (ver gráficas 5 y 6). Sin embargo, persiste un componente determinístico en el patrón estacional de la demanda por saldos reales, recogido en las variables *dummy* estacionales y en *Semana de Turismo*. En efecto, aún considerando tasas de variación anual, la demanda real de dinero crece sistemáticamente durante las vacaciones de Semana de Turismo. Es decir, el componente estacional en la demanda de dinero parece ser un híbrido, pues contiene tanto elementos determinísticos – reflejados en las variables D_i y en *Semana de Turismo* – como elementos estocásticos – reflejados en los vectores cointegradores a las frecuencias bianual y anual:

17 Es decir, los datos ajustados por raíces unitarias estacionarias al sumar cuatro trimestres consecutivos.

$$\begin{aligned}
\Delta_4 (m-p)_t = & -0.18\,((m-p) - 29.39 - 0.95\,y + 0.14\,i + 0.02\,T)_{LP,\,t-1} + \\
& \quad (-0.04) \qquad\qquad (1.23)\quad (0.06)\quad (0.03)\quad (0.003) \\
& -0.47\,((m-p) - 0.07 - 0.59\,y + 0.13\,i)_{BA,\,t-1} \\
& \quad (0.09) \qquad\qquad (0.02)\quad (0.14)\quad (0.04) \\
& -0.60\,((m-p) - 0.07 - 0.58\,y - 0.42\,y_{-1} + 0.12\,D1 + 0.10\,D2)_{A,\,t-2} + \\
& \quad (0.08) \qquad\qquad (0.02)\quad (0.14)\quad (0.15)\quad (0.03)\quad (0.03) \\
& + 0.21\,\Delta_4 (m-p)_{t-2} + 0.65\,\Delta_4 y_t - 0.16\,\Delta_4 i_t + \\
& \quad (0.04) \qquad\qquad (0.09)\qquad (0.05) \\
& + 0.18\,\Delta_4 i_{t-1} - 0.13\,\Delta_4 i_{t-2} + 0.03\,Corrida - 0.18\,Di912 \\
& \quad (0.07) \qquad (0.05) \qquad (0.01) \qquad\qquad (0.02) \\
& - 0.04\,D1 - 0.05\,D2 - 0.02\,D3 + 0.05\,S\,de\,T + e_t \\
& \quad (0.01) \qquad (0.01) \qquad (0.01) \qquad (0.01)
\end{aligned} \tag{9}$$

con diagnósticos:

R^2 aj. = 0.88 ; σ = 3.9 % ; $F_{AR\ 1\text{-}1}$ = 0.27; $F_{AR\ 1\text{-}4}$ = 1.07; J B = 4.61; $F_{ARCH\ 1\text{-}1}$ = 1.56; $F_{ARCH\ 1\text{-}4}$ = 1.02

y donde las series utilizadas fueron: m-p = saldos monetarios reales (M1/IPC), en logaritmos naturales; y = índice de volumen físico del producto bruto interno, en logaritmos naturales; i = tasa de interés nominal, para depósitos en moneda nacional de 1 a 180 días; Co-I_LP= vector cointegrador a la frecuencia cero; Co-I_BA= vector cointegrador a la frecuencia ½; Co-I_A = vector cointegrador a la frecuencia ¼ (¾); Corrida = variable dummy que vale 2 en 1982.4 y en 1983.1, 1 en 1983.2, 2.5 en 2002.3, 0.5 en 2002.4 y 2003.1, 0.2 en 2003.2, 0.1 en 2003.3 y cero en el resto de la muestra; S. de T = variable dummy que vale 1 en el trimestre en el cual la Semana de Turismo tuvo lugar, 0.5 cuando ocupó más de un trimestre y cero en el resto de la muestra.

En el largo plazo, la demanda por saldos reales está determinada por sus fundamentos, producto y tasa de interés; en el corto plazo, se ajustan los errores de pronóstico ocurridos en el período anterior que alejaron a la demanda real efectiva de la deseada. Pero también se ajustan los desvíos que ocurrieron entre los componentes estacionales de la demanda real efectiva y del producto, los cuales se mueven en forma sincrónica en uno y dos ciclos durante un año calendario. De los desvíos ocurridos en el período anterior, es más rápidamente ajustado el correspondiente a la frecuencia ¼ (¾), en tanto que el valor del parámetro de ajuste va cayendo a medida que nos acercamos a la relación de largo plazo; allí, el 18% de los excesos de demanda por saldos reales se ajusta en el período siguiente.

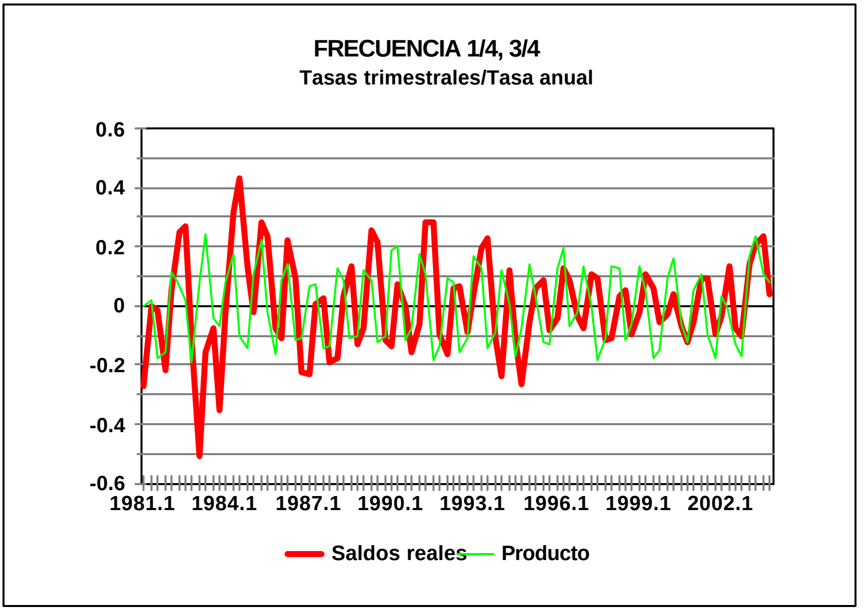
Sin duda, la mayor dificultad se encuentra en la interpretación económica del concepto de cointegración estacional debido a que el filtro utilizado en las series para depurarlas de las raíces unitarias de largo plazo, proviene de la descomposición estadística de ($1\text{-}B^4$) y no de consideraciones de comportamiento.

La inestabilidad vigente en la plaza durante dos episodios puntuales (1982-83; 2002-03) es recogida en la variable dummy Corrida. Además, los efectos impacto de cambios en el producto y en la tasa de interés presentan el signo esperado pero con una diferencia: mientras un cambio contemporáneo en el nivel de actividad (producto) tiene efectos permanentes sobre la tasa de variación anual de la demanda por saldos reales, un cambio en la tasa de interés es disipado inmediatamente.

3.1.4 Conclusiones

Los resultados del análisis de integración estacional indican que *las series analizadas (m-p, y, i) presentarían raíces unitarias en la frecuencia cero*, en tanto que las series (*m-p, y*) presentarían raíces unitarias *también a la frecuencia ½.*. Con respecto a las frecuencias ¼ y ¾, los tests tienen problemas para distinguir entre una raíz unitaria a esas frecuencias y un patrón estacional determinísitico para los saldos reales y el producto real. Además, existen indicios de que habría un polo de atracción en dichas frecuencias (aunque difícil de distinguir en cuál de ellas) y que una combinación lineal de las series en cuestión sería estacionaria. En efecto, para las frecuencias ¼ y ¾, se verifican los requisitos que se detallan en el párrafo siguiente, además de la evolución sincrónica de las tasas de variación trimestral con respecto al promedio del año calendario para las tres series en cuestión.

Gráfica 7



Los resultados del análisis de cointegración estacional corroboran los hallados al estudiar la integración estacional, puesto que se encontró que: primero, los errores de las ecuaciones que recogerían las relaciones "comunes" en cada una de las frecuencias, son estacionarios y, segundo, los vectores cointegradores en la especificación en corrección de errores, son estadísticamente significativos y presentan el signo correcto. Dicha ecuación final tiene un ajuste relativamente satisfactorio aunque presenta un error estándar alto. Por otra parte, solamente cuando se incorporan los tres vectores cointegradores se logra una descripción de la demanda por saldos reales relativamente razonable y los valores proyectados presentan menor sesgo. Finalmente, al encontrarse que aquellos vectores cointegradores no son estadísticamente significativos en VARs para $\Delta_4 y$ y $\Delta_4 i$, se concluye que el enfoque uniecuacional es el indicado para analizar la demanda por saldos reales con cointegración estacional, sin necesidad de recurrir a un sistema de ecuaciones en corrección de errores (VECM)[18] .

18 Se presentan los resultados correspondientes en el Apéndice.

3.1 COINTEGRACIÓN PERIÓDICA

3.2.1 Análisis de las series individuales

En esta sección se investiga si las series individuales (*m-p, y, i*) presentan raíces unitarias en las diferentes estaciones *s*. Franses (1996) aconseja seleccionar primero el orden de autocorrelación periódica, luego testear la variación periódica de los parámetros y finalmente testear la existencia de raíces unitarias. Señala,

> "... debido a que la autocorrelación periódica de la serie en cuestión permite a los parámetros autorregresivos tomar diferentes valores en las diferentes estaciones, parece razonable utilizar un filtro (de diferenciación) que varíe periódicamente para remover la tendencia estocástica. Uno de esos filtros corresponde a la noción de integración periódica (IP). La implicación de la integración periódica es que la tendencia estocástica y las fluctuaciones estacionales no son independientes, en el sentido de que la acumulación de shocks puede cambiar el patrón estacional y que la serie no puede ser descompuesta en dos componentes estrictamente separados de tendencia y estacionalidad." (traducción propia)

Para seleccionar el orden r del modelo PAR(ρ) correspondiente, se puede o bien investigar las propiedades de los residuos estimados a partir de modelos no periódicos o, simplemente, estimar un modelo PAR(ρ), donde r se selecciona utilizando los criterios convencionales de selección de modelos, y luego testear si existe variación periódica en los parámetros autorregresivos. En este trabajo, aplicaremos los dos enfoques.

Cuadro 5 – SELECCIÓN DEL ORDEN AUTORREGRESIVO EN MODELOS PAR(?)
Pruebas basadas en los residuos estimados de modelos AR(k) no periódicos para las series convenientemente transformadas

Variable	Serie	k	Valores de los estadísticos de diagnóstico					?
			$F_{AR,1\text{-}1}$	$F_{AR,1\text{-}4}$	$F_{PIAR,1\text{-}1}$	$F_{PIAR,1\text{-}2}$	F_{SH}	
Saldos reales	Δ_4(m-p)	8	0.11 (0.74)	1.21 (0.31)	4.75**	3.36**	1.18	**2**
Producto	Δ_4y	6	0.86 (0.36)	1.19 (0.32)	0.88	2.16*	2.20	**2**
Tasa de interés	Δ_1i	4	0.06 (0.81)	0.24 (0.91)	2.54*	2.39*	0.65	**2**

Notas:

1. Las transformaciones efectuadas a las series originales dependen de los resultados de las pruebas de raíces unitarias estacionales y no estacionales, efectuadas en la sección 3.1.1.
2. Los estadísticos de diagnóstico corresponden a: autocorrelación residual de orden 1 y de orden 1-4 (con sus cuatro rezagos), $F_{AR,1\text{-}1}$ y $F_{AR,1\text{-}4}$; autocorrelación residual periódica de orden 1 y de orden 1-2, $F_{PIAR,1\text{-}1}$ y $F_{PIAR,1\text{-}2}$ y heteroscedasticidad estacional, F_{SH}.
3. El test de autocorrelación residual periódica se basa en la regresión auxiliar: $\hat{v}_t = \sum_{i=1}^{k} h_t x_{t-i} + \sum_{s=1}^{4} (y_{1s} D_{s,t}\,\hat{v}_{t-1} + \ldots + y_{ms} D_{s,t}\hat{v}_{t-m}) + u_t$

   aplicada sobre los residuos v_j que surgen del ajuste de un modelo AR(k) a la serie x_t, donde $x_t = \Delta_j z_t$. Bajo la hipótesis nula de no autocorrelación periódica de orden m, $\psi_{1s} = \ldots = \psi_{ms} = 0$, el estadístico F correspondiente sigue asintóticamente una distribución F estándar con (4m, n-k-4m) grados de libertad. Los valores críticos son, al 5% y 1% : para los saldos monetarios reales, 2.50 y 3.60 (m = 1), 2.08 y 2.79 (m = 2); para el producto, 2.48 y 3.56 (m = 1), 2.05 y 2.74 (m = 2); para la tasa de interés, 2.48 y 3.56 (m = 1), 2.07 y 2.77 (m = 2).
4. El test de heteroscedasticidad estacional se basa en la regresión auxiliar $\hat{v}_t^2 = w_0 + w_1 D_{1t} + w_2 D_{2t} + w_3 D_{3t} + l_t$. Bajo la hipótesis nula de homoscedasticidad estacional, $w_1 = w_2 = w_3 = 0$, el estadístico F correspondiente sigue una distribución F estándar con (3, n-k) grados de libertad. Los valores críticos son, al 5% y 1%: para los saldos reales, 2.74 y 4.08; para el producto y la tasa de interés, 2.72 y 4.04.

(5) *k* corresponde al orden del proceso autorregresivo AR(k), en tanto que *?* corresponde al orden del proceso autorregresivo periódico PAR(?).

* Significativo al 5%

** Significativo al 1%

De acuerdo al *primer enfoque* anteriormente señalado, los resultados expuestos en el cuadro 6, aunque no muy concluyentes, apuntan hacia la existencia de algún patrón periódico en los residuos estimados. Solamente uno de las pruebas practicadas, la autocorrelación residual periódica, estaría indicando que todas las variables analizadas podrían ser descritas como un PAR(2) al 5%, es decir, un proceso autorregresivo de orden 2, donde los parámetros autorregresivos $\phi_{\rho s}$ varían con la estación (trimestre). Para los saldos reales, dicha especificación sería del tipo:

$$\begin{aligned}(m-p)_t = m_t &+ f_{11}(m-p)_{t-1} + f_{12}(m-p)_{t-1} + f_{13}(m-p)_{t-1} + \\ &+ f_{14}(m-p)_{t-1} + f_{21}(m-p)_{t-2} + f_{22}(m-p)_{t-2} + \\ &+ f_{23}(m-p)_{t-2} + f_{24}(m-p)_{t-2} + e_t \qquad \textbf{(10)}\end{aligned}$$

y algo similar para el producto y la tasa de interés nominal.

El segundo enfoque utilizado para seleccionar el orden en modelos PAR(ρ), consiste en ajustar una ecuación del tipo:

$$x_t = \sum_{s=1}^{4} m_s D_{s,t} + \sum_{s=1}^{4} f_{1,s} D_{s,t}\, x_{t-1} + \ldots + \sum_{s=1}^{4} f_{ps} D_{s,t}\, x_{t-r} \quad \textbf{(11)}$$

siendo x_t[19] la serie original, con s = 1, 2, 3, 4. Se utilizan criterios estándares como AIC (Akaike Information Criteria) y SC (Schwarz Criteria), adaptado al hecho de que se estiman parámetros en las diferentes estaciones. Asimismo, es posible realizar una prueba F que analice la significatividad de parámetros autorregresivos para órdenes superiores a *r*, F_{PAR}. También, es posible testear los residuos para ver si presentan autocorrelación periódica. Franses (1996) recomienda usar SC para seleccionar el orden *r* del modelo, siempre y cuando no sea posible rechazar la hipótesis nula $\phi_{r+1,s} = 0$. Los resultados se exponen en el cuadro 6.

19 Franses (1996) señala que no es necesario diferenciar a priori las series para remover las tendencias estocásticas cuando se está analizando la existencia de periodicidad.

Cuadro 6 – SELECCIÓN DEL ORDEN AUTORREGRESIVO EN MODELOS PAR(?)
Pruebas basadas en la estimación de modelos PAR(?)

Variable	? (2)	$F_{AR,1-1}$	$F_{AR,1-4}$	$F_{ARCH,1-1}$	$F_{ARCH,1-4}$	JB	F_{SH}	$F_{PAR,1}$
m-p	1	2.47 (0.12)	1.33 (0.26)	1.53 (0.22)	0.54 (0.70)	13.41 (0.00)	2.08 (0.11)	27.26** (0.00)
y	1	0.62 (0.43)	1.95 (0.11)	0.92 (0.17)	0.54 (0.70)	45.79 (0.00)	2.21 (0.09)	189.61** (0.00)
i	1	15.48 (0.00)	7.02 (0.00)	15.59 (0.00)	6.98 (0.00)	15.35 (0.00)	1.74 (0.16)	1.10 (0.35)

Notas:

1. Las variables son las series originales de saldos reales, producto real y tasa de interés nominal, las dos primeras en logaritmos naturales.
2. El orden ? fue seleccionado de acuerdo al criterio de información de Schwarz: $SC(r) = n \log \hat{s}^2 + 4r \log n$, siendo n = 4N, el total de la muestra. Los valores de SC(1) y SC(2) hallados, fueron: para los saldos reales, -586.37 y –569.14; para el producto real, -657.04 y –642.00; para la tasa de interés nominal, -493.76 y –488.58, respectivamente. En todos los casos, se recurrió a SC porque no pudo rechazase la hipótesis nula $\phi_{2,s} = 0$.
3. El ajuste logrado para los saldos reales (errores estándar entre paréntesis) es: $(m-p)_t = \hat{m}_s + f_{1s}(m-p)_{t-1} + d_s T_t + \hat{e}_t$, con:
$$\hat{m}_1 = 1.585(0.544) \quad \hat{d}_3 = 0.001(0.0004) \quad \hat{f}_{11} = 0.866(0.048) \quad \hat{f}_{12} = 0.995(0.001)$$
$$\hat{f}_{13} = 0.992(0.002) \quad \hat{f}_{14} = 1.006(0.001)$$
4. El ajuste logrado para el producto (errores estándar entre paréntesis) es: $y_t = f_{1s} y_{t-1} + \hat{d}_2 T_t + \hat{e}_t$, con:
$$\hat{d}_2 = 0.0006(0.0002) \quad \hat{f}_{11} = 0.979(0.002) \quad \hat{f}_{12} = 0.995(0.003)$$
$$\hat{f}_{13} = 0.999(0.002) \quad \hat{f}_{14} = 1.026(0.001)$$
5. El ajuste logrado para la tasa de interés (errores estándar entre paréntesis) es: $i_t = \hat{f}_{1s} i_{t-1} + \hat{e}_t$, con::
$$\hat{f}_{11} = 1.011\ (0.026) \quad \hat{f}_{12} = 0.973\ (0.026)$$
$$\hat{f}_{13} = 0.958\ (0.026) \quad \hat{f}_{14} = 1.012\ (0.027)$$
6. En las columnas tres a ocho se presentan los estadísticos de diagnóstico de las pruebas efectuadas en los residuos de los modelos PAR(?) ajustados para cada variable: F_{AR} (autocorrelación residual), F_{ARCH} (heteroscedasticidad), JB (Normalidad), F_{SH} (heteroscedasticidad estacional).
7. El test de variación periódica en los parámetros autorregresivos realiza una prueba del tipo: H_0; $\phi_{js} = \phi$, para s = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, ..., ?, donde el estadístico F_{PAR} tiene una distribución estándar F(3 ?, n-(4+4?)).
Los valores críticos para el test anterior son: 8,54 (al 5%) y 26,18 (al 1%).

En base a los resultados de las pruebas realizadas bajo este *segundo enfoque*, todo parece indicar que el valor de r se puede fijar igual a 1 en las dos primeras series analizadas[20]. Los análisis de diagnóstico para detectar autocorrelación residual, patrones ARCH, no normalidad y heteroscedasticidad estacional sugieren que modelos PAR(1) proporcionan una descripción relativamente adecuada de esos datos muestrales. Además, los ajustes para los saldos monetarios reales y para el producto real incluyen una tendencia (significativa en el tercer y en el segundo trimestre, respectivamente), lo cual estaría indicando que la tendencia (que puede ser determinística o estocástica) puede tener un impacto en la variación estacional. Por su parte, la hipótesis nula de no periodicidad no puede rechazarse para la tasa de interés. Los residuos de la tasa de interés están serialmente correlacionados, son heteroscedásticos y no se distribuyen normalmente; sin embargo, los parámetros autorregresivos no parecen tener una variación periódica. De todas formas, para asegurarnos de que sea así, se continúa con el procedimiento estándar tal como se describe en el siguiente párrafo.

A continuación, se debe proceder a testear la existencia de raíces unitarias[21]. Para ello, rescribimos cada modelo PAR(1)

$$x_t = a_s \, x_{t-1} + e_t \qquad \textbf{(12)}$$

en su representación de VQ(1)

$$X_T = \Phi_0^{-1} \, \Phi_1 \, X_{T-1} + \Phi_0^{-1} e_T \qquad \textbf{(13)}$$

y analizamos si la raíz de la ecuación característica correspondiente

$$\left| \Phi_0 - \Phi_1 \, z \right| = (1 - a_1 a_2 a_3 a_4) = 0$$

---

20 Se prefieren los resultados obtenidos bajo este segundo enfoque, por ser más confiables.

21 Una serie trimestral x_t se dice que está *periódicamente integrada de orden 1* (PI) cuando se necesita aplicar el filtro $(1-\alpha_s B)$ para remover la tendencia estocástica de x_t, siendo α_s los parámetros estacionalmente variables, con la propiedad de que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 1$ y $\alpha_s \neq \alpha$ para todo $s = 1, 2, 3, 4$. Esta definición incluye los filtros (1-B) y (1+B) que corresponde a la raíz unitaria estacional a la frecuencia bianual. En el caso de tres relaciones de cointegración en X_T, resulta conveniente chequear primero si $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 1$ y luego si $\alpha_s = 1$ o $\alpha_s = -1$. Boswijk y Franses (1996) muestran que, bajo la hipótesis nula $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 1$, los parámetros α_s se pueden estimar superconsistentemente.

se encuentra fuera del círculo unitario, es decir, si $g(\alpha) \angle 1$, con $g(\alpha) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$[22]. Por tanto, se realiza la prueba de hipótesis

$$H_0 : g(a) = \prod_{s=1}^{4} a_s = 1$$

$$H_1 : \left| g(a) \right| \langle 1 \ \text{, donde es periódicamente estacionario}$$

Una vez que no se puede rechazar H_0, el próximo paso es investigar si son válidas las hipótesis

$$H_0 : a_s = 1 \quad para \ s = 1, 2, 3 \qquad (a)$$

$$H_0 : a_s = -1 \quad para \ s = 1, 2, 3 \qquad (b)$$

que, dado $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 1$, implican que o bien $\alpha_4 = 1$ o $\alpha_4 = -1$. La primera, reduce el filtro de diferenciación a (1-B), en tanto que la segunda, a (1+B), que es el filtro correspondiente a una raíz estacional –1. Cuando la hipótesis en (a) no puede rechazarse, el proceso PAR(1) contiene una raíz unitaria no estacional, es decir, se trata de un proceso PAR(1) de una serie I(1), abreviado como PARI. Cuando ambas hipótesis (a) y (b) pueden rechazarse, el modelo PAR(1) es un modelo AR de orden 1 periódicamente integrado, PIAR(1).

Los resultados del método en dos etapas se presentan en el cuadro 8. En primer lugar, no es posible rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria en los tres modelos PAR(1) analizados[23]; en segundo lugar, ni el filtro de diferenciación (1-B) ni el filtro (1+B) parecerían ser los indicados para remover la tendencia estocástica en los saldos reales y en el producto, aunque el filtro (1-B) parecería ser el óptimo para aplicar a la tasa de interés. Por tanto, (*m-p*), *y* podrían ser descriptas como PIAR(1), es decir, procesos autorregresivos de primer orden periódicamente integrados y el filtro de diferenciación apropiado para remover la tendencia estocástica sería $(1 - \hat{a}_s B)$ en cada una de las series, las cuales tendrían una única tendencia estocástica que no correspondería a una raíz unitaria no estacional. Por su parte, i podría ser descripta como un proceso autorregresivo no periódico, con una raíz unitaria no estacional.

22 Algunos valores de a_s pueden ser superiores a la unidad.

23 Es decir, no es posible rechazar la restricción $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 1$.

Cuadro 7 – TEST DE RAÍCES UNITARIAS PERIÓDICAS
Método en dos etapas
Período: 1980.2-2004.4
(n=96; N=24)

Variable	$H_0: g(\alpha)=\Pi\alpha_s=1$ $H_1: \lvert g(\alpha)\rvert<1$				$H_0: \alpha_s=1$		$H_0: \alpha_s=-1$		Tipo[6]
	Valor en la Muestra[2]	Estadísticos[3]			Muestra	Valor crítico[4] F_{1-B}	Muestra	Valor crítico[5] F_{1+B}	
		LR_j	LR_{jt}	$N(g(\alpha)-1)$					
m-p	0.859	5.49	-2.34	-3.39	24.43**	2.72(5%) 4.04(1%)	2732142**	2.72(5%) 4.04(1%)	PIAR(1)
y	0.997	0.74	-0.86	-0.30	81.18**	2.72(5%) 4.04(1%)	1495150**	2.72(5%) 4.04(1%)	PIAR(1)
i	0.953	0.88	-0.94	-4.67	1.33	2.72(5%) 4.04(1%)	5849.95**	2.72(5%) 4.04(1%)	AR(1)

Notas:

(1) Las series son las originales, sin transformación previa.
(2) Corresponde al producto de los parámetros estimados en cada caso. ver notas al cuadro 6.
(3) Corresponden a los estadísticos:

(3.1) Ratio de verosimilitud (LR): $LR_j = n \ln(SCR_0 / SCR_j)$, obtenido al comparar la suma de los cuadrados de los residuos (SCR) del ajuste por MCO de $x_t = \sum_{s=1}^{4} a_s D_{s,t} x_{t-1} + e_t$, con respecto a la SCR del ajuste por MCO, imponiendo H_0: $x_t = a_1 D_{1,t} x_{t-1} + a_2 D_{2,t} x_{t-1} + a_3 D_{3,t} x_{t-1} + (a_1 a_2 a_3)^{-1} D_{4,t} x_{t-1} + e_t$, siendo SCR_0 el valor de la suma del cuadrado de los residuos con restricciones y SCR_i sin restricciones. En ambos casos, se adicionan variables de tendencia e interceptos cuando se necesiten y el subíndice *i=1* indica que no tiene tendencia y el subíndice *i=2* que se incluyeron cuatro variables de tendencia. Solamente para los saldos reales se incorporaron las variables de tendencia.

(3.2) Otro estadístico que puede construirse es, $LR_{ij} = [sign(g(\hat{a})-1)] LR_1^{1/2}$ con g(α) evaluado en H_0.
Los valores críticos para el test al 5 y 10 por ciento son: 12.96 y10.50 (LR_2), -3.41 y –3.12 ($LR_{2\tau}$), 9.24 y 7.52 (LR_1) y -2.86 y –2.57($LR_{1\tau}$). (Franses, 1996).

(3.3) $N(g(\hat{a})-1)$, similar al estadístico en el caso de modelos AR no periódicos, escalado por N para comparar con los valores tabulados en Fuller (1976), tablas 8.5.1 y 8.5.2

(4) Estadísticos correspondientes al test F de restricciones a los parámetros asociados al filtro (1-B), se distribuyen F(3, n-k).
(5) Estadísticos correspondientes a al test F de restricciones a los parámetros asociados al filtro (1+B), se distribuyen F(3, n-k).
(6) Cuando no puede rechazarse H_0: α_s=1, se trata de un proceso PARI, es decir, un proceso PAR(p) para una serie I(1); cuando se rechazan las hipótesis H_0: α_s=1 y H_0: α_s=-1, se trata de un proceso AR de orden *p* periódicamente integrado (PIAR(*p*)).

* Significativo al 5%
** Significativo al 1%

3.2.2 Análisis de cointegración periódica

En esta sección se analizará la posibilidad de que los saldos reales, el producto real y la tasa de interés nominal puedan estar periódicamente cointegrados, es decir, se intentará encontrar relaciones estables en el largo plazo entre los saldos reales y sus fundamentos pero donde el vector cointegrador varíe con la estación y el parámetro de ajuste también sea periódico[24].

Como fuera señalado en la sección 2.3, primeramente planteamos la especificación en corrección de errores periódica[25]:

$$\Delta_4 (m-p)_t = \Sigma D_{st}\, l_s ((m-p)_{t-4} - q_{1s}\, y_{t-4} - q_{2s}\, i_{t-4}) +$$

$$+ g\, \Delta_4 (m-p)_{t-1} + b_1 \Delta_4 y_t + b_2 \Delta_4 i_t + e_t \qquad \textbf{(14)}$$

y luego testeamos la existencia de cointegración periódica parcial o total. Los resultados se presentan en el cuadro 8.

24 Franses (1996), distingue entre modelos de cointegración periódica (PCM) y modelos de corrección de error periódicos (PECM); un PCM presenta variación estacional en las relaciones cointegradoras, en tanto que un PECM presenta variación estacional solamente en los parámetros de ajuste.

25 Adicionalmente, se incluyó una constante y una variable de tendencia en las relaciones de largo plazo para cada uno de los trimestres. Cabe recordar que *i* no sería un proceso autorregresivo periódico.

Cuadro 8. ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN PERIÓDICA
Variable dependiente: ?$_4$(m-p)
Período: 1980.2-2004.4

Test de cointegración parcial

H_0: $d_s = 0$, H_1: d_s ^{1} 0, con d_s = (?$_s$, -?$_s$?$'_s$), s = 1, 2, 3, 4

Valor s	W_s[1]	*Valor crítico*[3]	*Resultado*
1	27.40	17,11	Se rechaza H_0 de no Co-I periódica en 1er trimestre
2	86.29	17,11	Se rechaza H_0 de no Co-I periódica en 2do trimestre
3	27.79	17,11	Se rechaza H_0 de no Co-I periódica en 3er trimestre
4	25.35	17,11	Se rechaza H_0 de no Co-I periódica en 4to trimestre

Test de cointegración total

H_0: $d_s = (d_1', \ldots' d_4') = 0$, H_1: d_s ^{1} 0, con d_s = (?$_s$, -?$_s$?$'_s$), s = 1, 2, 3, 4

W[2]	*Valor crítico*[3]	*Resultado*
151.80	51,73	Se rechaza H_0 de no Co-I periódica total

Notas:

(1) Test de Wald para cointegración parcial correspondiente al período s:

$W_s = (n-l)\dfrac{SCR_{0s} - SCR_1}{SCR_1}$ donde n es el número de observaciones, l es el número de parámetros estimados bajo H_1, SCR_{0s} y SCR_1 son la suma de los cuadrados de los residuos de las regresiones ajustadas por MCO a las ecuaciones bajo H_{0s} y H_1, respectivamente.

(2) Test de Wald para cointegración total: $W_s = (n-l)\dfrac{SCR_0 - SCR_1}{SCR_1}$ donde n es el número de observaciones, l es el número de parámetros estimados bajo H_1, SCR_o y SCR_1 son la suma de los cuadrados de los residuos de las regresiones ajustadas por MCO a las ecuaciones bajo H_0 y H_1, respectivamente.

(3) Las distribuciones asintóticas para los estadísticos de los tests de Wald tanto parcial como total no son estándares sino que fueron derivados por Boswijk y Franses (1995). En esta tabla se reportan los valores para tres variables (dos débilmente exógenas) y un nivel de significación de 5%.

3.2.3 Estimación

La evidencia empírica para el período 1980:1-2004:4 permite rechazar la hipótesis de no cointegración periódica total entre los saldos reales, el producto real y la tasa de interés nominal. Por otro lado, no permite rechazar ciertas restricciones sobre los parámetros de ajuste y las elasticidades de largo plazo. Finalmente, arribamos a la siguiente especificación PCM (con desviaciones estándares entre paréntesis)[26] :

26 Se incorporaron variables de quiebre en las relaciones de largo plazo, en la ordenada (1983:3, 1990:3, 1993:2) para todos los trimestres y en la pendiente (1992:2) para el tercer trimestre. En la especificación final, además, se detectaron tres situaciones atípicas (1983:4, 1991:2 y 1993:4).

$$\Delta_4 (m-p)_t = -0.02 - 0.49\,(m - p - 8.71 + 0.0047\,T - 0.68\,y + 0.13\,i)_{1t-4} -$$
$$(0.005)\ \ (0.181)\qquad (0.235)\ \ (0.0004)\ \ (0.051)$$

$$-(m - p - 7.17 + 0.0040\,T - y + 0.13\,i)_{2t-4} +$$
$$(0.011)\ \ (0.0004)$$

$$-\,0.49(m - p - 7.82 + 0.0045\,T - 0.85\,y + 0.13\,i)_{3t-4} - ($$
$$(0.181)\qquad (0.266)\ \ (0.001)\ \ (0.059)$$

$$-(m - p - 7.65 + 0.0035\,T - 0.88\,y + 0.13\,i)_{4t-4} +$$
$$(0.214)\ \ (0.0003)\ (0.046)$$

$$+0.56\Delta_4 (m-p)_{t-1} + 0.41\Delta_4\, y_t - 0{,}11\Delta_4 i_t + 0{,}04\ Corrida -$$
$$(0.084)\qquad\qquad (0.101)\qquad (0.025)\ \ (0.0067)$$

$$-\,0{,}20(\Delta_4 (m-p)_{t-4} + 0.23\Delta_4 (m-p)_{t-5} +$$
$$(0.093)\qquad\qquad (0.085)$$

$$+\ 0{,}02\ S\ de\ T + e_t \qquad \textbf{(15)}$$
$$(0.010)$$

con diagnósticos

$$R^2 aj = 0.90;\quad s = 3.6\%;\quad F_{AR,1-1} = 0.99;\quad F_{AR,1-4} = 1.00;\quad JB = 1.25;$$

$$F_{ARCH,1-1} = 1.36;\quad F_{ARCH,1-4} = 0.14$$

que indican un buen ajuste a los datos, aunque con una desviación estándar importante y errores relativamente bien comportados (incorrelacionados, estacionarios, homoscedásticos pero no normalmente distribuidos). Además, los coeficientes de ajuste son significativos y estrictamente negativos.

Se testea la exogeneidad débil del ingreso y la tasa de interés para la determinación de los parámetros de largo plazo. Para ello, se regresiona un modelo univariado AR(6) para $\Delta_4 y_t$ y otro AR(5) para $\Delta_4 i_t$, adicionándoles a cada uno los vectores cointegradores de la especificación PCM. En ambos, el valor del estadístico F de significación conjunta es inferior al valor de tablas al 1%, por lo que no puede rechazarse la hipótesis de exogeneidad débil del producto y la tasa de interés para la determinación de los parámetros de largo plazo[27]. Por tanto, el enfoque uniecuacional seguido parece apropiado.

En el cuadro 9 se presentan los resultados de los tests de restricciones sobre los parámetros. Puede observarse que: **(a)** los coeficientes de ajuste reflejan costos de ajuste variables según el trimestre pero son iguales en el segundo y cuarto; **(b)** la elasticidad-ingreso de largo plazo no es la misma en todos los trimestres, sino que es más alta en el segundo y el cuarto (vinculadas quizá al pago del medio aguinaldo); **(c)** la semielasticidad-tasa de interés de largo plazo es la misma en todos los trimestres (como era de esperar, ya que la tasa de interés es un proceso AR(1)) y **(d)** la variable tecnológica afecta más a la demanda de dinero a mitad de año. Esto significa que las relaciones objetivo son variables reflejando preferencias cambiantes de acuerdo al trimestre.

Cuadro 9. RESTRICCIONES SOBRE LOS PARÁMETROS
Variable dependiente: $?_4(m\text{-}p)_t$
Período: 1980.2-2004.4

Restricción	***Valor en la muestra[2]***	***Valor critico[3]***	***Resultado***
H_0: $?_1 = ?_3$, $?_2 = ?_4 = 1$	0.48	4.20	No se rechaza H_0 de igualdad de coeficientes de ajuste en algunos trimestres.
H_0: $?_{21} = ?_{22} = ?_{23} = ?_{24}$	0.64	4.20	No se rechaza H_0 de igualdad de semielasticidad tasa de interés de largo plazo en todos los trimestres.
H_0: $?_1 = ?_3$, $?_2 = ?_4$ $?_{21} = ?_{22} = ?_{23} = ?_{24}$	0.60	3.18	No se rechaza H_0 de igualdades en coeficientes de ajuste y en semi elasticidades-tasa de interés en el largo plazo.

Notas:
1. Se realizaron pruebas F estándar para testear la significatividad de las restricciones sobre los parámetros de la ecuación periódicamente cointegrada.
2. Corresponden a una prueba F estándar.
3. Corresponden al 5% de nivel de significación de una distribución F.

27 Boswijk (1994) demuestra que, dada cointegración, el test de verosimilitud para la hipótesis nula de exogeneidad débil, $\left[{(n-l)}/{h}\right]\left[{(SCR_1 - SCR_0)}/{SCR_0}\right]$ donde SCR_1 y SCR_0 son la suma de los cuadrados de los residuos bajo H_0 y H_1 respectivamente, se distribuye asintóticamente como X^2 (4) en el caso de cointegración periódica total. El valor en la muestra fue 1.26 para el producto y de 1.79 para la tasa de interés, con un valor crítico de 13.3 al 1% en ambos casos. Ver apéndice.

Sigue presente la variable “Corrida”, que captura movimientos atípicos en la demanda de dinero ocurridos en dos momentos puntuales en la muestra disponible: 1982-83 y 2002-03.

3.2.4 Conclusiones

En resumen, es posible describir adecuadamente bien el comportamiento de la demanda por saldos reales a través de un modelo de cointegración periódica. Debido a que las series están transformadas a logaritmos, el modelo final de cointegración periódica presenta cuatro relaciones objetivo en el largo plazo, de la forma:

$$\frac{M}{P} = 6448\ Y^{0,68} e^{-0,13i}\, e^{-0,004\,T} \quad \text{en el primer trimestre}$$

$$\frac{M}{P} = 1018\ Y\ e^{-0,13i}\, e^{-0,004\,T} \quad \text{en el segundo trimestre}$$

$$\frac{M}{P} = 2709\ Y^{0,85} e^{-0,13i}\, e^{-0,005\,T} \quad \text{en el tercer trimestre}$$

$$\frac{M}{P} = 1647\ Y^{0,88} e^{-0,13i}\, e^{-0,004\,T} \quad \text{en el cuarto trimestre}$$

Significa que, ceteris paribus, un cambio en la tasa de interés (o en el ingreso) logra su mayor impacto de largo plazo en el primer trimestre; asimismo, el mayor impacto de largo plazo sobre la demanda real de dinero de un cambio en el ingreso no se observa en el cuarto trimestre sino en el primero, a pesar de presentar una elasticidad-ingreso un tanto menor. Sin embargo, en el corto plazo, el ajuste de cualquier desequilibrio monetario es más rápido en el segundo y en el cuarto trimestres que en los otros dos, por lo que un exceso de demanda provocado por aumentos no previstos en el nivel de ingreso (o caídas no previstas en la tasa de interés) requiere un mayor aumento de la oferta real en el segundo y en el cuarto trimestres (del año siguiente) que en el primero y el tercero, ya sea vía mayor expansión monetaria o menor inflación o una combinación de ambos.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo se ha abordado el tema de la estacionalidad en referencia a la demanda por saldos reales en Uruguay en el período 1980.1-2004.4 y se lo ha tratado como un fenómeno estocástico en lugar de determinístico. Mientras la estacionalidad totalmente determinística puede ser perfectamente pronosticada ya que nunca cambiará de forma, no sucede lo mismo cuando aquélla es estocástica ya que los patrones estacionales variables de los fundamentos de la demanda real de dinero pueden o no coincidir en el corto plazo más allá de la estabilidad de la relación de largo plazo que las ata. Los modelos estimados pasando por alto la naturaleza específica del componente estacional pueden dar como resultado estimaciones inconsistentes, errores en la inferencia estadística y sesgos en las medidas de política económica tomadas en base a ellos.

Siguiendo a la literatura relevante, se utilizaron dos metodologías diferentes. Una de ellas trata de encontrar movimientos comunes en los patrones estacionales variables de un grupo de series, las que estarían estacionalmente cointegradas (*cointegración estacional, SC*); el otro enfoque se concentra en encontrar relaciones estables pero estacionalmente variables en el largo plazo y coeficientes de ajuste que pueden variar con la estación (*cointegración periódica, PC*). Los análisis efectuados sobre las series involucradas señalan la posibilidad de que los saldos reales, el producto real y la tasa de interés nominal estén tanto estacional como periódicamente cointegrados. En efecto, ha sido posible lograr ecuaciones bien especificadas[28] que explican razonablemente bien la evolución de la demanda real de dinero, aunque con errores estándares relativamente altos. Sin embargo, el enfoque de cointegración periódica resulta ser mucho más intuitivo que el de cointegración estacional. Ello se debe a que, mientras SC se basa en una descomposición meramente estadística del filtro $(1\text{-}B^4)$ y no en consideraciones de comportamiento, PC mantiene la estructura típica de los modelos de cointegración - en los cuales se presentan y estiman conjuntamente la relación de equilibrio y la dinámica de corto plazo – y plasma nítidamente el efecto de los patrones estacionales variables sobre las relaciones de largo plazo y sobre la velocidad del ajuste hacia el equilibrio.

28 Siendo los saldos reales los que realizan el ajuste, no el producto ni la tasa de interés, los que serían débilmente exógenos para la determinación de los parámetros de la demanda real de dinero.

Bajo ambos enfoques, sin embargo, las estimaciones apuntan que el componente estacional en la demanda por saldos reales en Uruguay, parecería ser un híbrido: determinístico por una parte (efecto recogido en la variable *Semana de Turismo* y en las *dummies* estacionales) y estocástico por otra (efecto recogido en los vectores cointegradores a la frecuencia anual y bianual en SC y en las diferentes elasticidades de largo plazo y en los coeficientes de ajuste en PC). Asimismo, parecería que los movimientos estacionales presentes en los saldos reales estarían vinculados a los del producto (y el cambio tecnológico), pues dicho componente no estaría presente en la tasa de interés.

La selección de un método determinado para tratar el componente estacional en la demanda de dinero no es una tarea trivial. En el ejercicio que abordamos aquí, el modelo PC tenía el menor valor del estadístico de Akaike, el mayor valor del estadístico R^2 ajustado y la menor desviación estándar, además de ofrecer una explicación relativamente sencilla de las "fuentes" de variación anual de los saldos reales. No obstante, resulta importante considerar además el comportamiento predictivo del mismo durante un período razonable, ya que se la pretende utilizar como herramienta de pronóstico. En el cuadro 10 se presentan los resultados de un ejercicio de simulación para el período 2005:1-2005:3, en base a los datos ajustados para 1980:1-2004:4 utilizando los enfoques de cointegración estacional (ecuación 9) y de cointegración periódica (ecuación 15).

Cuadro 10. BONDAD PREDICTIVA DE LOS MODELOS ESTIMADOS
(Modelos 1980:1-2004:4, proyecciones 2005:1-2005:3)

Trimestre	Cointegración Estacional[1]	Cointegración Periódica[1]	Valor efectivo[1]
2005.1	15,5	10,6	12,5
2005.2	9,0	14,2	13,6
2005.3	3,8	16,5	17,9
Estadístico			
EAM	6801,1	1247,6	
RECM	8100,3	1351,3	
EAMP	6,21	1,12	
CT	3,7e-02	1,2e-02	

Notas:

1. En tasas de variación anual porcentual, al trimestre que se presenta en la primer columna.
2. Se calcularon los siguientes estadísticos, donde $j = T+1,...,T+h$ son los períodos de proyección fuera de la muestra; $\hat{y}_t$, y_t, son el valor proyectado y efectivo respectivamente:

(2.1) EAM es el error absoluto medio, calculado como: $EAM = \sum_{t=T+1}^{T+h} \left| \hat{y}_t - y_t \right| / h$

(2.2)RECM es la raiz del error cuadrático medio, calculado como:

$$RECM = \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{h}}$$

(2.3) EAMP es el error absoluto medio porcentual, calculado como:

$$EAMP = 100 * \sum_{t=t+1}^{T+h} \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right| / h$$

(2.4) CT es el coeficiente de Theil, calculado como: $CT = \dfrac{\sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \left(\hat{y}_t - y_t \right)^2 / h}}{\sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \hat{y}_t^2 / h} + \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} y_t^2 / h}}$

Mientras los dos primeros estadísticos, que están expresados en magnitudes absolutas, dependen de la escala de la variable dependiente, los dos últimos son invariantes a la escala. El error absoluto medio porcentual vincula el error de predicción con el valor efectivo de la variable y el coeficiente de Theil está definido de modo de variar entre 0 y 1, entendiéndose que cuanto más cercano a 0 mejor será la predicción.

Puede observarse que tanto el EAMP como el CT sugieren que el modelo que utiliza el enfoque de cointegración periódica permite realizar predicciones con menor error relativo (aunque se necesitarían más puntos de comparación para llegar a un diagnóstico más concluyente). Esta particularidad es otro elemento a favor del enfoque PCM para el tratamiento de la estacionalidad estocástica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boswijk, H. Peter, 1994. *"Testing for an unstable root in conditional and structural error correction models"* Journal of Econometrics, 63: 37-60.

Boswijk, H. Peter y Philip Hans Franses, 1996. *"Unit roots in periodic autoregressions"*, Journal of Time Series Analysis.

Bucacos, Elizabeth y Gerardo Licandro, 2003. *"La demanda por saldos reales en Uruguay: 1980.1-2003.4"*, Revista de Economía, Volumen 10, Nº 2, Segunda Época, Noviembre 2003.

Dickey, David A., D. P Hasza y Wayne A. Fuller, 1984. *"Testing for unit roots in seasonal time series"*, Journal of American Statistical Association 76, 355-367.

Engle, Robert F. y Clive W.J. Granger, 1987. *"Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing"*, Econometrica, 55: 251-76.

Engle, Robert y B. S. Yoo, 1987. *"Forecasting and testing in cointegrated systems"*, Journal of Econometrics 35, 143-159.

Engle, Robert F., Clive W.J. Granger, Svend Hylleberg y H.S. Lee, 1993. *"Seasonal cointegration. The Japanese consumption function"*, Journal of Econometrics 55, 275-298.

Franses, Philip Hans, 1996. *"Periodicity and stochastic trends in economic time series"*, Oxford University Press.

Fuller, Wayne. A., 1976. *"Introduction to statistical Time Series"*, New York: John Wiley.

Hamilton, James D., 1994 . Time series analysis, Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Hylleberg, Svend; Engle, Robert F.; Granger, Clive y Yoo, 1990. *"Seasonal integration and cointegration"*, Journal of Econometrics 44,. 215-238.

APÉNDICE

I. COINTEGRACIÓN ESTACIONAL

Cuadro A.1 – EXOGENEIDAD DÉBIL DEL PRODUCTO

Variable dependiente: $\Delta_4 y$

Período muestral: 1981.3-2005.1

Errores estándar y covarianzas robustos (White)

Variable	Coeficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
Co-I_LP$_{-1}$	0.05	0.03	1.38	0.17
Co-I_BA$_{-1}$	-0.06	0.07	-0.98	0.33
Co-I_A$_{-1}$	-0.10	0.06	-1.73	0.09
$\Delta_4 y_{-1}$	0.81	0.12	6.61	0.00
$\Delta_4 y_{-2}$	0.28	0.15	1.89	0.06
$\Delta_4 y_{-3}$	-0.05	0.11	-0.49	0.62
$\Delta_4 y_{-4}$	-0.49	0.11	-4.19	0.00
$\Delta_4 y_{-5}$	0.20	0.11	1.80	0.07
D1	0.01	0.01	1.59	0.11
D2	0.03	0.01	3.31	0.00
S. de Turismo	-0.03	0.01	-3.15	0.00

R^2 aj. = 0.77 EER = 3.3% SRC = 0.0923 DW = 2.02 Akaike[2] = -3.8929 (-3.9157)

Notas:

1. Las series son las utilizadas durante todo el presente trabajo.
2. Valor del estadístico Akaike correspondiente a la regresión en la cual se excluyen los tres vectores cointegradores a diferentes frecuencias, indicando un mejor ajuste sin los mismos.

Cuadro A.2 – EXOGENEIDAD DÉBIL DE LA TASA DE INTERÉS

Variable dependiente: $\Delta_4 i$

Período muestral: 1981.3-2005.1

Errores estándar y covarianzas robustos (Bollerslev-Wooldrige)

Variable	Coeficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
Co-I_LP$_{-1}$	-0.01	0.10	-0.14	0.89
Co-I_BA$_{-1}$	0.26	0.16	1.60	0.11
Co-I_A$_{-2}$	0.02	0.21	0.09	0.93
$\Delta_4 i_{-1}$	1.23	0.13	9.59	0.00
$\Delta_4 i_{-2}$	-0.30	0.19	-1.60	0.12
$\Delta_4 i_{-3}$	-0.03	0.14	-0.20	0.84
$\Delta_4 i_{-4}$	-0.68	0.14	-4.95	0.00
$\Delta_4 i_{-5}$	0.74	0.18	4.04	0.00
$\Delta_4 i_{-6}$	-0.26	0.13	-1.95	0.05

R^2 aj. = 0.83 EER = 8.4% SRC = 0.5815 DW = 2.17 Akaike[2] = -2.0173 (-2.0912)

Notas:

1. Las series son las utilizadas durante todo el presente trabajo.
2. Valor del estadístico Akaike correspondiente a la regresión en la cual se excluyen los tres vectores cointegradores a diferentes frecuencias, indicando un mejor ajuste sin los mismos.

Cuadro A.3 – EXOGENEIDAD DÉBIL DEL PRODUCTO

Variable dependiente: $\Delta_4 y$

Período muestral: 1981.3-2005.1

Errores estándar y covarianzas robustos (White)

Variable	Coeficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
Constante	0.009	0.004	1.99	0.05
S. de T	-0.02	0.009	-2.15	0.03
Co-I_1T-4	0.004	0.201	0.02	0.98
Co-I_2T-4	-0.17	0.181	-0.94	0.35
Co-I_3T-4	0.20	0.186	1.06	0.29
Co-I_4T-4	-0.23	0.242	-0.96	0.34
$\Delta_4 y_{-1}$	0.78	0.113	6.91	0.00
$\Delta_4 y_{-2}$	0.34	0.133	2.54	0.01
$\Delta_4 y_{-3}$	0.03	0.127	0.21	0.83
$\Delta_4 y_{-4}$	-0.57	0.125	-4.55	0.00
$\Delta_4 y_{-5}$	0.11	0.134	0.79	0.43
$\Delta_4 y_{-6}$	0.15	0.108	1.35	0.18

R^2 aj. = 0.73 EER = 3.5% SRC = 0.0945 DW = 1.84 Akaike = -3.7539 (-3.8064[2])

Notas:

1. Las series son las utilizadas durante todo el presente trabajo. Co-I_xT se refiere al residuo del vector cointegrador correspondiente al trimestre x, con x = 1, 2, 3, 4.
2. Valor del estadístico Akaike correspondiente a la regresión en la cual se excluyen los cuatro vectores cointegradores, indicando un mejor ajuste sin los mismos.
3. Test de Wald: F = 0.73, rechazado al 1%.

Cuadro A.4 – EXOGENEIDAD DÉBIL DE LA TASA DE INTERÉS

Variable dependiente: $\Delta_4 i$

Período muestral: 1981.3-2005.1

Errores estándar y covarianzas robustos (White)

Variable	Coeficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
Co-I_1T-4	-0.78	0.47	-1.65	0.10
Co-I_2T-4	1.11	0.43	*2.57*[(3)]	0.01
Co-I_3T-4	0.11	0.49	0.22	0.83
Co-I_4T-4	0.78	0.55	1.41	0.16
$\Delta_4 i_{-1}$	1.22	0.09	12.90	0.00
$\Delta_4 i_{-2}$	-0.22	0.13	-1.64	0.10
$\Delta_4 i_{-3}$	0.05	0.14	0.39	0.70
$\Delta_4 i_{-4}$	-0.75	0.14	-5.55	0.00
$\Delta_4 i_{-5}$	0.56	0.10	5.45	0.00

R^2 aj. = 0.84 EER = 8.3% SRC = 0.5649 DW = 1.93 Akaike=-2.0464 (-2.0046[2])

Notas:

1. Las series son las utilizadas durante todo el presente trabajo. Co-I_xT se refiere al residuo del vector cointegrador correspondiente al trimestre x, con x = 1, 2, 3, 4.
2. Valor del estadístico Akaike correspondiente a la regresión en la cual se excluyen los tres vectores cointegradores a diferentes frecuencias, indicando en el margen un mejor ajuste con los mismos. Entonces, se realiza el test de Wald (F = 2.84) rechazado al 5%.
3. Los errores no se distribuyen normalmente, por lo que los valores críticos deben ser mayores.