CONTRIBUCIONES CIENTÍFICAS
EN HONOR DE MIRIAN ANDRÉS GÓMEZ
(Laureano Lambán, Ana Romero y Julio Rubio, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2010.

CONVEXIDAD PSEUDO-UNIFORME EN H^p

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ Y JUDIT MÍNGUEZ CENICEROS

Mirian, te echamos de menos

Resumen. Extendemos los teoremas de Newman y Keldysh al comportamiento de sucesiones de funciones en H^p, $H^p(\mu)$, $H^p(\mathbb{D}^N)$ y $H^p(S)$ con S un semi-plano, donde $0 < p < \infty$, lo que explica algunas propiedades geométricas de los discos en esos espacios.

Abstract. We extend Newman and Keldysh theorems to the behavior of sequences of functions in H^p, $H^p(\mu)$, $H^p(\mathbb{D}^N)$ and $H^p(S)$ with S half-plane, where $0 < p < \infty$, which explain geometric properties of discs in these spaces.

1 Introducción

En este trabajo extendemos los teoremas de Newman y Keldysh sobre pseudo-convexidad a espacios H^p, $0 < p < \infty$, $H^p(\mu)$, $0 < p < \infty$, con μ medida de Szegő en $\mathbb{D}$, a espacios $H^p(S)$, $0 < p < \infty$, con S el semiplano y a espacios $H^p(\mathbb{D}^N)$, $0 < p < \infty$, con $\mathbb{D}^N$ el polidisco.

Sabemos que los espacios H^p con $1 < p < \infty$ son localmente uniformemente convexos. Para $p = 1$, Newman probón en [8] el teorema siguiente:

Teorema 1.1. *Sean* $\{f_n\}$, $f_n \in H^1$ *y* $f \in H^1$. *Si*

a) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$,
b) $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ *uniformemente en cada subconjunto compacto del disco unidad,* $\mathbb{D}$,

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Newman se refiere a esta propiedad como *convexidad pseudo-uniforme*. Lo que aquí hacemos es extender esta propiedad, no sólo a H^p, con $0 < p < 1$, sino a distintas generalizaciones de H^p. Extenderemos también el teorema de Keldysh, que es otro teorema muy útil para obtener convergencia en norma. Empezaremos demostrando los teoremas en los espacios de Hardy, es decir, H^p, $0 < p < \infty$; después los generalizaremos a espacios $H^p(\mu)$, $0 < p < \infty$, con μ una medida sobre el círculo satisfaciendo la condición de Szegő; en la sección 3, estudiaremos los teoremas para espacios $H^p(\mathbb{D}^N)$, $0 < p < \infty$, con $\mathbb{D}^N$ el polidisco y acabaremos estudiando los espacios $H^p(S)$, $0 < p < \infty$, con S el semiplano.

Key words and phrases. Hardy spaces, Pseudo-uniform Convexity.
Research was supported by grant MTM2006-13000-C03-03 of Dirección General de Investigación.

2 Espacios H^p

Si f es continua en $\mathbb{D}$, m la medida de Lebesgue en la circunferencia unidad, $\mathbb{T}$, denotamos por f_r la función en $\mathbb{T}$ definida por $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ con $0 \leq r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y

$$\|f\|_{p,\,r} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f_r|^p dm\right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty,\,r} = \sup_{0\leq\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})|, \quad \|f\|_{0,\,r} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \log^+ |f_r| dm\right\},$$

donde

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x, & \text{si } \log x \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\|f\|_p = \sup\{\|f\|_{p,\,r} : 0 \leq r < 1\}.$$

Definimos los espacios H^p como

$$H^p = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|_p < \infty\}, \quad \text{si } 0 < p \leq \infty$$

y

$$N = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|_0 < \infty\}, \quad \text{si } p = 0,$$

donde $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ es el espacio de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$. Un estudio detallado sobre los espacios de Hardy, H^p, y sus propiedades puede encontrarse en [4].

Damos la primera generalización del teorema de Newman, se trata de probar que H^p es pseudo-uniformemente convexo para $0 < p < \infty$.

Teorema 2.1. *Sean $\{f_n\}$ con $f_n \in H^p$ y $f \in H^p$, $0 < p < \infty$. Si*

a) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$,

b) $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ *uniformemente en cada subconjunto compacto de* $\mathbb{D}$,

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0. \tag{1}$$

Para demostrar el teorema vamos a necesitar los lemas siguientes.

Lema 2.1 ([2], pág. 86)**.** *Sea B un subconjunto medible de la recta real y sean φ_n, $\varphi \in L^p(B)$ tales que $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_p = 0$, entonces existe $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\in\Lambda} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, c.t.p. en B.*

Lema 2.2 ([4], pág. 21)**.** *Sea B un subconjunto medible de la recta real y sea $\varphi_n \in L^p(B)$, $0 < p < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, c.t.p. en B, $\varphi \in L^p(B)$ y $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_p = \|\varphi\|_p$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_p = 0.$$

Demostración (Teorema 2.1). Si $f \equiv 0$ el teorema es obvio, luego suponemos $f \not\equiv 0$.
Empezamos estudiando el caso $p = 2$. Por b)

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{2,r} = \|f\|_{2,r},$$

ahora bien,

$$\left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{2,r} \le \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_2 \le \frac{\|f_n\|_2 + \|f\|_2}{2}. \tag{2}$$

Luego

$$\|f\|_{2,r} = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{2,r} \le \limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_2$$

y entonces

$$\|f\|_2 = \sup_r \|f\|_{2,r} \le \limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_2. \tag{3}$$

Combinando a), (2) y (3), tenemos $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n+f}{2} \right\|_2 = \|f\|_2$.
Ahora aplicando la identidad del paralelogramo probamos el teorema para $p = 2$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} (2\|f_n\|_2^2 + 2\|f\|_2^2 - \|f_n + f\|_2^2) = 0.$$

Pasamos ahora al caso $p \neq 2$. Por el lema 2.2, si a) se cumple y para cualquier $\Lambda \subset \mathbb{N}$, existe $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que

$$\lim_n f_n(z) = f(z), \ \textit{c.t.p.}\ z \in \mathbb{T},\ n \in \Lambda', \tag{4}$$

entonces tenemos (1). Luego basta demostrar (4).
Supongamos que $f_n(z) \neq 0$ para $z \in \mathbb{D}$, entonces por el teorema de Hurwitz, [3], pág. 152, $f \equiv 0$ o f no se anula. Como $f \not\equiv 0$, tenemos que f no se anula. Luego $f_n = h_n^{2/p}$, con $h_n \in H^2$ y $\|h_n\|_2^2 = \|f_n\|_p^p$, y $f = h^{2/p}$ con $h \in H^2$ y $\|h\|_2^2 = \|f\|_p^p$.
Entonces

$$\lim_{n\to\infty} h_n(z) = h(z),$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Luego tenemos b) para $\{h_n\}_n$.

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p = \|f\|_p^p = \|h\|_2^2.$$

Por tanto, también se cumple a) para $\{h_n\}_n$, y por lo ya demostrado para funciones de H^2

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|_2^2 = 0,$$

entonces por el lema 2.1, existe $\Gamma \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n\in\Gamma} h_n(z) = h(z),\ \textit{c.t.p.}\ z \in \mathbb{T},$$

lo que implica

$$\lim_{n\in\Gamma} f_n(z) = f(z),\ \textit{c.t.p.}\ z \in \mathbb{T},$$

luego ya tenemos (4).

Por último, si $f_n(z)$ puede anularse, se tiene que $f_n(z) = b_n(z)g_n(z)$, con b_n producto de Blaschke y $g_n \in H^p$ sin ceros en $\mathbb{D}$. Como $\lim_n f_n(z) = f(z) \not\equiv 0$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, los ceros de f no tienen puntos de acumulación en $\mathbb{D}$ y lo mismo puede decirse para f_n, ya que si no, como hay convergencia uniforme, $f \equiv 0$. Ahora vamos a ver que a) y b) se cumplen para g_n y b_n:

- Como $\{b_n\}_n$ es una sucesión de productos de Blaschke, por el teorema de Montel, [3], pág. 153, posee una subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, $\lim_n b_n(z) = b(z)$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$ y $b \not\equiv 0$. Luego $\{b_n\}_n$ cumple b).
- Veamos que $\{g_n\}_{n\in\Lambda}$ está uniformemente acotada sobre compactos de $\mathbb{D}$. Las funciones b_n no pueden tener ceros en todo disco $0 < |z - z_0| \leq r$, porque si no, z_0 sería un punto de acumulación de ceros de f. Ahora, como b no posee ceros en $|z - z_0| \leq r$, $\lim_n f_n(z) = f(z)$ uniformemente en $|z - z_0| \leq r$ y $\lim_{n\in\Lambda} b_n(z) = b(z)$ uniformemente en $|z - z_0| \leq r$, entonces $\lim_{n\in\Lambda} \frac{f_n(z)}{b_n(z)} = \frac{f(z)}{b(z)}$ uniformemente en $|z - z_0| \leq r$. Por el principio del máximo, [3], pág. 253,
$$\lim_{n\in\Lambda} \left|\frac{f_n(z)}{b_n(z)}\right| \leq \lim_{n\in\Lambda} \max_{\zeta\colon |\zeta - z_0| = r} \left|\frac{f_n(\zeta)}{b_n(\zeta)}\right| = \max_{\zeta\colon |\zeta - z_0| = r} \left|\frac{f(\zeta)}{b(\zeta)}\right|, \ |z - z_0| \leq r.$$
Por tanto, $\{f_n/b_n\}_{n\in\Lambda}$ tiene que estar acotada uniformemente en cada $|z - z_0| \leq r$, luego $\{f_n/b_n\}_{n\in\Lambda}$ está uniformemente acotada sobre compactos de $\mathbb{D}$.
- Como la sucesión $\{g_n\}_{n\in\Lambda}$ está uniformemente acotada, utilizando el teorema de Montel, [3], pág. 153, $\{g_n = f_n/b_n\}_{n\in\Lambda}$ posee una subsucesión tal que
$$\lim_n g_n(z) = g(z), \ n \in \Lambda' \subset \Lambda \subset \mathbb{N},$$
uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.
- Comprobemos la convergencia de las normas para g_n.
$$\lim_n \|g_n\|_{p,r} \leq \lim_n \|g_n\|_p = \lim_n \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$
Por otro lado,
$$\lim_n \|g_n\|_{p,r} = \lim_n \left\|\frac{f_n}{b_n}\right\|_{p,r} = \left\|\frac{f}{b}\right\|_{p,r}.$$
Luego, $\left\|\frac{f}{b}\right\|_{p,r} \leq \|f\|_p$ para todo r, lo que implica
$$\left\|\frac{f}{b}\right\|_p \leq \lim_n \|g_n\|_p = \|f\|_p. \tag{5}$$
Por otra parte, como b no puede ser cero en un conjunto de medida positiva por un principio de identidad de Rudin [9], pág. 345, ya que si no $b \equiv 0$,

entonces tenemos

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |b(e^{i\theta})|^p \left|\frac{f(e^{i\theta})}{b(e^{i\theta})}\right|^p d\theta\right)^{1/p} \leq \|b\|_\infty \left\|\frac{f}{b}\right\|_p \leq \left\|\frac{f}{b}\right\|_p . \tag{6}$$

De (5) y (6) se sigue que

$$\|f\|_p = \left\|\frac{f}{b}\right\|_p \text{ y } |b(e^{i\theta})| = 1, c.t.p.$$

Así obtenemos la convergencia de las normas de b_n

$$1 = \lim_n \|b_n\|_2^2 = \|b\|_2^2.$$

Luego tenemos a) y b) para $g_n \in H^p$ y $b_n \in H^2$. Como g_n no se anula, por lo ya demostrado y por el lema 2.1

$$\lim_n \left\|g_n - \frac{f}{b}\right\|_p = 0 \text{ y } \lim_n g_n(z) = \frac{f(z)}{b(z)} \; c.t.p., \; z \in \mathbb{T}, \; n \in \Gamma \subset \mathbb{N}. \tag{7}$$

Como $b_n \in H^2$, por lo demostrado para $p = 2$, y aplicando de nuevo el lema 2.1

$$\lim_n b_n(z) = b(z), \; c.t.p., \; z \in \mathbb{T}, \; n \in \Gamma' \subset \mathbb{N}. \tag{8}$$

De (7) y (8) obtenemos

$$\lim_n f_n(z) = \lim_n g_n(z) b_n(z) = f(z), \; c.t.p., \; z \in \mathbb{T}, \; n \in \Gamma'' \subset \mathbb{N}.$$

□

Observación 1. El teorema sigue siendo válido si sustituímos la condición a) por

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_p \leq \|f\|_p.$$

Damos ahora el teorema de Keldysh, [7]. Incluímos una demostración de este resultado porque la referencia no es asequible:

Teorema 2.2. *Sea* $\{f_n\}$, $f_n \in H^p$, $0 < p < \infty$ *tal que*

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$,
b) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 1$,

entonces

i) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_p = 0$,
ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 1$ *uniformemente en cada subconjunto compacto de* $\mathbb{D}$.

Demostración. Empezamos estudiando el caso $p = 2$. Por el crecimiento de las medias y la desigualdad triangular tenemos:

$$|f_n(0) + 1| \leq \|f_n + 1\|_2 \leq \|f_n\|_2 + \|1\|_2.$$

Por a) $\lim_{n\to\infty} |f_n(0) + 1| = 2$ y, por b), $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 + \|1\|_2 = 2$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n + 1\|_2 = 2.$$

Ahora, usando la identidad del paralelogramo tenemos i).

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} (2\|f_n\|_2^2 + 2\|1\|_2^2 - \|f_n + 1\|_2^2) = 0,$$

Para $z \in \mathbb{D}$, usando la fórmula de Cauchy y la desigualdad de Cauchy-Schwartz, obtenemos:

$$|f_n(z) - 1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f_n(e^{i\theta}) - 1}{e^{i\theta} - z} \right| d\theta \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{e^{i\theta} - z} \right|^2 d\theta \right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta \right)^{1/2} \leq (\text{ínf}\{|z - w| : |w| = 1\})^{-1} \|f_n - 1\|_2.$$

Luego, si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$

$$\sup\{|f_n(z) - 1| : z \in K\} \leq (\text{ínf}\{|z - w| : |w| = 1, z \in K\})^{-1} \|f_n - 1\|_2,$$

y tomando límites, a partir de i) tenemos ii).

Estudiamos ahora el caso $p \neq 2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $b_n \in H^\infty$, más aún, productos de Blaschke, y $h_n \in H^2$, tales que

$$f_n(z) = b_n(z) h_n(z)^{2/p} = \frac{b_n(z)}{b_n(0)} (b_n(0)^{p/2} h_n(z))^{2/p} \quad \text{y } \|f_n\|_p^p = \|h_n\|_2^2.$$

Luego

$$\lim_{n \to \infty} \|h_n\|_2^2 = \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_p^p = 1. \tag{9}$$

Vamos a ver que las hipótesis se cumplen para $\{\tilde{h}_n\}_n$ con $\tilde{h}_n(z) = b_n(0)^{p/2} h_n(z) \in H^2$.

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{n \to \infty} |f_n(0)|^{p/2} &= \lim_{n \to \infty} |b_n(0)^{p/2} h_n(0)| \leq \lim_{n \to \infty} \|b_n(0)^{p/2} h_n\|_2 \\ &= \lim_{n \to \infty} |b_n(0)|^{p/2} \|h_n\|_2 = \lim_{n \to \infty} |b_n(0)|^{p/2} \leq 1. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad se sigue del principio del máximo por ser b_n productos de Blaschke con lo que $|b_n(z)| = 1$ si $z \in \mathbb{T}$.
Luego

$$\lim_{n \to \infty} |b_n(0)|^{p/2} = 1, \tag{10}$$

y entonces por (9) y (10) tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \|\tilde{h}_n\|_2 = \lim_{n \to \infty} \|b_n(0)^{p/2} h_n\|_2 = \lim_{n \to \infty} |b_n(0)|^{p/2} \|h_n\|_2 = 1.$$

Además

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{h}_n(0) = \lim_{n \to \infty} b_n(0)^{p/2} h_n(0) = \lim_{n \to \infty} f_n(0)^{p/2} = 1.$$

Luego $\{\tilde{h}_n\}_n$ cumple a) y b), entonces por lo ya demostrado se cumple i) y ii) para $\{\tilde{h}_n\}_n$.
Veamos que lo mismo ocurre con $\{\tilde{b}_n(z) = b_n(z)/b_n(0)\}_n$, $\tilde{b}_n \in H^\infty \subset H^2$. En efecto, es obvio que

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{b}_n(0) = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \|\tilde{b}_n\|_2 = 1$$

por ser b_n productos de Blaschke y por (10). Luego $\{\tilde{b}_n\}_n$ cumple i) y ii). Por tanto tenemos ii) para f_n.

Ahora falta ver que i) se cumple. Como i) es cierto para $\tilde{h}_n$ y $\tilde{b}_n$, por el lema 2.1 existe $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_n \tilde{h}_n(z) = 1, \quad \text{y} \quad \lim_n \tilde{b}_n(z) = 1, \qquad c.t.p.\ z \in \mathbb{T},\ n \in \Lambda,$$

lo que implica que

$$\lim_n f_n(z) = \lim_n \tilde{b}_n(z)\tilde{h}_n(z)^{2/p} = 1,\ c.t.p.\ z \in \mathbb{T},\ n \in \Lambda.$$

Luego $\{f_n\}_{n\in\Lambda}$ cumple las condiciones del lema 2.2 y así se obtiene i).

□

Observación 2.

- Para $1 < p < \infty$ se podría haber hecho la demostración directamente usando las desigualdades de Clarkson, [5].
- El teorema sigue siendo válido si cambiamos b) por $\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_p \leq 1$.
- Los teoremas de Newman y Keldysh no se cumplen en H^∞ como vemos en el siguiente ejemplo. Sea $f_n(z) = \frac{nz+n-1}{n+(n-1)z}$. Es fácil comprobar que $f_n \in H^\infty$, $\|f_n\|_\infty = 1$, y $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 1$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, pero $\lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_\infty \neq 0$.

3 Espacios $H^p(\mu)$, μ medida de Szegő

En [1] se pueden encontrar las demostraciones de las extensiones de los teoremas de Newman y Keldysh para los espacios $H^p(\mu)$; como ellos son necesarios en el desarrollo posterior de este trabajo, los incluímos en esta sección.

Sea μ una medida positiva de Borel en $\mathbb{T}$ satisfaciendo la condición de Szegő, es decir, $\log \mu'(\theta) \in L^1$, donde μ' es la derivada de Radon-Nikodyn de μ respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{T}$. Por el teorema de descomposición de Lebesgue, [11], pág. 219, sabemos que $\mu = \mu' dm + \mu_s$, donde $\mu' dm$ es absolutamente continua y μ_s es una medida singular, con respecto a la medida de Lebesgue.
Denotamos por S_a y S_s dos conjuntos donde viven las medidas μ' y μ_s, respectivamente, y que son una descomposicón disjunta del círculo unidad.
Sabemos que $H^p(\mu)$ es la clausura de los polinomios algebraicos en $L^p(\mu)$ y

$$\|f\|_{p,\,\mu} = \left(\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\mu(\theta) \right)^{1/p}. \tag{11}$$

$D_p(\mu, z)$ denota la función de Szegő y viene dada por

$$D_p(\mu, z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \mu'(\theta) d\theta \right\}. \tag{12}$$

y la función $K_p(\mu, z)$

$$K_p(\mu, z) = \begin{cases} \frac{D_p(\mu,0)}{D_p(\mu,z)}, & \text{si } z \in (S_a \cup \{z : |z| < 1\}), \\ 0, & \text{si } z \in S_s. \end{cases} \tag{13}$$

A continuación damos una descomposición en suma directa del espacio de funciones $H^p(\mu)$.

Teorema 3.1. *El espacio $H^p(\mu)$, $0 < p \leq \infty$, se puede poner como*

$$H^p(\mu) = K_p \cdot H^p \oplus L_s^p(\mu), \tag{14}$$

es decir, si $f \in H^p(\mu)$, $f(z) = \tilde{f}(z)K_p(\mu, z) + f_s(z)$ con $\tilde{f} \in H^p$ y $f_s \in L_s^p(\mu)$ únicas.

Notar que si la medida μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, entonces $f_s \equiv 0$ y f admite una extensión a $\mathbb{D}$ que denotaremos por la propia f. Teniendo presente esta identificación damos una generalización del teorema de Newman a este espacio de funciones.

Teorema 3.2. *Sean $\{f_n\}_n$ y f con f_n, $f \in H^p(\mu)$, μ una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, tales que*

a) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{p,\,\mu} = \|f\|_{p,\,\mu}$,
b) $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, *uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$,*

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p,\,\mu} = 0. \tag{15}$$

Observación 3. El teorema sigue siendo válido si sustituímos la condición a) por

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_{p,\,\mu} \leq \|f\|_{p,\,\mu}.$$

A continuación damos una extensión del teorema de Keldysh en $H^p(\mu)$.

Teorema 3.3. *Sea $\{z_i\}_{i=1,\dots,\Lambda}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{D}$ donde Λ puede ser finito o infinito, μ una medida satisfaciendo la condición de Szegő y $\{f_n\}_n \subset H^p(\mu)$, $0 < p < \infty$, tal que*

a) $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(0) = 1$,
b) $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(z_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$,
c) $\sum_{i=1}^{\Lambda}(1 - |z_i|) < +\infty$,
d) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{p,\,\mu} = \frac{D_p(\mu,0)}{\prod_{i=1}^{\Lambda}|z_i|}$.

Entonces

i) $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(z) = \prod_{i=1}^{\Lambda} \frac{z-z_i}{\bar{z}_i z-1}\frac{\bar{z}_i}{|z_i|^2}$ *uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$.*
ii) $\lim_{n\to\infty} \left\| f_n - \prod_{i=1}^{\Lambda} \frac{z-z_i}{\bar{z}_i z-1}\frac{\bar{z}_i}{|z_i|^2} K_p(\mu, z)\right\|_{p,\,\mu} = 0.$

4 Espacios $H^p(\mathbb{D}^N)$, $\mathbb{D}^N$ polidisco

$H^p(\mathbb{D}^N)$ es el conjunto de funciones holomorfas en $\mathbb{D}^N$. Si $h \in H^p(\mathbb{D}^N)$, $w \in \mathbb{T}^N$, se define $h_w : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ como $h_w(z) = h(wz)$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Definimos la norma

$$\|h\|_{p,\,N} = \left(\int_{\mathbb{T}^N} \|h_\omega\|_p^p \, d\sigma_N(\omega)\right)^{1/p} < \infty, \tag{16}$$

con $\|h_\omega\|_p$ la norma en H^p donde σ_N es la medida de Lebesgue en $\mathbb{T}^N$.

El resultado siguiente es una versión del teorema de Newman en estos espacios. Un estudio detallado de los espacio $H^p(\mathbb{D}^N)$ se puede encontrar en [10]. El caso $p = 1$ fue probado por Hoffmann en [6].

Teorema 4.1. *Sean* $\{f_n\}$, $f_n \in H^p(\mathbb{D}^N)$ *y* $f \in H^p(\mathbb{D}^N)$ *tales que*

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(w) = f(w)$ *uniformemente en subconjuntos compactos de* $\mathbb{D}^N$,

b) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{p,\,N} = \|f\|_{p,\,N}$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p,\,N} = 0. \tag{17}$$

Antes de dar una demostración del teorema enunciamos un lema, que se puede encontrar en [6].

Lema 4.1. *Sean* $\phi_n \geq 0$, $\phi = \liminf_{n\to\infty} \phi_n$, *con* ϕ, $\phi_n \in L^1$. *Sea* $\psi \in L^1$ *tal que* $\psi \leq \phi$ *y* $\limsup_{n\to\infty} \int \phi_n \leq \int \psi$. *Entonces,* $\phi = \psi$ *c.t.p. y existe una subsucesión* $\Gamma \subset \mathbb{N}$ *tal que* $\lim_{n\in\Gamma} \phi_n = \psi$ *c.t.p.*

Demostración. (Teorema 4.1) Para $\omega \in \mathbb{T}^N$, definimos $\phi_n(\omega) = \|f_{n,\omega}\|_p$, $\psi(\omega) = \|f_\omega\|_p$ y ϕ como en el lema 4.1. Para $0 < r < 1$, por a) tenemos

$$\int_{\mathbb{T}^1} |f_w(rz)|^p d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^1} |f_{n,\omega}(rz)|^p d\theta \leq \liminf_{n\to\infty} \phi_n(\omega)^p,$$

con $z = e^{i\theta}$, luego

$$\psi(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi_n(\omega) = \phi(\omega). \tag{18}$$

De b) deducimos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \phi_n^p(\omega) d\sigma_N(\omega) = \int_{\mathbb{T}^N} \psi^p(\omega) d\sigma_N(\omega). \tag{19}$$

Por el lema 4.1, (18) y (19), cada sucesión Γ_1 de enteros positivos posee una subsucesión Γ_2, tal que para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^N$,

$$\lim_{n\in\Gamma_2} \phi_n(\omega) = \psi(\omega).$$

Para ese ω podemos aplicar el teorema 2.1, y por tanto

$$\lim_{n\in\Gamma_2} \|f_{n,\omega} - f_\omega\|_p = 0. \tag{20}$$

Debemos probar que

$$\lim_{n\in\Gamma_2} \int_{\mathbb{T}^N} \|f_{n,\omega} - f_\omega\|_p^p d\sigma_N(\omega) = 0. \tag{21}$$

Por el teorema de Egoroff, [9], pág. 73, (20) y como $\int_{\mathbb{T}^N} \psi(\omega) d\sigma_N(\omega) < \infty$, dado $\epsilon > 0$, existen dos conjuntos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{T}^N = A \cup B$, de manera que $\lim_{n\in\Gamma_2} \|f_{n,\omega} - f_\omega\|_p^p = 0$, uniformemente en B y tal que $\int_A \psi^p(\omega) d\sigma_N(\omega) < \epsilon$. Por

[5], pág. 208, $\lim_{n\in\Gamma_2}\int_A \phi_n^p(\omega)d\sigma_N(\omega) = \int_A \psi^p(\omega)d\sigma_N(\omega)$, por tanto $\int_A \phi_n^p(\omega)d\sigma_N(\omega) < \epsilon$. Teniendo presente además

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^N} \|f_{n,\omega} - f_\omega\|_p^p d\sigma_N(\omega) &\leq \int_B \|f_{n,\omega} - f_\omega\|_p^p d\sigma_N(\omega)\\ &+2\,\text{máx}\left\{\int_A \phi_n^p(\omega)d\sigma_N(\omega),\ \int_A \psi(\omega)^p d\sigma_N(\omega)\right\},\end{aligned} \tag{22}$$

se concluye que cada sucesión Γ_1 posee una subsucesión Γ_2 para la que (21) se cumple y esto completa la prueba.

□

Teorema 4.2. *Supongamos que* $f_n \in H^p(\mathbb{D}^N)$, $0 < p < \infty$, *con*

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$,
b) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{p,\,N} = 1$,

entonces

i) $\lim_{n\to\infty} f_n(w) = 1$ *uniformemente en subconjuntos compactos de* $\mathbb{D}^N$.
ii) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_{p,\,N} = 0$.

Demostración. Para $\omega \in \mathbb{T}^N$, definimos como antes $\phi_n(\omega) = \|f_{n,\omega}\|_p$. Por a) tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_{n,\omega}(0) = 1$ y por b) se tiene $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}^N} \phi_n(\omega)^p d\sigma_N(\omega) = 1$.

Supongamos primero que $p = 2$, entonces como $f_{n,\omega} \in H^2(\mathbb{D})$, se cumple

$$|f_{n,w}(0)|^2 \leq \|f_{n,w}\|_2^2.$$

Por tanto

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} \phi_n(\omega). \tag{23}$$

Veamos que (23) se cumple para $0 < p < \infty$. Si $f_n \in H^p(\mathbb{D}^N)$, entonces $f_{n,\omega} \in H^p(\mathbb{D})$ y existen $h_n \in H^2(\mathbb{D})$ y $g_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ productos de Blaschke tales que, $f_{n,\omega}(z) = g_n(z)h_n(z)^{2/p}$ y $\|f_{n,\omega}\|_p^p = \|h_n\|_2^2$. Entonces tenemos, para $z = e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}|f_{n,\omega}(0)|^p &= |g_n(0)h_n(0)^{2/p}|^p = |g_n(0)|^p|h_n(0)|^2\\ &\leq |g_n(0)|^p\int_{\mathbb{T}} |h_n(z)|^2 d\theta = |g_n(0)|^p\int_{\mathbb{T}} |g_n(z)|^p|h_n(z)^{2/p}|^p d\theta\\ &= |g_n(0)|^p\|f_{n,\omega}\|_p^p = |g_n(0)|^p\phi_n(\omega)^p \leq \phi_n(\omega)^p,\end{aligned}$$

esta última desigualdad se deduce del principio del máximo ya que g_n son productos de Blaschke. Luego

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} \phi_n(\omega), \tag{24}$$

para $0 < p < \infty$.

Entonces por el lema 4.1, (24) y b), cada sucesicón $\Gamma_1 \subset \mathbb{N}$ posee una subsucesión Γ_2 tal que para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^N$

$$\lim_{n\in\Gamma_2} \phi_n(\omega) = 1.$$

Por tanto podemos aplicar el teorema 2.2, y entonces

$$\lim_{n\in\Gamma_2} f_{n,\omega} = 1, \tag{25}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ y

$$\lim_{n\in\Gamma_2} \|f_{n,\omega} - 1\|_p = 0. \tag{26}$$

Como esto se cumple para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^N$, por (25) tenemos i).

Por el Teorema de Egoroff y (26), dado $\epsilon > 0$, existen dos conjuntos A y B tales que $\mathbb{T}^N = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, de manera que $\lim_{n\in\Gamma_2} \|f_{n,\omega} - 1\|_p^p = 0$, uniformemente en B y tal que $\int_A d\sigma_N(\omega) < \epsilon$. Así $\int_A \phi_n^p(\omega) d\sigma_N(\omega) < \epsilon$ para $n \in \Gamma_2$ suficientemente grande. Además por

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N} \|f_{n,\omega} - 1\|_p^p d\sigma_N(\omega) &\le \int_B \|f_{n,\omega} - 1\|_p^p d\sigma_N(\omega) \\ &+2\max\left\{\int_A \phi_n^p(w) d\sigma_N(w),\ \int_A d\sigma_N(w)\right\}, \end{aligned} \tag{27}$$

cada sucesión Γ_1, posee una subsucesión Γ_2 para la que ii) se cumple y esto completa la prueba.

□

5 Espacios $H^p(S)$, S el semiplano

Sea $S = \{z = x + iy : y > 0\}$ el semiplano superior. $H^p(S)$, con $0 < p < \infty$, el conjunto de funciones analíticas en S, tal que $|f(x+iy)|^p$ es integrable para cada $y > 0$ y

$$\sup_{0<y<\infty} \|f\|_{p,\,y} = \sup_{0<y<\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx\right\}^{1/p} < \infty.$$

Denotamos

$$\|f\|_p = \lim_{y\to 0} \|f\|_{p,\,y} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Un estudio detallado sobre estos espacios puede encontrarse en [4]. La versión del teorema de Newman en estos espacios es la siguiente:

Teorema 5.1. *Sean* $\{f_n\}$, $f_n \in H^p(S)$ *y* $f \in H^p(S)$, $0 < p < \infty$. *Si*

a) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$,

b) $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, *uniformemente subconjuntos compactos de* S,

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0. \tag{28}$$

Demostración. Si $f \equiv 0$, el teorema es obvio. Sea $f \not\equiv 0$. Empezamos por el caso $p = 2$. Por la desigualdad triangular y la hipótesis a)

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|\frac{f_n + f}{2}\right\|_2 \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|_2 + \|f\|_2}{2} = \|f\|_2. \tag{29}$$

Sea $\epsilon > 0$, $\|f\|_{2,\,y}$ crece a $\|f\|_2$, cuando $y \to 0^+$, luego podemos hallar $y > 0$ tal que $\|f\|_{2,\,y} > \|f\|_2 - \epsilon$.

Para tales valores de y y de ϵ, existe $M > 0$ tal que

$$\left(\int_{|x|<M} |f(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} > \|f\|_{2,\,y} - \epsilon > \|f\|_2 - 2\epsilon.$$

Por tanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_2 \geq \liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{2,\,y}$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{|x|<M} \left| \frac{f_n(x+iy) + f(x+iy)}{2} \right|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{|x|<M} |f(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} > \|f\|_2 - 2\epsilon.$$

Aplicando la identidad del paralelogramo tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} (2\|f_n\|_2^2 + 2\|f\|_2^2 - \|f_n + f\|_2^2) = 0.$$

Luego el teorema se cumple para $p = 2$.

Estudiamos ahora el caso $p \neq 2$. Por el lema 2.2, si a) se cumple y para cualquier $\Lambda \subset \mathbb{N}$, existe $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que

$$\lim_{n} f_n(z) = f(z),\ c.t.p.,\ z \in \mathbb{R},\ n \in \Lambda', \tag{30}$$

entonces tenemos (28). Luego basta demostrar (30).

Primero vamos a suponer $f_n(z) \neq 0$ para todo $z \in S$, entonces por el teorema de Hurwitz, $f \equiv 0$ o f no se anula. Como $f \not\equiv 0$, tenemos que f no se anula. Por tanto, $f_n = h_n^{2/p}$, con $h_n \in H^2(S)$ y $\|h_n\|_2^2 = \|f_n\|_p^p$, y $f = h^{2/p}$ con $h \in H^2(S)$ y $\|h\|_2^2 = \|f\|_p^p$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de S, y esto implica

$$\lim_{n\to\infty} h_n(z) = h(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de S. Luego tenemos b) para $\{h_n\}_n$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p = \|f\|_p^p = \|h\|_2^2.$$

Por tanto, también se cumple a) para $\{h_n\}_n$ y por el caso anterior

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|_2^2 = 0,$$

entonces, por el lema 2.1, existe $\Gamma \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n} h_n(z) = h(z),\ c.t.p.,\ z \in \mathbb{R},\ n \in \Gamma,$$

lo que implica

$$\lim_{n} f_n(z) = f(z),\ c.t.p.,\ z \in \mathbb{R},\ n \in \Gamma,$$

luego ya tenemos (30).

Si $f_n(z)$ se puede anular, $f_n(z) = b_n(z)g_n(z)$, donde b_n es un producto de Blaschke en S, $g_n \in H^p(S)$ sin ceros en S y $\|f_n\|_p = \|g_n\|_p$. Como $\lim_n f_n(z) = f(z) \not\equiv 0$ uniformemente en subconjuntos compactos de S, los ceros de f no tienen puntos de acumulación en S y lo mismo puede decirse para cada f_n, ya que si no, como hay convergencia uniforme, $f \equiv 0$. Ahora vamos a ver que a) y b) se cumplen para g_n y b_n:

- Como $\{b_n\}_n$ es una sucesión de productos de Blaschke, por el teorema de Montel, posee una subsucesión que converge uniformemente, $\lim_n b_n(z) = b(z)$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$ y $b \not\equiv 0$. Luego b_n cumple b).
- Veamos que $\{g_n\}_n$ está uniformemente acotada sobre compactos de S. Sabemos que $g_n(z) = G_n(\psi(z))$, con $G_n(w) \in H^p$ y $f_n(\varphi(w)) = B_n(w)G_n(w)$ con B_n productos de Blaschke en $\mathbb{D}$. Como se vio en el teorema 2.1, la sucesión $\{G_n\}_n$ está acotada uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, por tanto, la sucesión $\{g_n\}_n$ está acotada uniformemente en compactos de S.
- Como $\{g_n\}_{n\in\Lambda}$ está uniformemente acotada, utilizando el teorema de Montel, $\{g_n = f_n/b_n\}_{n\in\Lambda}$ posee una subsucesión tal que

$$\lim_n g_n(z) = g(z),\ n \in \Lambda' \subset \Lambda \subset \mathbb{N},$$

  uniformemente en subconjuntos compactos de S.
- Convergencia de las normas para g_n.

$$\lim_n \|g_n\|_{p,\,y} \leq \lim_n \|g_n\|_p = \|f\|_p.$$

  Por otro lado,

$$\lim_n \|g_n\|_{p,\,y} = \lim_n \left\|\frac{f_n}{b_n}\right\|_{p,\,y} = \left\|\frac{f}{b}\right\|_{p,\,y}.$$

  Luego, $\left\|\frac{f}{b}\right\|_{p,y} \leq \|f\|_p$ para todo $y > 0$, lo que implica

$$\left\|\frac{f}{b}\right\|_p \leq \lim_n \|g_n\|_p = \|f\|_p. \tag{31}$$

  Por otra parte, como b no puede ser cero en un conjunto de medida positiva, por un principio de identidad de Rudin ya que si no $b \equiv 0$,

$$\|f\|_p = \left\|b\,\frac{f}{b}\right\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |b(x)|^p \left|\frac{f(x)}{b(x)}\right|^p dx\right)^{1/p} \leq \|b\|_\infty \left\|\frac{f}{b}\right\|_p \leq \left\|\frac{f}{b}\right\|_p,$$

  lo que implica que

$$\|f\|_p \leq \left\|\frac{f}{b}\right\|_p. \tag{32}$$

  De (31) y (32) tenemos

$$\|f\|_p = \left\|\frac{f}{b}\right\|_p \text{ y } |b(x)| = 1, \quad c.t.p.,\ x \in \mathbb{R}.$$

Así es obvio que

$$1 = \lim_n \|b_n\|_2 = \|b\|_2.$$

Luego tenemos a) y b) para $g_n \in H^p(S)$ y $b_n \in H^2(S)$. Como g_n no se anula, por lo ya demostrado y por el lema 2.1

$$\lim_n \left\| g_n - \frac{f}{b} \right\|_p = 0 \text{ y } \lim_n g_n(z) = \frac{f(z)}{b(z)} \; c.t.p., \; z \in \mathbb{R}, \; n \in \Gamma \subset \mathbb{N}. \tag{33}$$

Como $b_n \in H^2(S)$, por lo demostrado para $p = 2$ y aplicando de nuevo el lema 2.1, existe $\Gamma' \subset \Gamma$ tal que

$$\lim_n b_n(z) = b(z), \; c.t.p., \; z \in \mathbb{R}, \; n \in \Gamma'. \tag{34}$$

De (33) y (34) tenemos

$$\lim_n f_n(z) = \lim_n g_n(z) b_n(z) = f(z), \; c.t.p., \; z \in \mathbb{R}, \; n \in \Gamma'',$$

que es lo que queríamos probar.

□

Teorema 5.2. *Sea* $\{f_n\} \in H^p(S)$, $0 < p < \infty$. *Si*

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 1$, *con* $z_0 \in S$;
b) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 1$,

entonces

i) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_p = 0$;
ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 1$, *uniformemente en subconjuntos compactos de* S.

Antes de probar este teorema vamos a dar un lema que necesitaremos en la demostración:

Lema 5.1. *Sea* $h \in H^2(S)$ *y* $z_0 \in S$. *Entonces*

$$|h(z_0)| \leq \|h\|_2.$$

Demostración. Sea $\varphi(\omega)$ la trasnformación conforme de $\mathbb{D}$ en S dada por

$$w = \psi(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\,; \quad z = \varphi(w) = \frac{z_0 - \overline{z_0} w}{1 - w}. \tag{35}$$

con $w \in \mathbb{D}$ y z_0, $z \in S$, es fácil ver que si $f \in H^p(S)$, $f(\varphi(w)) \in H^p$. Tomamos $z_0 = \varphi(0)$. Entonces

$$|h(z_0)| = |h(\varphi(0))| \leq \|h \circ \varphi\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(\varphi(e^{i\theta}))|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Haciendo el cambio de variable $\varphi(e^{i\theta}) = t$, nos queda $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$ y así esta última integral queda

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 \frac{2dt}{1+t^2} \right)^{1/2} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

□

Demostración. (Teorema 5.2) Empezamos con el caso $p = 2$. Por el lema 5.1

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z_0) + 1| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n + 1\|_2 \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 + \|1\|_2 = 2.$$

Ahora por la regla del paralelogramo tenemos i). Para probar ii), aplicamos la fórmula de Cauchy en el plano y la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Sea $z \in K$, con K compacto,

$$|f_n(z) - 1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f_n(t) - 1}{t - z} \right| dt \leq$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{t - z} \right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - 1|^2 dt \right)^{1/2}$$

y esto converge a 0, por tanto el teorema está probado para $p = 2$.

Para $p \neq 2$, si $f_n \in H^p(S)$ existen $b_n \in H^\infty(S)$, productos de Blaschke y $h_n \in H^2(S)$ tales que

$$f_n(z) = b_n(z) h_n(z)^{2/p} \quad \text{y} \quad \|f_n\|_p^p = \|h_n\|_2^2.$$

Veamos que se cumplen las hipótesis para

$$\tilde{h}_n(z) = b_n(z_0)^{p/2} h_n(z) \in H^2(S).$$

Aplicando el lema 5.1 tenemos

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{n\to\infty} |f_n(z_0)|^{p/2} &= \lim_{n\to\infty} |b_n(z_0)^{p/2} h_n(z_0)| \leq \lim_{n\to\infty} \|b_n(z_0)^{p/2} h_n\|_2 \\ &= \lim_{n\to\infty} |b_n(z_0)|^{p/2} \|h_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} |b_n(z_0)|^{p/2} \leq 1, \end{aligned} \tag{36}$$

donde la última desigualdad se justifica utilizando el principio del máximo para $b_n(z) = B_n(\psi(z))$, con B_n productos de Blaschke en el círculo y ψ la transformación conforme de S en $\mathbb{D}$. Por tanto hemos probado que

$$\lim_{n\to\infty} |b_n(z_0)|^{p/2} = 1. \tag{37}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{h}_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|b_n(z_0)^{p/2} h_n\|_2 = 1,$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(z_0) = \lim_{n\to\infty} b_n(z_0)^{p/2} h_n(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0)^{p/2} = 1,$$

el teorema se cumple para $\{\tilde{h}_n\}_n$, por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{h}_n - 1\|_2 = 0, \tag{38}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(z) = 1, \tag{39}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de S. Veamos que lo mismo ocurre con $\tilde{b}_n(z) = \frac{b_n(z)}{b_n(z_0)}$. Tenemos que $\tilde{b}_n(z) \in H^\infty(S) \subset H^2(S)$ con

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n(z_0) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|\tilde{b}_n\|_2 = 1,$$

por ser productos de Blaschke. Entonces por lo ya probado para $p = 2$

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{b}_n - 1\|_2 = 0, \tag{40}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n(z) = 1, \tag{41}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de S. Por (39) y (41), tenemos ii) para $\{f_n\}_n$. Ahora por (38), (40) y por el lema 2.1 existe una subsucesión $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n\in\Lambda} \tilde{h}_n(z) = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{n\in\Lambda} \tilde{b}_n(z) = 1,\ c.t.p.,\ z \in \mathbb{R},$$

lo que implica que

$$\lim_{n\in\Lambda} \tilde{f}_n(z) = 1,\ c.t.p.,\ z \in \mathbb{R},$$

y aplicando el lema 2.2, el teorema queda demostrado.

□

Referencias

[1] M. Bello Hernández, F. Marcellán, J. Mínguez Ceniceros. Pseudo-uniform convexity in H^p and some extremal problems on Sobolev spaces. *Complex Var. Theory Appl.* **48**(5), 429–440, 2003.
[2] D. L. Cohn. *Measure Theory.* Birkäuser, Boston, 1980.
[3] J. B. Conway. *Functions of one complex variable.* Graduate Texts in Mathematics **11**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
[4] P. L. Duren. *Theory of H_p spaces.* Pure and Applied Mathematics **38**. Academic Press, New York-London, 1970.
[5] E. Hewitt, K. Stromberg. *Real and abstract analysis.* Graduate Texts in Mathematics **25**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
[6] L. D. Hoffmann. Pseudo-uniform convexity of H^1 in several variables, *Proc. Amer. Math. Soc.* **26**, 609–614, 1970.
[7] M. V. Keldysh. *Selected papers* (Ruso). Academic Press, Moscow, 1985.
[8] D. J. Newman. Pseudo-uniform convexity in H^1. *Proc. Amer. Math. Soc.* **14**, 676–679, 1963.
[9] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1987.
[10] W. Rudin. *Function theory in polydiscs.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
[11] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973.

Departamento Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Spain
Correo electrónico: `mbello@unirioja.es`

Departamento Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Spain
Correo electrónico: `judit.minguez@unirioja.es`