CONTRIBUCIONES CIENTÍFICAS
EN HONOR DE MIRIAN ANDRÉS GÓMEZ
(Laureano Lambán, Ana Romero y Julio Rubio, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2010.

RELACIONES DE RECURRENCIA EN EL MÉTODO DE NEWTON-KANTOROVICH

J. A. EZQUERRO, J. M. GUTIÉRREZ, M. A. HERNÁNDEZ, N. ROMERO Y M. J. RUBIO

A la memoria de Mirian

RESUMEN. La aparición de múltiples y variados trabajos de investigación en los que se demuestra la convergencia semilocal del método de Newton en espacios de Banach (teorema de Newton-Kantorovich) ha sido constante a lo largo de los últimos años. Aquí se recuerdan algunos de ellos: los que se sirven de relaciones de recurrencia en su demostración, haciéndose especial hincapié en aquellos que han surgido desde nuestro grupo de investigación.

ABSTRACT. The development of numerous and varied papers, where the semilocal convergence of Newton's method in Banach spaces (the Newton-Kantorovich theorem) is analysed, has been common throughout the last years. In this work, we remember those that use recurrence relations in the proof and have been written by our research group.

1. INTRODUCCIÓN

El *método de Newton*, también conocido como método de Newton-Raphson [6], aproxima sucesivamente una solución real simple x^* de una ecuación real no lineal

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

y consiste en construir, a partir de una aproximación inicial x_0 de x^*, una sucesión de la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0, \tag{2}$$

que en condiciones adecuadas converge a la solución buscada x^*.

En origen, lo que hoy conocemos como método de Newton podría entenderse como una técnica para aproximar una solución de una ecuación concreta. Así, por ejemplo, el propio Newton explicaba el procedimiento para encontrar una solución de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$ próxima al punto $x_0 = 2$. Las aportaciones de otros autores fueron dándole forma al método tal y como lo conocemos en la actualidad, (2), como una técnica para resolver la ecuación general (1). En este contexto, surgió la necesidad de garantizar la convergencia del método de Newton a la solución buscada x^*. Entre los primeros autores que trabajaron en este campo podemos citar a Mourraille o Fourier [5].

Key words and phrases. Newton's method, the Newton-Kantorovich theorem, recurrence relations, semilocal convergence, mild convergence conditions, integral equation.

Cauchy, en 1829, fue el primero en establecer un resultado de convergencia para el método de Newton en el cual no se asumía la existencia de la solución x^* [24]. En su lugar, Cauchy exigía condiciones sobre el punto de partida x_0 de la sucesión (2):

Teorema 1.1. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto x_0 tal que $f'(x_0) \neq 0$, se define $\sigma_0 = -f(x_0)/f'(x_0)$, $\eta = |\sigma_0|$ e*

$$I = \begin{cases} [x_0, x_0 + 2\sigma_0] & \text{si} \quad \sigma_0 \geq 0, \\ [x_0 + 2\sigma_0, x_0] & \text{si} \quad \sigma_0 < 0. \end{cases}$$

Supongamos que $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Entonces, se obtienen los siguientes resultados:

- *Si $2M\eta < |f'(x_0)|$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución x^* en I.*
- *Si $|f'(x)| \geq m$ en I y $2M\eta < m$, el método de Newton (2) converge a x^* comenzando en x_0.*

Se dice que el resultado de Cauchy es un teorema de convergencia semilocal para el método de Newton porque exige condiciones sobre el punto de partida x_0 de la sucesión (2). Por otra parte, existen otro tipo de resultados de convergencia que exigen condiciones sobre la solución (convergencia local) o sobre el rango de definición de la función f (convergencia global).

La idea básica que se esconde detrás del método de Newton es la de «linealizar» un problema, es decir, en lugar de resolver la ecuación no lineal (1), se busca la solución de un problema lineal relacionado con él:

$$f(x) = 0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

Esta idea de linealizar puede extenderse del campo de los números reales a espacios más generales. La extensión del método de Newton a ecuaciones $F(x) = 0$, donde F es un operador, $F : X \to Y$, definido entre dos espacios de Banach X e Y se conoce como *método de Newton-Kantorovich*:

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0. \tag{3}$$

Notemos que la diferencia fundamental entre (2) y (3) radica en el papel que desempeñan las expresiones diferenciales: $f'(x_0)$ es un número real en (2), mientras que $F'(x_0)$ es una aplicación lineal definida entre los espacios X e Y en (3). La formulación general (3) del método permite aplicarlo en contextos tan distintos como sistemas de ecuaciones no lineales, ecuaciones diferenciales o integrales, problemas de cálculo de variaciones, etc.

2. El teorema de Newton-Kantorovich

En 1939, Kantorovich publicó un trabajo sobre métodos iterativos para ecuaciones funcionales en espacios de Banach [12], y aplicó su teoría para deducir un teorema de convergencia para el método de Newton que se basa en el principio de la aplicación contractiva de Banach [25].

Algunos años más tarde, en 1948, Kantorovich estableció en [13] un teorema de convergencia semilocal para el método de Newton en espacios de Banach, que ahora es conocido como el teorema de Kantorovich o de Newton-Kantorovich y que resume los resultados básicos referentes a la convergencia de (3): estimaciones del error, unicidad de soluciones, orden de convergencia, etc. El teorema de Newton-Kantorovich no debe entenderse únicamente como un resultado de convergencia semilocal para (3), debe interpretarse también como un resultado de existencia y unicidad de solución para la ecuación $F(x) = 0$.

La aportación más importante de Kantorovich no es el resultado en sí, que básicamente es una generalización del teorema de Cauchy (teorema 1.1), sino que su principal contribución es el empleo de herramientas de Análisis Funcional a un problema de Análisis Numérico [15].

Presentamos a continuación una versión actualizada del teorema de Newton-Kantorovich, que fue demostrada inicialmente utilizando relaciones de recurrencia [13].

Teorema 2.1. *Sea $F : \Omega \subseteq X \to Y$ un operador dos veces diferenciable Fréchet en un conjunto convexo abierto no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y. Supongamos también que se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) *existe un punto $x_0 \in \Omega$ donde está definido el operador $[F'(x_0)]^{-1} = \Gamma_0$ y es tal que $\|\Gamma_0\| \leq \beta$,*
(ii) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$,
(iii) $\|F''(x)\| \leq M$, *para todo* $x \in \Omega$,
(iv) $h = M\beta\eta < 1/2$,
(iv) $S = \{x;\ \|x - x_0\| \leq r_0\} \subseteq \Omega$, *donde*

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h}\,\eta.$$

Entonces:

(1) *la sucesión (3) está bien definida y es convergente a una solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$,*
(2) *la solución x^* está contenida en la bola cerrada S y es única en el conjunto $\{x;\ \|x - x_0\| \leq r_1\} \cap \Omega$, donde*

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{1-2h}}{h}\,\eta,$$

(3) *y se tienen las siguientes cotas del error:*

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{(2h)^{2^n}}{2^n h}\eta, \quad n \geq 0;$$

de donde se deduce la convergencia cuadrática del método.

La idea de la demostración se basa en probar por inducción que existen los operadores $[F'(x_n)]^{-1}$, para todo $n \geq 1$, y que se verifican las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\|[F'(x_n)]^{-1}\| \leq \beta_n, \qquad \|[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)\| \leq \eta_n, \qquad M\beta_n\eta_n \leq 1/2,$$

donde

$$\beta_0 = \beta, \qquad \eta_0 = \eta, \qquad h_0 = h,$$
$$\beta_n = \frac{\beta_{n-1}}{1-h_{n-1}}, \qquad \eta_n = \frac{h_{n-1}\eta_{n-1}}{2(1-h_{n-1})}, \qquad h_n = M\beta_n\eta_n, \qquad n \geq 1.$$

El uso de las relaciones de recurrencia que se derivan en el proceso juega un papel fundamental en la demostración del resultado anterior, pero no es la única forma de demostrarlo. Kantorovich demuestra tres años más tarde [14] el mismo resultado a partir del concepto de «sucesión mayorizante». Una sucesión de números reales $\{t_n\}$ mayoriza a una sucesión $\{x_n\}$ definida en un espacio de Banach X si y solo si

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n, \qquad n \geq 0.$$

Si $\{t_n\}$ converge a t^*, entonces se demuestra la existencia de un límite $x^* \in X$ para la sucesión $\{x_n\}$, ya que

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \qquad n \geq 0.$$

Kantorovich prueba además que la sucesión mayorizante $\{t_n\}$ se obtiene aplicando el método de Newton a un polinomio de segundo grado del tipo $p(t) = M\beta t^2/2 - t + \eta$, es decir:

$$\begin{cases} t_0 = 0, \\ t_{n+1} = t_n - p(t_n)/p'(t_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

A partir de este momento, el número de variantes del teorema de Newton-Kantorovich aumenta de forma considerable. En estas variantes se modifican las hipótesis, los resultados o las técnicas de demostración empleadas (véase [19] para una mayor información). Los dos resultados que citamos a continuación son una pequeña muestra de dichas variantes.

1. Mysovskikh [17] prueba la convergencia del método de Newton-Kantorovich para operadores dos veces diferenciables en una bola $\Omega = \{x;\ \|x-x_0\| \leq r\}$, tales que los operadores lineales $F'(x)$ tienen inverso para todo $x \in \Omega$ y las siguientes condiciones: $\|[F'(x)]^{-1}\| \leq \zeta$ y $\|F''(x)\| \leq M$ en $x \in \Omega$, y $\|F(x_0)\| \leq \mu$. En concreto, prueba la convergencia del método siempre y cuando se cumplen las condiciones

$$h = M\zeta^2\mu < 2 \quad \text{y} \quad \zeta\mu\sum_{j=0}^{\infty}(h/2)^{2^n-1} \leq r.$$

   Con una notación ligeramente distinta a la empleada anteriormente, Mysovskikh consigue aumentar el valor del parámetro h de $1/2$ a 2. El «precio» que se paga para ello es suponer que $\|[F'(x)]^{-1}\|$ existe y está uniformemente acotado en una bola, en vez de suponer que existe en un único punto.

2. El último de los grandes nombres asociados al método de Newton-Kantorovich es el de Smale, con su α-teoría [22], [23]. Si en el teorema de Newton-Kantorovich se asumen condiciones que afectan a un conjunto de puntos alrededor del punto de partida y que involucran a las derivadas primera

y segunda del operador F, en la α-teoría de Smale se demuestra la convergencia del método de Newton-Kantorovich con estimaciones efectuadas únicamente sobre el punto de partida. Como contrapartida, en estas estimaciones aparecen todas las derivadas del operador F. En este sentido la α-teoría puede aplicarse en problemas que son más regulares que en el caso de la teoría de Kantorovich.

De forma resumida, la α-teoría de Smale parte de un operador analítico en espacios de Banach, $F : \Omega \subseteq X \to Y$, definido en una bola $\Omega = \{x;\ \|x - x_0\| \leq r\}$. Se supone que el operador lineal $F'(x)$ tiene inverso en x_0 y se definen los parámetros

$$\eta = \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|, \quad \gamma = \sup_{k\geq 2}\left\|\frac{1}{k!}[F'(x_0)]^{-1}F^{(k)}(x_0)\right\|^{1/(k-1)}, \quad \alpha = \gamma\eta.$$

Entonces, si $h = \alpha \leq 3 - 2\sqrt{2}$, el método de Newton-Kantorovich, empezando en x_0, converge a una solución x^* de $F(x) = 0$.

A modo de conclusión, notemos que aunque en los resultados de Kantorovich, Mysovskikh y Smale las hipótesis y los resultados obtenidos son diferentes, en todos ellos se mantiene la idea de buscar un «parámetro universal» h que controle la convergencia semilocal del método de Newton-Kantorovich. Así, para Kantorovich, $h = M\beta\eta$ debe ser $< 1/2$; para Mysovskikh, $h = M\zeta^2\mu$ debe ser < 2; y para Smale, $h = \gamma\eta$ debe ser $\leq 3 - 2\sqrt{2}$.

3. Relaciones de recurrencia

Los resultados sobre el método de Newton-Kantorovich que acabamos de introducir en la sección anterior se basan en la idea de obtener estimadores, por medio de sucesiones escalares, que controlen la distancia de cada iteración respecto al límite de la sucesión de iteraciones, a partir de la distancia de un término de la sucesión mayorizante y su límite. Esta técnica ha dado buen resultado para el método de Newton, puesto que éste está controlado por un único parámetro (h). En cambio, los métodos de tercer orden están controlados por dos parámetros, los de cuarto orden por tres y así sucesivamente, de manera que suele ser útil valerse de más de una sucesión que pueda servir de estimador para distintos operadores en cada caso. Por ello, Candela y Marquina estudian no una sucesión de cotas, sino un sistema de cotas o sistema de relaciones de recurrencia para los métodos de tercer orden de Halley y Chebyshev (véanse [3] y [4] respectivamente). La ventaja que obtienen es que no solo estiman en cada iteración el error cometido, sino que a su vez observan el comportamiento de la función o sus derivadas en cada aproximación. El cálculo de estas sucesiones es autocontenido, en el sentido de que las condiciones iniciales del método influyen en los parámetros que se toman, pero no en los cálculos sucesivos para conseguir la sucesión. La utilización del sistema de relaciones de recurrencia tiene la ventaja de que reduce el problema original en espacios de Banach a un problema más simple con funciones y sucesiones escalares, y proporciona condiciones suficientes para asegurar la convergencia semilocal del método en espacios de Banach.

La idea de buscar un parámetro universal h que controle la convergencia del método de Newton-Kantorovich también fue usada por Candela y Marquina [3]. En concreto, a partir del parámetro $h = M\beta\eta$ que aparece en el teorema 2.1, construyen un sistema de relaciones de recurrencia adimensionales que consiste de dos sucesiones de números reales positivos,

$$a_0 = 1, \quad d_0 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - h a_n d_n}, \quad d_{n+1} = \frac{h}{2} a_{n+1} d_n^2, \quad n \geq 0,$$

que proporcionan una sucesión real positiva que mayoriza la sucesión de Newton en espacios de Banach. Para que el sistema tenga interés y sirva como estimador del error, ambas sucesiones deben ser de términos positivos, lo que significa que $a_n \geq 1$, para todo n; y esto es cierto si y solo si $h < 1/2$. En este caso, el teorema de Kantorovich garantiza que la convergencia semilocal del método de Newton quede controlada mediante el siguiente sistema de relaciones de recurrencia, que dependen de las condiciones iniciales:

$$\|[F'(x_n)]^{-1}\| \leq a_n \beta, \qquad \|x_{n+1} - x_n\| \leq d_n \eta, \qquad \|x^* - x_{n+1}\| \leq (r - r_n)\eta,$$

donde $r = \lim_n r_n$ y $r_n = \sum_{i=0}^{n} d_i$.

Como hemos dicho antes, esta técnica funciona bien con el método de Newton porque éste está controlado por un solo parámetro (h) y, a partir del sistema de relaciones de recurrencia, se construyen dos sucesiones reales. Pero, si consideramos métodos de orden superior, por ejemplo los métodos de tercer orden de Halley y Chebyshev, se necesitan dos parámetros para controlar su convergencia semilocal y, a partir de los sistemas de relaciones de recurrencia correspondientes, se construyen cuatro sucesiones reales (véanse [3] y [4]), de manera que las dificultades técnicas se complican sobremanera. Con el objetivo claro de simplificar la técnica desarrollada por Candela y Marquina, pero manteniendo sus ventajas, el grupo de investigación PRIENOL[1] (Procesos Iterativos y Ecuaciones No Lineales) de la Universidad de La Rioja, cuyos componentes somos los autores de este trabajo, ha desarrollado a lo largo de los últimos años una técnica alternativa que consiste, al igual que la de Candela y Marquina, en establecer un sistema de relaciones de recurrencia pero en el que solo estén involucradas tantas sucesiones escalares como el orden de convergencia del método iterativo menos uno. Esto simplifica en gran manera su aplicación práctica.

En concreto, se ve que la convergencia semilocal del método de Newton-Kantorovich queda controlada por las siguientes dos relaciones de recurrencia [6]:

$$\|[F'(x_n)]^{-1}\| \leq (1 - \delta_{n-1})^{-1} \|[F'(x_{n-1})]^{-1}\|, \quad n \geq 1,$$
$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2} \delta_{n-1} (1 - \delta_{n-1})^{-1} \|x_n - x_{n-1}\|, \quad n \geq 1,$$

donde $\delta_0 = M\beta\eta$, $\delta_n = \frac{1}{2}\delta_{n-1}^2 (1 - \delta_{n-1})^{-2}$, $n \geq 1$, siendo $\{\delta_n\}$ una sucesión escalar estrictamente decreciente a cero y tal que $\delta_n < 1$, para todo $n \geq 0$ (lo cual se deduce de la condición $\delta_0 < 1/2$). La aplicación de esta técnica para el método de Newton puede verse con detalle en [6].

[1] http://www.unirioja.es/dptos/dmc/prienol/

4. Aplicaciones

Es importante destacar que la técnica desarrollada por el grupo PRIENOL para demostrar la convergencia semilocal del método de Newton-Kantorovich simplifica en gran medida el análisis de la convergencia semilocal cuando se estudia bajo condiciones más suaves que las clásicas de Kantorovich.

El teorema 2.1 de Newton-Kantorovich da condiciones suficientes bajo las que la ecuación $F(x) = 0$ (donde $F : \Omega \subseteq X \to Y$, Ω es un subconjunto abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X e Y es otro espacio de Banach) tiene una única solución x^* en un cierto entorno del punto inicial x_0. Observemos que la condición más exigente que requiere el operador F es la (iii) ($\|F''(x)\| \leq M$ en Ω). Sin embargo, hay situaciones en las que esta condición no se verifica. Por ejemplo, en algunas ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein mixto [10]:

$$x(s) = u(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b G_i(s,t) H_i(x(t))\, dt, \quad s \in [a,b], \tag{4}$$

donde $-\infty < a < b < \infty$, G_i, H_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ y u son funciones conocidas y x es una función solución a determinar. Ecuaciones integrales de este tipo pueden encontrarse en modelos dinámicos de reactores químicos [2]. En particular, para ecuaciones de la forma

$$x(s) = u(s) + \int_a^b G(s,t)[\lambda_1 x(t)^{2+p} + \lambda_2 x(t)^n]\, dt, \tag{5}$$

con $s \in [a,b]$, $p \in [0,1]$, $n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, donde u es una función continua y el núcleo G es continuo y no negativo en $[a,b] \times [a,b]$.

La resolución de la ecuación integral (5) es equivalente a resolver la ecuación

$$F(x) = 0, \quad \text{donde} \quad F : C[a,b] \to C[a,b],$$

$$[F(x)](s) = x(s) - u(s) - \int_a^b G(s,t)[\lambda_1 x(t)^{2+p} + \lambda_2 x(t)^n]\, dt,$$

$s \in [a,b]$, $p \in [0,1]$, $n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. En este caso,

$$[F'(x)y](s) = y(s) - \int_a^b G(s,t)[(2+p)\lambda_1 x(t)^{1+p} + n\lambda_2 x(t)^{n-1}] y(t)\, dt,$$

$$[F''(x)(yz)](s) = -\int_a^b G(s,t)[(2+p)(1+p)\lambda_1 x(t)^p + n(n-1)\lambda_2 x(t)^{n-2}] z(t) y(t)\, dt.$$

Notemos que la condición (iii) del teorema 2.1 no se cumple porque F'' no está acotada en $C[a,b]$, y además no es sencillo localizar una bola donde lo esté.

Para solventar el problema anterior, una alternativa es prelocalizar la raíz en algún dominio $\Omega \subset C[a,b]$ y buscar alguna cota superior para $\|F''\|$ en él (véase [9]). Una alternativa mejor y más elegante consiste en suavizar la condición (iii) mediante una del tipo

$$\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|) \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{6}$$

donde $\omega : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ es una función real continua monótona y tal que $\omega(0) \geq 0$ ([8]). Notamos que para el caso de las ecuaciones integrales anteriores es más fácil encontrar una función ω que verifique (6) que buscar una cota superior para $\|F''\|$ en un dominio apropiado.

Volviendo de nuevo a las condiciones clásicas de Newton-Kantorovich, una gran cantidad de diferentes enfoques han ido apareciendo a lo largo de los últimos años a la hora de estudiar la convergencia semilocal del método de Newton-Kantorovich. Por ejemplo, en [18], Ortega cambia la condición (iii) del teorema 2.1 por

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{en} \quad \Omega; \tag{7}$$

es decir, la derivada primera Fréchet F' es Lipschitz continua en Ω. Otros autores ([1], [11], [16], [21]) consideran una generalización de (7), la dada por

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq K\|x - y\|^p, \quad p \in [0, 1], \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{8}$$

diciéndose entonces que F' es (K, p)-Hölder continua en Ω. Obsérvese que si $K = L$ y $p = 1$, (8) se reduce a (7).

En la práctica, la verificación de las condiciones (7) y (8) también es difícil en algunos problemas, ya que se encuentran ciertas dificultades técnicas, de manera que el número de ecuaciones a las que se les puede aplicar el método de Newton-Kantorovich es limitado. En particular, no se puede analizar la convergencia del método a una solución de ecuaciones en las que aparecen sumas de operadores que satisfacen (7) o (8) indistintamente. Por ejemplo, si consideramos (4) con $H_i'(x(t))$, para $i = 1, 2, \ldots, m$, siendo (K_i, p_i)-Hölder continua en Ω, el correspondiente operador $F : C[a, b] \to C[a, b]$,

$$[F(x)](s) = x(s) - u(s) - \sum_{i=1}^{m} \int_a^b G_i(s, t) H_i(x(t))\, dt, \quad s \in [a, b],$$

no satisface ni (7) ni (8) en $C[a, b]$ al considerar por ejemplo la norma del máximo, puesto que

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq \sum_{i=1}^{m} K_i \|x - y\|^{p_i}, \quad p_i \in [0, 1], \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Para solventar este tipo de inconvenientes, podemos considerar la siguiente generalización:

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq \tilde{\omega}(\|x - y\|) \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{9}$$

donde $\tilde{\omega} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función real continua no decreciente y tal que $\tilde{\omega}(0) \geq 0$ (véase [7]). Así, para el caso particular anterior, $\tilde{\omega}(z) = \sum_{i=1}^{m} K_i z^{p_i}$.

Obviamente, las condiciones (7) y (8) son casos particulares de (9), ya que (9) se reduce a (7) y (8) si respectivamente $\tilde{\omega}(z) = Lz$ y $\tilde{\omega}(z) = Kz^p$, donde $K = \text{máx}\{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$ y $p = \text{máx}\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$.

Notemos que por otra parte, no menos importante, la utilización de sucesiones mayorizantes para asegurar la convergencia del método de Newton-Kantorovich bajo las condiciones (6) o (9) es difícil, por no decir prácticamente imposible. De aquí surge la idea de desarrollar una técnica alternativa, la anterior (desarrollada por el grupo PRIENOL), a la de las sucesiones mayorizantes, a partir de la cual el método de Newton-Kantorovich converja siempre que se cumplan (6) o (9). Su aplicación es simple y tiene ciertas ventajas sobre la técnica clásica de las sucesiones mayorizantes. Por un lado, se pueden generalizar los resultados obtenidos bajo condiciones de tipo Newton-Kantorovich; y por otro lado, se pueden mejorar los resultados obtenidos mediante sucesiones mayorizantes cuando F' satisface (8) ([16], [21]). Además, también se pueden obtener estimaciones a priori del error y analizar el R-orden de convergencia ([20]) del método de Newton-Kantorovich (en particular, el método tiene R-orden de convergencia al menos dos si se satisface (6) y $1+p$ si se cumple (9) con $\tilde{\omega}(tz) \leq t^p\tilde{\omega}(z)$, para $z>0$, $t\in[0,1]$, $p\in[0,1]$), así como dar resultados de existencia y unicidad de soluciones.

Como se ha mostrado anteriormente, para establecer la convergencia semilocal del método de Newton-Kantorovich, el operador F y el punto incial x_0 tienen que cumplir ciertas condiciones. En primer lugar, tendremos en cuenta la situación en la que se considera la condición (6). Supongamos que existe $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ para algún $x_0\in\Omega$, donde $\mathcal{L}(Y,X)$ es el conjunto de los operadores lineales de Y en X. Suponemos también lo siguiente:

(C_1) $\|\Gamma_0\| \leq \beta$,

(C_2) $\|x_1 - x_0\| = \|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$,

(C_3) $\|F''(x)\| \leq \omega(\|x\|)$, $x\in\Omega$, donde $\omega : \mathbb{R}_+\cup\{0\} \to \mathbb{R}_+\cup\{0\}$ es una función real continua tal que $\omega(0)\geq 0$ y ω es monótona (no decreciente o no creciente),

(C_4) la ecuación

$$3\beta\eta\varphi(t)t - 2\beta\eta^2\varphi(t) - 2t + 2\eta = 0 \tag{10}$$

tiene al menos una raíz positiva, donde

$$\varphi(t) = \begin{cases} \omega(\|x_0\|+t) & \text{si } \omega \text{ es no decreciente,} \\ \omega(\|x_0\|-t) & \text{si } \omega \text{ es no creciente.} \end{cases}$$

(Denotamos la raíz positiva más pequeña de esta ecuación por R y notemos que esta raíz debe ser menor que $\|x_0\|$ si ω es no creciente.)

Entonces, garantizamos la convergencia semilocal del método de Newton-Kantorovich bajo las condiciones (C_1)–(C_4) mediante el siguiente resultado [8].

Teorema 4.1. *Sean X e Y dos espacios de Banach y $F:\Omega\subseteq X\to Y$ un operador dos veces diferenciable Fréchet en el dominio abierto convexo no vacío Ω. Supongamos que existe $\Gamma_0\in\mathcal{L}(Y,X)$, para algún $x_0\in\Omega$, y que se verifican las condiciones (C_1)–(C_4). Si $h=\beta\eta\varphi(R)\in(0,1/2)$ y $\overline{B(x_0,R)}\subset\Omega$, entonces la sucesión de Newton, empezando en x_0, converge a una solución x^* de la ecuación $F(x)=0$. Además, la solución x^* es única en el dominio $\Omega_0 = B(x_0,r)\cap\Omega$, donde r es la raíz positiva más pequeña de la ecuación*

$$\beta\int_0^1\int_0^1 \varphi(s(R+t(r-R)))\,ds\,(R+t(r-R))\,dt = 1.$$

En segundo lugar, damos otro resultado de convergencia semilocal para el método de Newton-Kantorovich cuando se considera la condición (9) en vez de (6). Supongamos que en este caso se cumplen (C_1), (C_2),

($\tilde{C}_3$) $\|F'(x)-F'(y)\| \leq \tilde{\omega}(\|x-y\|), x, y \in \Omega$, donde $\tilde{\omega} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función real continua no decreciente tal que $\tilde{\omega}(0) \geq 0$,

($\tilde{C}_4$) existe una función real continua no decreciente $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ tal que $\tilde{\omega}(tz) \leq \psi(t)\tilde{\omega}(z)$, con $t \in [0,1]$ y $z \in [0,\infty)$.

Notemos que la condición ($\tilde{C}_4$) no implica ninguna restricción, puesto que ψ siempre existe, ya que siempre podemos tomar $\psi(t) = 1$, como consecuencia de que $\tilde{\omega}$ es una función no decreciente. Podemos incluso considerar $\psi(t) = \sup_{z>0} \dfrac{\tilde{\omega}(tz)}{\tilde{\omega}(z)}$.

El correspondiente resultado de convergencia semilocal es ahora el siguiente teorema [7].

Teorema 4.2. *Sean X e Y dos espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \to Y$ un operador derivable Fréchet en el dominio abierto convexo no vacío Ω. Suponemos que existe $\Gamma_0 \in \mathcal{L}(Y,X)$, para algún $x_0 \in \Omega$, y que se satisfacen las condiciones (C_1), (C_2), ($\tilde{C}_3$) y ($\tilde{C}_4$). Supongamos también que $h = \beta\tilde{\omega}(\eta) < \text{mín}\left\{1-\psi(b), \frac{1}{1+I}\right\}$, donde $b = \frac{hI}{1-h}$ e $I = \int_0^1 \psi(t)\,dt$. Si $\overline{B(x_0,\tilde{R})} \subseteq \Omega$, donde $\tilde{R} = \frac{\eta}{1-b}$, entonces la sucesión de Newton, comenzando en x_0, converge a una solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$, la solución x^* y los puntos x_n pertenecen a la bola cerrada $\overline{B(x_0,\tilde{R})}$. Además, si existe una raíz positiva $\tilde{r}$ de la ecuación*

$$2\beta\tilde{\omega}(\tilde{R}+\tilde{r}) \int_{1/2}^1 \psi(t)\,dt = 1, \tag{11}$$

la solución x^* de $F(x) = 0$ es única en el dominio $\tilde{\Omega}_0 = B(x_0,\tilde{r}) \cap \Omega$.

5. Ejemplos

Consideramos a continuación dos ejemplos de ecuaciones integrales no lineales del tipo Hammerstein mixto (4) en las que se justifican la utilización de las nuevas condiciones de convergencia semilocal (6) y (9) en vez de las clásicas de Kantorovich.

Como se deduce de los anteriores teoremas de convergencia semilocal, una cuestión interesante que surge del estudio de la convergencia de procesos iterativos para resolver ecuaciones es la obtención de dominios de existencia y unicidad de solución. Daremos entonces resultados de este tipo para las dos ecuaciones integrales. En ambos ejemplos se ha trabajado con la norma del máximo.

5.1. Ejemplo 1.

Comenzamos con una aplicación en la que se justifica el uso de la condición (6), en vez de la condición clásica (iii) de Kantorovich, para resolver una ecuación integral del tipo (4) mediante el método de Newton-Kantorovich. Sea (5) con $u(s) = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/3$, $p = 1/3$, $n = 3$ y $[a,b] = [0,1]$:

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s,t)\left(x(t)^{7/3} + x(t)^3/3\right)dt, \quad s \in [0,1], \tag{12}$$

donde el núcleo G es la función de Green en el intervalo $[0,1]$.

En este caso, como

$$[F''(x)yz](s) = -\int_0^1 G(s,t)\left(\frac{28}{9}x(t)^{1/3} + 2x(t)\right) z(t)y(t)\,dt, \tag{13}$$

es claro que F'' no está acotada en $C[0,1]$. Entonces, si se quiere utilizar el teorema 2.1 de Newton-Kantorovich para estudiar la convergencia del método de Newton-Kantorovich a una solución x^* de (12), habría que prelocalizar primero la solución en algún dominio $\Omega \subseteq C[0,1]$ en el que F'' esté acotada. Por ejemplo, teniendo en cuenta que $x^* \in C[0,1]$, se sigue que

$$\|x^*\| - \frac{\|x^*\|^{7/3}}{8} - \frac{\|x^*\|^3}{24} - 1 \le 0;$$

es decir, $\|x^*\| \le \rho_1 = 1.36294\ldots$ y $\|x^*\| \ge \rho_2 = 2.1236\ldots$, donde ρ_1 y ρ_2 son las raíces reales positivas de la ecuación $z - z^{7/3}/8 - z^3/24 - 1 = 0$. Si ahora buscamos una solución x^* de la ecuación integral tal que $\|x^*\| < \rho_1$, podemos considerar $\Omega = B(0,\rho) \subset C[0,1]$, con $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$, de manera que F'' está acotada en Ω. Sin embargo, si buscamos una solución x^* tal que $\|x^*\| \ge \rho_2$, no podemos determinar un dominio $\Omega \subseteq C[0,1]$ en el que F'' esté acotada. Para evitar este problema, imponemos la condición (6) al operador F, en vez de la (iii), y utilizamos el teorema 4.1 de convergencia semilocal en vez del 2.1.

A partir de (13) vemos que

$$\omega(z) = \frac{7}{18}\sqrt[3]{z} + z/4 \qquad \text{y} \qquad \varphi(t) = \omega(\|x_0\| + t).$$

Si ahora tomamos como aproximación incial la función $x_0(s) = 1$, entonces $\|I - F'(x_0)\| \le 5/12 < 1$, de manera que el operador Γ_0 existe y $\|\Gamma_0\| \le 12/7 = \beta$. Además, $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \le 2/7 = \eta$ y $\varphi(t) = \frac{7}{18}\sqrt[3]{1+t} + (1+t)/4$. Por tanto, $R = 0.8434\ldots$ es la raíz positiva más pequeña de la correspondiente ecuación (10) y $h = \beta\eta\omega(R) = 0.4592\ldots \in (0, 1/2)$. Luego se cumplen las condiciones del teorema 4.1 y podemos garantizar entonces la convergencia del método de Newton-Kantorovich a una solución x^* de la ecuación (12), que es única en el dominio $\{v \in C[0,1];\ \|v - 1\| \le 0.8434\ldots\}$. Observemos que en este caso los dominios de existencia y unicidad de soluciones coinciden.

5.2. Ejemplo 2. Veamos una segunda aplicación en la que se justifica el uso de la condición (9) a la hora de aplicar el método de Newton-Kantorovich; esta vez para resolver la siguiente ecuación integral del tipo (4):

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s,t)\left(\frac{1}{2}x(t)^{3/2} + \frac{1}{2}x(t)^{4/3} + \frac{1}{3}x(t)^2\right) dt, \quad s \in [0,1], \tag{14}$$

donde el núcleo G es la función de Green en el intervalo $[0,1]$. Hacemos entonces uso del teorema 4.2.

Si escribimos (14) en la forma $F(x) = 0$, donde $F : C[a,b] \to C[a,b]$ y

$$[F(x)](s) = x(s) - 1 - \int_0^1 G(s,t)\left(\frac{1}{2}x(t)^{3/2} + \frac{1}{2}x(t)^{4/3} + \frac{1}{3}x(t)^2\right) dt,$$

obtenemos que la derivada primera del operador F,

$$[F'(x)y](s) = y(s) - \int_0^1 G(s,t)\left(\frac{3}{4}x(t)^{1/2} + \frac{2}{3}x(t)^{1/3} + \frac{2}{3}x(t)\right)y(t)\,dt,$$

no satisface ni (7) ni (8), pero sí (9). En este caso,

$$\tilde{\omega}(z) = \frac{3}{32}\sqrt{z} + \frac{1}{12}\sqrt[3]{z} + \frac{z}{12} \qquad \text{y} \qquad \psi(t) = \sqrt[3]{t}.$$

Si elegimos como función aproximación inicial $x_0(s) = 1$, tenemos $\|I - F'(x_0)\| \leq 25/96 < 1$. Luego existe el operador Γ_0, $\|\Gamma_0\| \leq 96/71 = \beta$ y $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq 16/71 = \eta$. Por tanto, $h = \beta\tilde{\omega}(\eta) = 0.1541\ldots < \text{mín}\left\{1 - \psi(b), \frac{1}{1+I}\right\} = 0.4894\ldots$ Se cumplen entonces las condiciones del teorema 4.2 y podemos garantizar así la convergencia del método de Newton-Kantorovich a una solución x^* de la ecuación (14). Además, x^* está en el dominio $\{v \in C[0,1];\ \|v - 1\| \leq 0.2610\ldots\}$ y es única en $\{v \in C[0,1];\ \|v - 1\| < 5.1693\ldots\}$.

5.3. Modelo aritmético para aproximar una solución de una ecuación integral del tipo (4). Terminamos discretizando ecuaciones integrales del tipo (4) para transformarlas en un problema de dimensión finita y resolverlas después mediante el método de Newton-Kantorovich. Para ello, aproximamos la integral de (4) mediante una fórmula de cuadratura numérica. En concreto, utilizamos la cuadratura de Gauss-Legendre con ocho nodos, de manera que la integral se aproxima mediante cuadraturas con abscisas t_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, tales que $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_8 \leq 1$, y pesos w_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$. Véase la tabla 1.

i	t_i	w_i	i	t_i	w_i
1	0.0198...	0.0506...	5	0.5917...	0.1813...
2	0.1016...	0.1111...	6	0.7627...	0.1568...
3	0.2372...	0.1568...	7	0.8983...	0.1111...
4	0.4082...	0.1813...	8	0.9801...	0.0506...

TABLA 1. Nodos y pesos para la cuadratura de Gauss-Legendre.

La ecuación (4) es ahora equivalente al siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$x_j = u_j + \sum_{k=1}^{8} a_{jk}\left(\sum_{i=1}^{m} H_i(x_k)\right), \quad j = 1, 2, \ldots, 8, \tag{15}$$

donde x_j y u_j denotan respectivamente las aproximaciones de $x(t_j)$ y $u(t_j)$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ y

$$a_{jk} = \begin{cases} w_k t_k(1 - t_j) & \text{si } k \leq j, \\ w_k t_j(1 - t_k) & \text{si } k > j. \end{cases}$$

Si consideramos el espacio de Banach real de ocho dimensiones $\mathbb{R}^8$ con elementos $\mathbf{x}$, (15) se puede escribir de la forma:

$$F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{u} - A\,\hat{\mathbf{x}} = 0, \tag{16}$$

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_8)^T, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_8)^T, \quad A = (a_{jk})_{j,k=1}^{8},$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{m} H_i(x_1), \sum_{i=1}^{m} H_i(x_2), \dots, \sum_{i=1}^{m} H_i(x_8) \right)^T .$$

Además,

$$F'(\mathbf{x}) = I - A \cdot \operatorname{diag} \left\{ \sum_{i=1}^{m} H_i'(x_1), \sum_{i=1}^{m} H_i'(x_2), \dots, \sum_{i=1}^{m} H_i'(x_8) \right\}.$$

Empezando con el vector inicial $\mathbf{x_0}$, el paso $n+1$ del método de Newton se calcula, para el caso finito dimensional, a partir del paso n como sigue:

- Etapa 1: Se calcula la descomposición LR de F' mediante eliminación gaussiana.
- Etapa 2: Se resuelve el sistema lineal: $F(\mathbf{x_n}) + F'(\mathbf{x_n})\mathbf{y_n} = 0$.
- Etapa 3: Se define: $\mathbf{x_{n+1}} = \mathbf{x_n} + \mathbf{y_n}$.

Consideramos ahora el caso particular (14) de (4). Si elegimos como vector inicial $\mathbf{x_0} = (1, 1, \dots, 1)^T$ para aplicar el método de Newton, como consecuencia de haber tomado previamente la función inicial $x_0(s) = 1$, después de 4 iteraciones y utilizando 16 dígitos significativos, obtenemos la aproximación numérica de la solución, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^* \dots, x_8^*)^T$, que aparece en la tabla 2.

i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*
1	1.0164...	3	1.1586...	5	1.2148...	7	1.0784...
2	1.0784...	4	1.2148...	6	1.1586...	8	1.0164...

TABLA 2. Solución mumérica de (14).

Si a continuación interpolamos los puntos de la tabla 2 y tenemos en cuenta que la solución de (14) verifica que $x(0) = x(1) = 0$, obtenemos una aproximación $\mathbf{x^I}$ de la solución numérica, véase la figura 1. Observamos además que la solución obtenida está dentro del dominio de existencia obtenido previamente.

Referencias

[1] I. K. ARGYROS. Remarks on the convergence of Newton's method under Hölder continuity conditions. *Tamkang J. Math.* **23**(4), 269–277, 1992.

[2] D. D. BRUNS, J. E. BAILEY. Nonlinear feedback control for operating a nonisothermal CSTR near an unstable steady state. *Chem. Eng. Sci.* **32**, 257–264, 1997.

[3] V. CANDELA, A. MARQUINA. Recurrence relations for rational cubic methods I: The Halley method. *Computing* **44**, 169–184, 1990.

[4] V. CANDELA, A. MARQUINA. Recurrence relations for rational cubic methods II: The Chebyshev method. *Computing* **45**, 355–367, 1990.

[5] J. L. CHABERT ET AL. *A History of Algorithms: from the Pebble to the Microchip.* Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1999.

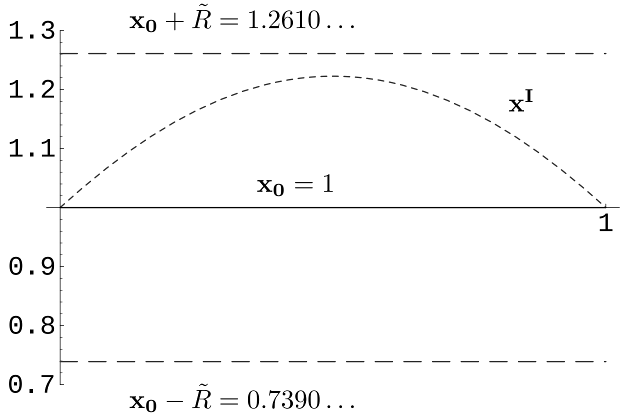

FIGURA 1. Solución aproximada $\mathbf{x^I}$ de la ecuación (14).

[6] J. A. Ezquerro, J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández, N. Romero, M. J. Rubio. El método de Newton: de Newton a Kantorovich. Aceptado para su publicación en *La Gaceta de la RSME*.

[7] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández. Generalized differentiability conditions for Newton's method. *IMA J. Numer. Anal.* **22**, 187–205, 2002.

[8] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández. On an application of Newton's method to nonlinear operators with w-conditioned second derivative. *BIT* **42**(3), 519–530, 2002.

[9] J. A. Ezquerro, M. A. Hernández. Halley's method for operators with unbounded second derivative. *Appl. Numer. Math.* **57**(3), 354–360, 2007.

[10] M. Ganesh, M. C. Joshi. Numerical solvability of Hammerstein integral equations of mixed type. *IMA J. Numer. Anal.* **11**, 21–31, 1991.

[11] M. A. Hernández. The Newton Method for Operators with Hölder Continuous First Derivative. *J. Optim. Theory Appl.* **109**, 631–648, 2001.

[12] L. V. Kantorovich. The method of successive approximations for functional analysis. *Acta. Math.* **71**, 63–97, 1939.

[13] L. V. Kantorovich. On Newton's method for functional equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **59**, 1237–1240, 1948 (en ruso).

[14] L. V. Kantorovich. The majorant principle and Newton's method. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **76**, 17–20, 1951 (en ruso).

[15] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. *Functional analysis*. Pergamon Press, Oxford, 1982.

[16] H. Keller. *Numerical methods for two-point boundary value problems*. Dover Pub., Nueva York, 1992.

[17] I. P. Mysovskikh. On convergence of L.V. Kantorovich's method for functional equations and its applications. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **70**, 565–568, 1950 (en ruso).

[18] J. M. Ortega. The Newton-Kantorovich theorem. *Amer. Math. Monthly* **75**, 658–660, 1968.

[19] B. T. Polyak. Newton-Kantorovich method and its global convergence. *J. Math. Sciences* **133**(4), 1513–1523, 2006.

[20] F. A. Potra, V. Pták. *Nondiscrete induction and iterative processes*. Pitman, New York, 1984.

[21] J. Rokne. Newton's method under mild differentiability conditions with error analysis. *Numer. Math.* **18**, 401–412, 1972.

[22] S. Smale. Newton's method estimates from data at one point. En *The Merging of Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics*, R. Ewing, K. Gross and C. Martin (eds.), pp. 185–196. Springer-Verlag, Nueva York, 1986.

[23] D. R. Wang, F. G. Zhao. The theory of Smale's point estimation and its applications. *J. Comput. Appl. Math.* **60**, 253–269, 1995.

[24] T. Yamamoto. Error bounds for Newton's and Newton-like methods. *J. Comput. Appl. Math.* **124**, 1–23, 2000.

[25] T. Yamamoto. Historical developments in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods. *J. Comput. Appl. Math.* **124**, 1–23, 2000.

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correo electrónico: jezquer@unirioja.es

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correo electrónico: jmguti@unirioja.es

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correo electrónico: mahernan@unirioja.es

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correo electrónico: natalia.romero@unirioja.es

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correo electrónico: mjesus.rubio@unirioja.es