CONTRIBUCIONES CIENTÍFICAS
EN HONOR DE MIRIAN ANDRÉS GÓMEZ
(Laureano Lambán, Ana Romero y Julio Rubio, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2010.

MANUAL DE HIPERCÍRCULOS

T. RECIO, J. R. SENDRA, L. F. TABERA Y C. VILLARINO

Dedicado a la memoria de Mirian Andrés Gómez

RESUMEN. Los hipercírculos constituyen una clase especial de curvas que aparecen cuando se analiza el cuerpo de parametrización de una parametrización racional de una curva algebraica. El objetivo de este trabajo es el estudio de este tipo de curvas. De forma más precisa, después de introducir el concepto de hipercículo y de estudiar sus propiedades básicas, se muestra como se clasifican los hipercículos bajo distintos criterios y se establecen sus principales propiedades geométricas. Asimismo, se estudia la relación existente entre las tres principales representaciones de un hipercírculo: ecuaciones implícitas, parametrizaciones racionales y unidades generadoras. Por último, se muestra también la aplicación de este tipo de curvas al problema de encontrar una reparametrización algebraicamente óptima de una curva racional.

ABSTRACT. Hypercircles are a special class of curves that appear when analyzing the field of parametrization of a rational parametrization of an algebraic curve. The aim of this paper is the study of this type of curves. More precisely, once the concept of hypercircle has been introduced and its basic properties have been studied, we classify the hypercircles under different criteria and we establish their main geometric properties. In addition, we study the relation among the three main representations of a hypercircle: implicit equations, rational parametrizations and generating units. Finally, we show, as well, the application of these curves to the problem of finding an algebraically optimal reparametrization of a rational curve.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo trata sobre una clase especial de curvas racionales, denominadas hipercírculos. Un hipercírculo es una generalización, en cierto sentido, de la idea de círculo. Es bien sabido que un círculo real (en el plano) puede considerarse como la imagen del eje real bajo una transformación de Moebius del plano complejo [4]. Por ejemplo, considerando la transformación $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto u(t) = \frac{1}{t+i}$, e identificando $\mathbb{C}$ con el plano $\mathbb{R}^2$, para determinar la imagen del eje real en $\mathbb{R}^2$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14Q05, 14M20.

Key words and phrases. Hypercircle, rational curve, field of parametrization, Weil descente method.

Los autores están parcialmente financiados por el proyecto del "Ministerio de Educación y Ciencia" MTM2008-04699-C03, El tercer autor también está financiado por una beca postdoctoral, "Ministerio de Ciencia e Innovación: Programa Nacional de Movilidad de Recursos Humanos del Plan nacional de I-D+I 2008-2011".

mediante esta transformación, se debe calcular la parte real e imaginaria de la unidad $u(t)$.

$$\begin{array}{ccc} t\in\mathbb{R} & \rightarrow & \frac{1}{t+i}=\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,i \\ \downarrow & & \downarrow \\ (t,0) & \rightarrow & \left(\frac{t}{t^2+1},\frac{-1}{t^2+1}\right) \end{array}$$

Por tanto, la imagen del eje real es la curva racional definida paramétricamente por $\phi(t)=\left(\frac{t}{t^2+1},\frac{-1}{t^2+1}\right)$, que define el círculo real de ecuación $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Si ahora se reemplaza el cuerpo de los números reales por un cuerpo arbitrario $\mathbb{K}$ de característica cero, el cuerpo de los números complejos por una extensión algebraica de $\mathbb{K}$ de grado d, $\mathbb{L}=\mathbb{K}(\alpha)$, y se considera una fracción lineal $u(t)=\frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}t+\mathfrak{d}}\in\mathbb{L}(t)$, se puede determinar la imagen del "Eje-$\mathbb{K}$" a través de $u(t)$, identificando $\mathbb{L}$ con $\mathbb{K}^d$ y desarrollando, como en el caso complejo, la unidad $u(t)$ en potencias de α. Tal imagen en $\mathbb{K}^d$ es, por definición, un hipercírculo (aunque, más formalmente, se considera la clausura de Zariski de esta imagen en el espacio afín sobre la clausura algebraica $\mathbb{F}$ de $\mathbb{L}$, del mismo modo que se consideran los círculos de $\mathbb{R}^2$ como la parte real del correspondiente círculo complejo de $\mathbb{C}^2$).

Estas curvas aparecen por primera vez en [1], en relación con el problema de la $\mathbb{K}$-optimalidad algebraica de curvas racionales: dada una curva racional $\mathcal{C}$, definida a través de una parametrización racional propia sobre $\mathbb{K}(\alpha)$ se trata de determinar si existe un cambio birracional de parámetro que transforme la parametrización dada en una parametrización sobre $\mathbb{K}$. A partir de la parametrización de $\mathcal{C}$ se construye, en [1], una nueva variedad algebraica, denominada variedad paramétrica de descenso de Weil, relacionada con la transformación que hace Weil en [13], trasladando el problema original al de analizar si esta nueva variedad es un hipercírculo, es decir, una curva racional $\mathbb{K}$-parametrizable generada por una unidad $u(t)$ de $\mathbb{K}(\alpha)$. En caso afirmativo, la unidad que genera el hipercírculo es el cambio de variable necesario para reparametrizar $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{K}$. De ahí nace el interés por el estudio de estas curvas, ya que, como se sugirió en [1], la rica estructura interna de estas curvas facilita la reparametrización de la curva dada originalmente (véanse [2], [8], [9] como referencias complementarias).

Aunque en este artículo nos vamos a limitar al estudio de curvas, puede ser reseñable señalar que una generalización, de este concepto de "hipercírculo", a variedades de dimensión mayor que uno, ha dado lugar a las variedades llamadas "ultracuádricas", que también aparecen como elemento auxiliar en la resolución del mismo problema de reparametrización para variedades birracionales de dimensión superior. Sus propiedades elementales se pueden encontrar en [3], [11].

El concepto de hipercírculo ha sido desarrollado por los autores de este artículo a lo largo de los últimos diez años, poniendo en público diversos artículos sobre propiedades, estructura, algoritmos etc. de estas curvas en una serie de actas de conferencias, diversos artículos, tesis y tesinas. A la vista de la dispersión de referencias nos ha parecido interesante recopilar, en un único artículo, las ideas fundamentales sobre estas curvas. Por ello, este artículo está escrito como una guía sobre hipercírculos en la que los resultados se enuncian con detalle remitiendo al lector, para las demostraciones de los mismos, a la referencia pertinente.

En este artículo se usa la siguiente **notación**:

- $\mathbb{K}$ es un cuerpo computable de característica cero y $\mathbb{F}$ su clausura algebraica.
- $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{F}$ una extensión algebraica finita de grado $d > 1$ (i.e. $d = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$).
- α es un elemento primitivo de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{K}$; es decir, $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$.
- Sea $\mathbb{L}$ un cuerpo, entonces $\mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ representa las unidades de $\mathbb{L}(t)$ bajo la operación de composición; es decir, las funciones racionales $\frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}t+\mathfrak{d}}$ con $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \in \mathbb{L}$ y $\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} \neq 0$.
- $\mathrm{Hip}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ representa el conjunto de todos los hipercírculos generados sobre $\mathbb{K}$ por unidades de $\mathbb{L}(t) = \mathbb{K}(\alpha)(t)$.

2. Hipercírculos: Definición y Primeras Propiedades

Comenzamos la exposición tratando los aspectos más básicos del estudio de los hipercírculos. De una manera resumida podemos decir que los hipercírculos son curvas racionales generadas a partir de una base de una extensión algebraica y una fracción lineal $u(t)$. Sin embargo, es conveniente restringirse a la base canónica formada por las potencias de un elemento primitivo. Por tanto, comenzaremos explorando esta definición, observando, más adelante, la relación existente entre distintos hipercírculos al modificar la correspondiente unidad generadora $u(t)$.

Definición 2.1 (cf. [8] Definition 2.1)**.** *Sea $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ una extensión algebraica de $\mathbb{K}$, con $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = d$, sea $\beta_0, \ldots, \beta_{d-1}$ una $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{L}$. Sea $u(t) = \frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}t+\mathfrak{d}}$ una fracción lineal de $\mathbb{L}(t)$. Esta fracción lineal se puede escribir de manera única como*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{d-1} \phi_i(t)\beta_i$$

donde $\phi_0, \ldots, \phi_{d-1} \in \mathbb{K}(t)$. El hipercírculo $\mathcal{U}$ generado por $u(t)$ respecto de la base $\{\beta_0, \ldots, \beta_{d-1}\}$ es la curva racional en $\mathbb{F}^d$ definida por la parametrización $\phi(t) = (\phi_0(t), \ldots, \phi_{d-1}(t))$, donde $\mathbb{F}$ es la clausura algebraica de $\mathbb{L}$. En esta situación, se dirá que $u(t)$ es una unidad asociada a $\mathcal{U}$ y que $\phi(t)$ es la parametrización de $\mathcal{U}$ generada por $u(t)$.

Ejemplo 2.1. *Sea $\mathbb{Q}(\alpha)$ la extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ definida por $\alpha^4 + 1 = 0$. Sea $u(t) = \frac{t-\alpha}{t+\alpha}$ una fracción lineal de $\mathbb{Q}(\alpha)(t)$. La parametrización $\phi(t)$ del hipercírculo $\mathcal{U}_\alpha$ asociado a $u(t)$ respecto de la base $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ es*

$$\phi(t) = \left(\frac{t^4-1}{t^4+1}, \frac{-2t^3}{t^4+1}, \frac{2t^2}{t^4+1}, \frac{-2t}{t^4+1} \right).$$

Ahora considérese el hipercírculo asociado a la misma unidad pero respecto de la base $\{1, 1+\alpha^3, 2\alpha^3 - \alpha^2 + 1, 3\alpha^3 - 3\alpha^2 + \alpha + 1\}$. En este caso tenemos

$$\psi(t) = \left(\frac{t^4 + 2t^3 - 2t^2 + 2t - 1}{t^4+1}, \frac{-6t^3 + 4t^2 - 2t}{t^4+1}, \frac{6t^3 - 2t^2}{t^4+1}, \frac{-2t^3}{t^4+1} \right),$$

que define una curva $\mathcal{U}_\beta$ distinta de $\mathcal{U}_\alpha$. Considerando las bases $\mathcal{B}^\star = \{1, 1+\alpha^3, 2\alpha^3-\alpha^2+1, 3\alpha^3-3\alpha^2+\alpha+1\}$ y $\mathcal{B} = \{1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3\}$ de la extensión $\mathbb{Q}(\alpha)$, la matriz $\mathcal{M} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ del cambio de base de $\mathcal{B}^\star$ a $\mathcal{B}$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

induce una $\mathbb{K}$-transformación afín $\Psi : \mathbb{F}^4 \longrightarrow \mathbb{F}^4$ definida por $\Psi(\bar{X}_0,\ldots,\bar{X}_3) = \mathcal{M}\bar{X}^t$ que transforma $\mathcal{U}_\beta$ en $\mathcal{U}_\alpha$. En efecto, las coordenadas de $u(t)$ respecto a $\mathcal{B}^\star$ son las componentes $\psi_i(t)$ de $\psi(t)$. Por tanto, $\Psi(\psi_0(t),\ldots,\psi_3(t))$ son las coordenadas de $u(t)$ respecto a $\mathcal{B}$; es decir, las componentes de $\phi(t)$.

Observación 2.1. *Como hemos visto en el ejemplo, dadas dos $\mathbb{K}$-bases $\beta = (\beta_0,\ldots,\beta_{d-1})$ y $\gamma = (\gamma_0,\ldots,\gamma_{d-1})$ de $\mathbb{L}$, sea A la matriz de cambio de base de forma que $\beta^t = A\gamma^t$. Tomemos una fracción lineal $u(t)$ y sean $\mathcal{U}_\beta$ y $\mathcal{U}_\gamma$ los dos hipercírculos obtenidos a partir de las bases β,γ respectivamente. Se sigue que A define un automorfismo lineal de $\mathbb{F}^d$ definido sobre $\mathbb{K}$ que transforma la curva U_γ en la curva U_β. Por tanto, podemos seleccionar, sin pérdida de generalidad, la base $\{1,\alpha,\ldots,\alpha^{d-1}\}$, lo que haremos a partir de ahora. La elección de esta base tiene otras ventajas, como la descripción cerrada de los puntos del infinito de la curva que veremos en el Teorema 4.2. Por supuesto, también podemos escoger otro elemento primitivo de la extensión, lo que nos daría otra base a partir de la cuál definir un hipercírculo. En el caso en el que puedan existir dudas, denominaremos α-hipercírculo al hipercírculo asociado a una fracción lineal $u(t)$ respecto de la base $\{1,\alpha,\ldots,\alpha^{d-1}\}$, donde α es un elemento primitivo de la extensión algebraica.*

Ejemplo 2.2. *Para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ y $u(t) = \frac{t+\alpha}{t-\alpha}$ podemos determinar los hipercírculos asociados a $u(t)$ para las extensiones $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,i)$, definidas, respectivamente, por los polinomios irreducibles sobre $\mathbb{Q}$, x^2-2 y x^2+2 sobre las respectivas bases $\{1,\sqrt{2}\}$ y $\{1,\sqrt{2}i\}$. Para $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ se obtiene $\phi(t) = \left(\frac{t^2+2}{-2+t^2}, \frac{2t}{-2+t^2}\right)$ y para $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,i)$ se obtiene $\phi(t) = \left(\frac{t^2-2}{2+t^2}, \frac{2t}{2+t^2}\right)$, que corresponden, respectivamente, a una hipérbola y a una elipse.*

Ejemplo 2.3. *Consideremos ahora la extensión $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ y tomemos las fracciones lineales $u(t) = \frac{it+1}{t-3+i}$, $v(t) = \frac{(2i+1)t+(i-1)}{(i-1)t+(-i+4)}$, $w(t) = \frac{t+(i+2)}{t-i}$. Si tomamos la base $\{1,i\}$, comprobamos que tanto $u(t)$ y $v(t)$ definen el círculo $x^2+y^2-3x = 1$, mientras que la fracción lineal $w(t)$ define el círculo $x^2+y^2-2y = 1$.*

Con este ejemplo, comprobamos que dos fracciones lineales distintas pueden representar el mismo hipercírculo. Si dos fracciones lineales $u(t)$ y $v(t)$ definen el mismo hipercírculo, sean $\phi_u(t)$ y $\phi_v(t)$ las dos parametrizaciones asociadas a estas fracciones lineales. Ambas parametrizaciones son birracionales. Por tanto $\phi_v^{-1}\circ\phi_u$ es un automorfismo birracional de la recta, por lo que es a su vez una fracción lineal $w(t)$. Además, puesto que tanto ϕ_u como ϕ_v tienen coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$, tenemos que $w(t)$ también tiene coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$. De esta manera

$\phi_u(t) = \phi_v(w(t))$. De donde se sigue que $u(t) = v(w(t))$. Recíprocamente, si existe una fracción lineal $w(t)$ sobre $\mathbb{K}$ tal que $u(t) = v(w(t))$, entonces $\phi_u(t) = \phi_v(w(t))$ y los hipercírculos asociados a $u(t)$ y $v(t)$ coinciden.

Definimos así una biyección entre los α-hipercírculos en $\mathbb{F}^d$ y las fracciones lineales $u(t) \in \mathbb{K}(\alpha)(t)$ módulo composición a derecha por una fracción lineal de $\mathbb{K}(t)$. Además, dos unidades $u(t)$, $v(t)$ representan el mismo hipercírculo si y sólo si $u^{-1} \circ v \in \mathbb{K}(t)$. Lamentablemente, estas clases de equivalencia no heredan ninguna estructura de grupo con la operación de composición, puesto que las fracciones lineales con coeficientes en $\mathbb{K}$ no son un subgrupo normal de las fracciones lineales con coeficientes en $\mathbb{K}(\alpha)$ (considerando como operación la composición de funciones). Es más, el único supergrupo de $\mathbb{U}(\mathbb{K}(t))$ donde el propio $\mathbb{U}(\mathbb{K}(t))$ es un grupo normal es $\mathbb{U}(\mathbb{K}(t))$. Por otro lado, el único subgrupo normal de $\mathbb{U}(\mathbb{K}(\alpha)(t))$ que está contenido en $\mathbb{U}(\mathbb{K}(t))$ es el subgrupo trivial $\{t\}$. Esto impide que tengamos una buena estructura algebraica en las clases incluso si restringimos los grupos en los que pretendemos trabajar.

Esta no normalidad significa lo siguiente, si tenemos el hipercírculo U asociado a una unidad $u(t)$ ¿cómo se transforma U al componer la fracción lineal $u(t)$ a derecha con una fracción lineal $v(t)$ arbitraria? Sabemos que si $v(t)$ tiene coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces U permanece invariante. Sin embargo, si v no tiene coeficientes en $\mathbb{K}$ la transformación en U no está definida, toda vez que depende del representante de la clase de $u(t)$ escogida. Otra pregunta similar es qué le ocurre a U cuando componemos $u(t)$ con $v(t)$ a izquierda. Esta operación sí está bien definida, pues si $w(t)$ es una fracción lineal con coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces las fracciones lineales $u(w(t))$ y $v(u(w(t)))$ definen el mismo hipercírculo. En el caso clásico, una transformación de Moebius transforma las rectas y círculos del plano en rectas y círculos. En el caso general ocurre algo similar. Una fracción lineal $u(t)$ induce una aplicación $f : \mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^d = \mathbb{K}(\alpha)$ dada por $\sum_{i=0}^{d-1} f_i(t_0, \ldots, t_{d-1})\alpha^i = u(\sum_{i=0}^{d-1} t_i\alpha^i)$. Esta aplicación se extiende, de manera única, a un morfismo $\mathbb{F}^d \to \mathbb{F}^d$. En estas condiciones, el hipercírculo U no es más que la imagen por este morfismo de la recta dada paramétricamente por $(t, 0 \ldots, 0)$, que se identifica con $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(\alpha)$ respecto de la base $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}\}$, siendo en el caso clásico, el eje real en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Se sigue que una fracción lineal $v(t)$ está asociada a un morfismo $f : \mathbb{F}^d \to \mathbb{F}^d$ que transforma el hipercírculo U asociado a la unidad $u(t)$ en el hipercírculo asociado a la unidad $v(u(t))$. Más concretamente, tenemos las siguientes transformaciones básicas:

Lema 2.1 ([8] Lemma 2.4). *Sea U el α-hipercírculo asociado a una fracción lineal $u(t)$, y $\lambda = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i\alpha^i \in \mathbb{K}(\alpha)^*$, donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Entonces,*

1. *$\lambda + u(t)$ es una unidad que genera el hipercírculo obtenido a partir de U mediante la translación de vector $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1})$.*
2. *$\lambda u(t)$ es una unidad que genera el hipercírculo obtenido a partir de U mediante la transformación sobre afín definida sobre $\mathbb{K}$ dada por el cambio de base de $\mathcal{B}^\star = \{\lambda, \lambda\alpha, \ldots, \lambda\alpha^{d-1}\}$ a $\mathcal{B} = \{1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}\}$.*

Sin embargo, aún no tenemos claro qué le ocurre a un hipercírculo mediante la transformación $1/t$.

Esto abre dos posibles líneas de estudio, una de las cuales consiste en utilizar estas transformaciones para poder *simplificar* el hipercírculo de estudio. La otra consiste en estudiar estas transformaciones $f : \mathbb{F}^d \to \mathbb{F}^d$ como análogas de las transformaciones de Moebius del plano. Por ejemplo, comprobar si existe alguna noción de métrica y ángulo de manera que estas transformaciones sean precisamente las transformaciones conformes. Si bien esta línea no ha sido desarrollada, sí ha inspirado algunos de los algoritmos existentes para trabajar con hipercírculos.

Una alternativa más es la utilización de estas transformaciones para clasificar los hipercírculos de alguna forma. De esto trata la sección siguiente.

3. Clasificación de los Hipercírculos

En esta sección proporcionamos varios parámetros que nos permiten clasificar los hipercírculos en diferentes clases. Primeramente, por definición, todos los hipercírculos son $\mathbb{K}$-birracionales. En los ejemplos hemos comprobado que, para extensiones de grado 2, obtenemos cónicas. Una primera pregunta que podemos hacer es tratar de calcular qué tipo de cónicas son hipercírculos sobre $\mathbb{Q}$. Para empezar, deben ser cónicas definidas sobre los racionales y que posean puntos racionales.

La siguiente tabla clasifica algunas cónicas del plano según sean hipercírculos o no sobre $\mathbb{Q}$ y muestra cuál es el polinomio mínimo del elemento α que define la extensión algebraica.

- Parábola: $y - (ax^2 + bx + c) = 0, \ \ a, b, c \in \mathbb{Q}, a \neq 0$
  - Parametrizada por $\psi(t) = (t, at^2 + bt + c)$
  - Es Hipercírculo: No
  - Polinomio mínimo de la extensión algebraica: –
  - Punto del infinito: $[0 : 1 : 0]$

- Circunferencia: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \ \ a, b, r \in \mathbb{Q}, \ r \neq 0$
  - Parametrizado por: $\psi(t) = \left(\dfrac{2rt}{t^2+1} + a, \dfrac{r(t^2-1)}{t^2+1} + b\right)$
  - Es Hipercírculo: Si
  - Polinomio mínimo de la extensión algebraica: $\alpha^2 + 1$
  - Puntos del infinito: $[1 : i : 0]$, $[1 : -i : 0]$

- Circunferencia: $x^2 + y^2 = 6$
  - Parametrizado por: $\psi(t) = \left(\dfrac{2\sqrt{6}t}{t^2+1}, \dfrac{\sqrt{6}(t^2-1)}{t^2+1}\right)$
  - Es Hipercírculo: No
  - Polinomio mínimo de la extensión algebraica: –
  - Puntos del infinito: $[1 : i : 0]$, $[1 : -i : 0]$

- Elipse $\dfrac{(x-a)^2}{\lambda^2}+\dfrac{(y-b)^2}{\mu^2}=1,\ \ a,b,\lambda,\mu\in\mathbb{Q}$
  - Parametrizada por: $\psi(t)=\left(\dfrac{2\lambda\, t}{t^2+1}+a,\dfrac{\mu\,\left(t^2-1\right)}{t^2+1}+b\right)$
  - Es Hipercírculo: Si
  - Polinomio mínimo de la extensión algebraica: $\alpha^2+\dfrac{\lambda^2}{\mu^2}$
  - Puntos del infinito: $[\lambda:i\mu:0]$, $[\lambda:-i\mu:0]$
- Elipse $2x^2+y^2=7$
  - Parametrizada por: $\psi(t)=\left(\dfrac{\sqrt{7}\,t}{\sqrt{2}(t^2+1)},\dfrac{\sqrt{7}(t^2-1)}{t^2+1}\right)$
  - Es Hipercírculo: No
  - Polinomio mínimo de la extensión algebraica: –
  - Puntos del infinito $[1:2i:0]$, $[1:-2i:0]$
- Hipérbola $\dfrac{(x-a)^2}{\lambda^2}-\dfrac{(y-b)^2}{\mu^2}=1,\ \ a,b,\lambda\in\mathbb{Q},\mu^2\in\mathbb{Q},\mu\notin\mathbb{Q},\ \lambda,\mu\neq 0$
  - Parametrizada por:
  $$\psi(t)=\left(\frac{\lambda^3-t^2\mu^2a+\lambda^2a+t^2\mu^2\lambda}{\lambda^2-t^2\mu^2},\frac{-2\,t\mu^2\lambda+\lambda^2b-t^2\mu^2b}{\lambda^2-t^2\mu^2}\right)$$
  - Es Hipercírculo: Si
  - Polinomio mínimo de la extensión algebraica: $\alpha^2-\frac{\lambda^2}{\mu^2}$
  - Puntos del infinito: $[\lambda:\mu:0]$, $[\lambda:\mu:0]$ sin coeficientes en $\mathbb{Q}$
- Hipérbola $\dfrac{(x-a)^2}{\lambda^2}-\dfrac{(y-b)^2}{\mu^2}=1,\ \ a,b,\lambda/\mu\in\mathbb{Q},\ \lambda,\mu\neq 0,\lambda\neq\mu$
  - Es Hipercírculo: No
  - Polinomio mínimo de la extensión algebraica: –
  - Puntos del infinito: $[\lambda:i\mu:0]$, $[\lambda:\mu:0]$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

Veremos en el Teorema 4.2 cómo es la estructura de los puntos del infinito de un hipercírculo. De este análisis se deduce que la parábola no puede ser nunca un hipercírculo. El círculo y la elipse son hipercírculos dependiendo exclusivamente de si tienen puntos racionales o no, por el Teorema 4.3. En cambio, en el caso de la hipérbola este análisis no es suficiente. No basta con que tenga puntos racionales, también debe cumplirse que los puntos del infinito de la hipérbola no tengan un representante con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

En el caso más general, la clasificación de los hipercírculos por su grado es la clasificación más obvia y más importante. Empezamos con un resultado simple sobre las clases de equivalencia de fracciones lineales discutidas, cuya demostración incluimos por falta de una referencia precisa.

Lema 3.1. *Sea $u=\frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}t+\mathfrak{d}}$ una fracción lineal y v un elemento de su clase de equivalencia por composición a derecha de unidades con $\mathbb{K}(t)$. Sean p_u, p_v los polos de ambas fracciones lineales, entonces $\mathbb{K}(p_u)=\mathbb{K}(p_v)$.*

Demostración. Para comprobar el resultado, es más cómodo usar coordenadas homogéneas. Entonces $u = [at + bs : ct + ds]$ y existe un $w = [a_1 t + b_1 s : c_1 t + d_1 s]$ tal que $u \circ w = v$. En este caso $v = [t(aa_1 + bc_1) + s(ab_1 + bd_1),\ t(ca_1 + dc_1) + s(cb_1 + dd_1)]$. El polo de u es el punto $[-d : c]$ y el de v es $[-cb_1 - dd_1 : ca_1 + dc_1]$. Tenemos que $p_u = w(p_v)$, si ambos son finitos, generan el mismo cuerpo sobre $\mathbb{K}$. Si uno (o ambos) son infinitos, el cuerpo que generan es el propio $\mathbb{K}$. $\square$

Esto nos permite clasificar los hipercírculos dependiendo del cuerpo que genera el polo de la unidad correspondiente, según el lema anterior, si bien resulta oscuro desde un punto de vista geométrico. Para obtener una clasificación geométrica de los hipercírculos, podemos considerar la pregunta de cuándo dos hipercírculos son $\mathbb{K}$-afínmente isomorfos. Para ello, primeramente debemos clasificarlos por su grado geométrico. Nótese que en la clase de unidades asociadas a un hipercírculo, siempre hay una unidad de la forma $\frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{t+\mathfrak{d}}$. Esta representación ayuda a simplificar la exposición por lo que supondremos que tomamos un representante con esta estructura.

Teorema 3.1 ([8] Theorem 3.1)**.** *Sea U el α-hipercírculo asociado una unidad del tipo $u(t) = \frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{t+\mathfrak{d}} \in \mathbb{K}(\alpha)(t)$ y sea $r = [\mathbb{K}(-\mathfrak{d}) : \mathbb{K}]$. Entonces,*

1. *Existe una transformación afín $\chi : \mathbb{F}^d \longrightarrow \mathbb{F}^d$ definida sobre $\mathbb{K}$ tal que $\chi(\mathcal{U})$ se parametriza por*
$$\widetilde{\chi}(t) = \left(\frac{1}{M(t)}, \frac{t}{M(t)}, \ldots, \frac{t^{r-1}}{M(t)}, 0, \ldots, 0 \right),$$
donde $M(t)$ es el polinomio mínimo de $-\mathfrak{d}$ sobre $\mathbb{K}$.
2. *Existe una transformación proyectiva $\rho : \mathbb{P}(\mathbb{F})^d \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{F})^d$, definida sobre $\mathbb{K}$, tal que la curva $\rho(\mathcal{U})$ es la curva racional normal de grado r en $\mathbb{P}(\mathbb{F})^d$, parametrizada por*
$$\widetilde{\rho}(t : s) = [s^r : s^{r-1}t : \cdots : st^{r-1} : t^r : 0 : \cdots : 0].$$

Este resultado nos permiten obtener una clasificación afín de los hipercírculos:

Teorema 3.2 ([8] Theorem 3.3)**.** (Clasificación afín) *Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathrm{Hip}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$, distintos de rectas, generados por $u_1(t)$, $u_2(t) \in \mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$, y sean $M_1(t)$, $M_2(t)$ los polinomios mínimos de los polos de $u_1(t)$, $u_2(t)$ respectivamente. Entonces, $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son afínmente equivalentes sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si existe $\tau(t) \in \mathbb{U}(\mathbb{K}(t))$ que transforma una raíz (y por tanto todas) de $M_1(t)$ en una raíz (y por tanto todas) de $M_2(t)$.*

Dados dos círculos reales, que no sean rectas, siempre existe una transformación afín real que los relaciona. Como se ha visto en el teorema anterior, este no es siempre el caso para hipercírculos más generales. No obstante, para extensiones algebraicas de grado 2 ó 3, se tiene que dos hipercírculos del mismo grado son afínmente equivalentes.

Corolario 3.1 ([8] Corollary 3.4)**.** *Sea $\mathbb{K}(\alpha)$ una extensión algebraica de grado 2 ó 3. Entonces todos los α-hipercírculos, que no sean rectas, son afínmente equivalentes sobre $\mathbb{K}$.*

4. Propiedades Geométricas de los Hipercírculos

Ya hemos visto en la sección anterior, que el grado geométrico de un hipercírculo está relacionado con el grado algebraico de una cierta extensión $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(-\mathfrak{d}) \subseteq \mathbb{K}(\alpha)$. Es más, hemos visto (Teorema 3.1) que los hipercírculos son (salvo transformación proyectiva) curvas racionales normales. De aquí podemos deducir sus principales características geométricas.

Corolario 4.1 ([8] Corollary 3.2). *Sea $\mathcal{U} \in \mathrm{Hip}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ generado por $u(t) = \frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{t+\mathfrak{d}} \in \mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ y sea $r = [\mathbb{K}(-\mathfrak{d}) : \mathbb{K}]$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. *$\mathcal{U}$ define una curva en $\mathbb{F}^d$ de grado r.*
2. *$\mathcal{U}$ está contenido en una variedad lineal de dimensión r y no está contenido en ninguna variedad lineal de dimensión menor.*
3. *La clausura proyectiva de $\mathcal{U}$ es una curva regular de $\mathbb{P}(\mathbb{F})^d$.*
4. *La función de Hilbert de $\mathcal{U}$ coincide con su polinomio de Hilbert y $h_{\mathcal{U}}(m) = mr + 1$.*

En este punto, conviene trabajar con los hipercírculos más importantes: los denominados "hipercírculos primitivos".

Definición 4.1 ([8] Definition 3.5). *Se dice que $\mathcal{U} \in \mathrm{Hip}(\mathbb{K}, \mathbb{K}(\alpha))$ es un hipercírculo primitivo si el grado de $\mathcal{U}$ es $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}]$. En caso contrario, se dice que $\mathcal{U}$ es un hipercírculo no-primitivo.*

Ejemplo 4.1. *Sea $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha)$ la extensión algebraica definida por el polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$, $x^4 - 2$. Para la unidad de $\mathbb{L}(t)$, $u(t) = 1 - 2\alpha + 3\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{\alpha}{t+\alpha^2}$ el polinomio mínimo de $-\alpha^2$ sobre $\mathbb{Q}$ es $t^2 - 2$, y el hipercírculo $\mathcal{U}$ asociado está parametrizado por $\phi(t) = \left(1, -2 + \frac{t}{t^2-2}, 3, -\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2-2}\right)$. En este caso, el hipercírculo no es primitivo y está contenido en la variedad lineal definida por $\{x_0 = 1, x_2 = 3\}$.*

Esto no causa una pérdida de generalidad si estamos estudiando la geometría proyectiva de los hipercírculos, pues todo hipercírculo es primitivo, mediante un cambio de coordenadas, en el subespacio proyectivo más pequeño que lo contiene:

Teorema 4.1 ([8] Theorem 3.6). *Sea $u(t) = \frac{1}{t+\mathfrak{d}} \in \mathbb{U}(\mathbb{K}(\alpha)(t))$, siendo $r = [\mathbb{K}(\mathfrak{d}) : \mathbb{K}] < [\mathbb{L} : \mathbb{K}] = d$. Sea $\mathcal{U} \in \mathrm{Hip}(\mathbb{K}, \mathbb{K}(\alpha))$ generado por $u(t) \in \mathbb{U}(\mathbb{K}(\alpha)(t))$ y $\mathcal{V} \in \mathrm{Hip}(\mathbb{K}, \mathbb{K}(\mathfrak{d}))$ generado por $u(t)$. Entonces, existe una inclusión afín de $\mathbb{F}^r$ en $\mathbb{F}^d$, definida sobre $\mathbb{K}$, que transforma $\mathcal{V}$ en $\mathcal{U}$.*

Nótese que, en el teorema anterior, $\mathcal{V}$ es primitivo.

Ahora ya podemos centrarnos en el estudio de los hipercírculos primitivos. Tal vez el hecho más sorprendente es que los puntos del infinito permanecen fijos, no dependen del hipercírculo en cuestión. Esto tiene que ver con la elección de la base $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}\}$ de la extensión. Tal vez no sea tan sorprendente si tenemos en cuenta que esto ocurre para los círculos, pues todos ellos pasan por los puntos del infinito $[\pm i : 1 : 0]$. En general tenemos lo siguiente:

Teorema 4.2 ([8] Theorem 4.2 y Proposition 4.4). *Para una extensión determinada $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(\alpha)$ de grado d, el conjunto de los puntos del infinito $P = \{P_1, \ldots, P_d\}$*

de cualquier hipercírculo primitivo no depende del α-hipercírculo concreto $\mathcal{U}$, sino de la extensión algebraica y del elemento primitivo α. Además, el conjunto P está caracterizado por la siguiente propiedad:

$$\{x_0 + \alpha_j x_1 + \cdots + \alpha_j^{d-1} x_{d-1} = 0\} \cap \overline{\mathcal{U}} = P \setminus \{P_j\},$$

donde $\alpha_j = \sigma_j(\alpha)$ son los conjugados de α en $\mathbb{F}$, $1 \leq j \leq d$, y $\overline{\mathcal{U}}$ es la clausura proyectiva de $\mathcal{U}$. De manera más precisa, sean $M_\alpha(t)$ el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{K}$, y $m_\alpha(t) = \frac{M_\alpha(t)}{t-\alpha} = \sum_{i=0}^{d-1} l_i t^i \in \mathbb{K}(\alpha)[t]$, donde $l_{d-1} = 1$. Entonces, los puntos en el infinito de cualquier α-hipercírculo primitivo son $[l_0 : l_1 : \cdots : l_{d-2} : l_{d-1} : 0]$ y sus conjugados.

Esto nos permite conocer cómo son las rectas tangentes del hipercírculo en el infinito y por qué las parábolas no pueden ser hipercírculos, como mostraba la clasificación de las cónicas presentada anteriormente.

Proposición 4.1 ([8] Proposition 4.5). *Las tangentes de un hipercírculo primitivo en los puntos del infinito no están contenidas en el hiperplano del infinito.*

Todas estas propiedades geométricas nos permiten caracterizar los hipercírculos:

Teorema 4.3 ([8] Theorem 6.1). *Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}^d$ un conjunto algebraico de grado d tal que todas sus componentes tienen dimensión 1. Entonces, $\mathcal{U}$ es un α-hipercírculo primitivo si y sólo si tiene un número infinito de puntos con coordenadas en $\mathbb{K}$ y pasa por el conjunto de puntos del infinito caracterizado en el Teorema 4.2.*

Teorema 4.4 ([8] Theorem 6.2). *Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}^d$ un conjunto algebraico irreducible y 1-dimensional de grado d, definible sobre $\mathbb{K}$. Entonces, $\mathcal{U}$ es un α-hipercírculo primitivo si y sólo si tiene un punto regular con coordenadas en $\mathbb{K}$ y pasa por el conjunto de puntos del infinito caracterizado en el Teorema 4.2.*

5. Representaciones de los Hipercírculos

Dado un hipercírculo $\mathcal{U}$ podemos representarlo de tres maneras distintas. Para empezar, como cualquier curva racional, se puede representar mediante una parametrización o mediante un conjunto de ecuaciones implícitas. Los hipercírculos, además, se pueden representar mediante una unidad $\frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}t+\mathfrak{d}}$. En esta sección, estudiaremos la relación entre estas representaciones. Más concretamente, queremos detectar cuándo una parametrización representa un hipercírculo, cómo pasar de una representación paramétrica a la correspondiente unidad y cuál es la relación entre las representaciones paramétrica e implícita.

Vemos, en primer lugar, que pasar de una representación mediante una unidad a una representación paramétrica resulta sencillo:

Lema 5.1 ([12] Algoritmo 2.1 y Observación 2.1.2). *Sea $u = \frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}t+\mathfrak{d}}$. Sea $\mathfrak{c} = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \alpha^i$, $\mathfrak{d} = \sum_{i=0}^{d-1} d_i \alpha^i$ y sea $M(x)$ el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{K}$. Entonces sea*

$$Q(t) = \mathrm{Res}_x((\sum_{i=0}^{d-1} c_i x^i)t + (\sum_{i=0}^{d-1} d_i x^i), M(x))$$

la resultante respecto de x y consideremos $P(t) = \frac{Q(t)}{\mathrm{mcd}(Q(t),Q'(t))}$. Este polinomio tiene coeficientes en $\mathbb{K}$ y es múltiplo del denominador de $u(t)$, luego, por el algoritmo de la división, podemos calcular $m(t) = P(t)/(\mathfrak{c}t + \mathfrak{d})$. Finalmente $m(t)(\mathfrak{a}t + \mathfrak{b}) = \sum_{i=0}^{d-1} f_i(t)\alpha^i$. Se sigue que $(f_0/P, \ldots, f_{d-1}/P)$ es una parametrización de $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Sin embargo, el problema recíproco no es trivial, ya que una parametrización dada de un hipercírculo podría tener coeficientes en $\mathbb{K}(\alpha)$ y no corresponder a la obtenida desde una unidad. Así, dada una parametrización $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{d-1}(t))$ de un hipercírculo con coeficientes en $\mathbb{L}$, no es trivial obtener una parametrización del mismo sobre $\mathbb{K}$; es decir, una unidad $u(t) \in \mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ asociada al hipercírculo. Por ejemplo, sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ y $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha)$, donde α es una raíz del polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$ dado por $x^3 - 2$. La curva $\mathcal{U}$ dada por la parametrización

$$\psi_0(t) = \frac{4t^3 + 8t^2\alpha - 4\alpha^2 t^2 - 12t + 2\alpha t + 4\alpha^2 t - 4\alpha + 2\alpha^2}{N(t)},$$

$$\psi_1(t) = \frac{2\alpha^2 t^3 + 2\alpha^2 t - 2t^2\alpha - 2\alpha}{N(t)}$$

$$\psi_2(t) = \frac{2t^3\alpha + 2\alpha^2 t^2 + 2\alpha t + 2\alpha^2}{N(t)}$$

donde $N(t) = 12t^2 + 12\alpha t - 6\alpha^2 t - 4 + 2\alpha + 4\alpha^2$ es, en realidad, el hipercírculo asociado a la unidad $u(t) = \frac{\alpha^2 t + 2}{2t - \alpha^2}$. Es decir, la curva $\mathcal{U}$ admite una parametrización sobre $\mathbb{Q}$, $\phi(t) = (\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t))$ tal que $\sum_{i=0}^{2} \phi_i(t)\alpha^i = u(t)$, y por tanto $\mathcal{U}$ es un hipercírculo. Concretamente $\phi(t) = \left(\frac{2t^2+t}{2t^3-1}, \frac{t^2+1}{2t^3-1}, \frac{t^3+t}{2t^3-1}\right)$. Sin embargo, la parametrización $\psi(t)$ dada no permite recuperar inmediatamente $u(t)$, ya que (a priori) es el resultado de un cambio de parámetro desconocido $w(t)$ con coeficientes en $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha)$, aplicado a $\psi(t)$, es decir, $\psi(t) = \phi(w(t))$.

En principio, ni siquiera es trivial determinar si una parametrización racional $\phi(t) = (\phi_0(t), \ldots, \phi_{d-1}(t)) \in \mathbb{K}(t)^d$ de una cierta curva se corresponde con un hipercírculo. No obstante, el siguiente lema proporciona un sencillo criterio para reconocer cuándo es así.

Lema 5.2 ([12] Lema 2.1.2)**.** *Sean α un elemento algebraico sobre $\mathbb{K}$ de grado d y $\mathcal{U} \subset \mathbb{F}^d$ la curva definida por la parametrización propia $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_{d-1}(t))$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces, $\mathcal{U}$ es un hipercírculo para la extensión $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(\alpha)$ si y sólo si $u(t) := \sum_{i=0}^{d-1} \psi_i(t)\alpha^i \in \mathbb{U}(\mathbb{K}(\alpha)(t))$. Además, en caso afirmativo, $u(t)$ es una unidad asociada a $\mathcal{U}$.*

Ahora vamos a analizar, más generalmente, el caso de parametrizaciones con coeficientes algebraicos de un hipercírculo y daremos un algoritmo para determinar cuándo una parametrización birracional de una curva define un hipercírculo.

Para el estudio de las parametrizaciones sobre $\mathbb{L}$ es importante tenerlas preparadas en una forma especial, y en cierto modo canónica. La llamamos forma estándar.

Definición 5.1 ([6] Definition 3.1)**.** *Sea $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \dots, \varphi_{d-1}(t)) \in \mathbb{L}(t)^d$ una parametrización de un hipercírculo $\mathcal{U}$. Diremos que $\varphi(t)$ está dada en forma estándar si $\sum_{i=0}^{d-1} \varphi_i(t)\alpha^i = t$.*

Toda parametrización propia $\varphi(t)$ de un hipercírculo $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{L}$ se va a suponer, sin que suponga pérdida de generalidad, que está dada en forma estándar, ya que si $\varphi(t)$ no lo está y $w(t) = \sum_{i=0}^{d-1} \varphi_i(t)\alpha^i$, entonces $\varphi^\star(t) = \varphi(w^{-1}(t))$ es una parametrización de $\mathcal{U}$ en forma estándar. Además, si $\varphi(t)$ es una parametrización en forma estándar de $\mathcal{U}$ y $u(t)$ es cualquier unidad asociada a $\mathcal{U}$, entonces $u(t)$ reparametriza $\varphi(t)$ sobre $\mathbb{K}$, es decir $\varphi(u(t)) \in \mathbb{K}(t)^d$.

En los siguientes lemas se analiza cómo se relacionan las componentes de las parametrizaciones de un hipercírculo con los coeficientes de la unidad $u(t)$. En el primero se derivan una serie de consecuencias a partir de la $\mathbb{K}$-parametrización generada por la unidad $u(t)$. Debido a que el caso de las rectas es fácilmente tratable y conllevaría una complicación en la exposición, supondremos que la curva generada no es una recta.

Lema 5.3 ([6] Lemma 3.2)**.** *Sea $u(t) = \mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{e}}{t+\mathfrak{d}} \in \mathbb{U}(\mathbb{K}(\alpha)(t))$, donde $\mathfrak{e} \neq 0$ y $\mathfrak{d} \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$. $\mathfrak{a} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i\alpha^i$ y $\mathfrak{e} = \sum_{i=0}^{d-1} e_i\alpha^i$ donde $a_i, e_j \in \mathbb{K}$. Sea $M(t)$ el polinomio mínimo de $-\mathfrak{d}$ sobre $\mathbb{K}$, con* grado$(M(t)) = r$*. Sean $m(t) = \frac{M(t)}{t+\mathfrak{d}}$ y $\mathfrak{e} \cdot m(t) = m_0(t) + \cdots + m_{d-1}\alpha^{d-1}$ donde $m_i(t) \in \mathbb{K}[t]$ factoriza como*

$$m_i(t) = \lambda_i(t - \gamma_{i,1}) \cdots (t - \gamma_{i,k}).$$

Sea $\psi(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_{d-1}(t))$ la parametrización sobre $\mathbb{K}$ generada por $u(t)$, y sea $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \dots, \varphi_{d-1}(t))$ una parametrización en forma estándar del hipercírculo dado por $u(t)$. Se cumple que:

1. *$\varphi(t) = \psi(u^{-1}(t))$.*
2. grado$(m_i(t)) < r$ *y $\psi_i(t) = a_i + \frac{m_i(t)}{M(t)}$.*
3. *$\psi_i(t) \in \mathbb{K}$ si y sólo si $\varphi_i(t) \in \mathbb{L}$ si y sólo si $m_i(t) = 0$; en este caso, $\psi_i = \varphi_i = a_i$ y $e_i = 0$.*
4. *$\psi(t)$ tiene, al menos, dos componentes no constantes.*
5. *Si $e_i = 0$ y $\psi_i(t)$ no es constante, entonces m_i no es cero y* grado$(m_i) < r - 1$. *Además,*
$$\varphi_i(t) = a_i + \frac{\lambda_i(t-\mathfrak{a})^{r-k}\prod_{j=1}^{k}((-\mathfrak{d} - \gamma_{i,j})(t-\mathfrak{a}) + \mathfrak{e})}{\mathfrak{e}\prod_{i=2}^{r}((-\mathfrak{d} + \mathfrak{d}_i)(t-\mathfrak{a}) + \mathfrak{e})}$$
6. *Si $e_i \neq 0$ entonces $\psi_i(t)$ no es constante,* grado$(m_i) = r - 1$, *y $\lambda_i = e_i$. Es más,*
$$\varphi_i(t) = a_i + \frac{e_i(t-\mathfrak{a})\prod_{j=1}^{r-1}((-\mathfrak{d} - \gamma_{i,j})(t-\mathfrak{a}) + \mathfrak{e})}{\mathfrak{e}\prod_{i=2}^{r}((-\mathfrak{d} + \mathfrak{d}_i)(t-\mathfrak{a}) + \mathfrak{e})}.$$
7. *Si $\psi_i(t) = a_i + \frac{m_i(t)}{M(t)} = \frac{p_i(t)}{M(t)}$ no es constante, sea $\varphi_i(t) = \frac{q_i(t)}{N(t)} = a_i + \frac{n_i(t)}{N(t)}$, satisfaciendo* mcd$(q_0, \dots, q_{d-1}, N) = 1$, grado$(n_i(t)) <$ grado$(N(t))$.

Entonces,

$$\mathrm{mcd}(m_i, M) = \mathrm{mcd}(p_i, M) = 1,\ \mathrm{mcd}(n_i, N) = \mathrm{mcd}(q_i, N) = 1$$

y $\mathrm{grado}(n_i(t)) = \mathrm{grado}(q_i(t)) = \mathrm{grado}(N(t)) + 1 = r$.

Nótese que la primera afirmación del lema muestra que la parametrización en forma estándar $\varphi(t) \in \mathbb{L}(t)^d$ de un α-hipercírculo $\mathcal{U}$ es única.

El siguiente lema analiza el valor de la $\mathbb{L}$-parametrización y de su gradiente en el coeficiente $\mathfrak{a}$ de la unidad.

Lema 5.4 ([12] Lema 2.4.5). *Sea* $u(t) = \mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{e}}{t+\mathfrak{d}}, a_i, e_i, m(t), m_i(t)$ *y* $M(t)$ *como en Lema 5.3. Sea* $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{d-1}(t)) \in \mathbb{L}(t)^{d-1}$ *la* $\mathbb{L}$*-parametrización en forma estándar del* α*-hipercírculo* $\mathcal{U}$ *generado por* $u(t)$*. Entonces se verifican las siguientes propiedades*

(1) $\varphi(\mathfrak{a}) = (a_0, \ldots, a_{d-1})$. *Además, si* $a_i = 0$ *y* $\varphi_i(t)$ *no es constante, entonces* $\mathfrak{a}$ *es una raíz del numerador de* $\varphi_i(t)$.
(2) $\varphi'(\mathfrak{a}) = \frac{1}{\mathfrak{e}}(e_0, \ldots, e_{d-1})$. *Además, si* $e_i = 0$ *y* $\varphi_i(t)$ *no es constante, entonces* $\mathfrak{a}$ *es una raíz del numerador de* $\varphi_i'(t)$*; donde* $\varphi'(t)$ *es el gradiente de* $\varphi(t)$.

Ahora, dado un hipercírculo $\mathcal{U}$ mediante una parametrización $\varphi(t)$ en forma estándar sobre $\mathbb{K}(\alpha)$, consideremos el problema del cálculo de una unidad $u(t)$ asociada a $\mathbb{U}$ (véase [9]). O dicho de otro modo, se trata de calcular una unidad $u(t)$ que reparametrice $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{K}$ (pues $\varphi(u(t)) \in \mathbb{K}(t)^d$). Para ello se distingue entre dos tipos de hipercírculos: aquellos que están asociados a unidades del tipo $\frac{\mathfrak{b}}{t+\mathfrak{d}} \in \mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ y los que no. Los primeros se denominan hipercírculos reducidos y los segundos no-reducidos. En esta situación, se demuestra que en el caso reducido el cálculo de la unidad se obtiene directamente de las componentes de la parametrización. Y cuando el hipercírculo no es reducido, se demuestra que mediante la utilización de un punto del hipercírculo, con coordenadas en $\mathbb{K}$, el cálculo se reduce de nuevo al caso reducido.

Definición 5.2 ([6] Definition 3.5). *Se dice que la unidad* $u(t) = \frac{\mathfrak{a}t+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}t+\mathfrak{d}} \in \mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ *es reducida, si* $\mathfrak{a} = 0$*. En caso contrario se dice que* $u(t)$ *es no-reducida. Asimismo, se dice que un hipercírculo* $\mathcal{U}$ *es reducido si está generado por al menos una unidad reducida. En caso contrario se dirá que el hipercírculo es no-reducido. Se representa, respectivamente, por* $\mathrm{Hip}^{\mathsf{Red}}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ *y por* $\mathrm{Hip}^{\mathsf{NRed}}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ *el conjunto de todos los* α*-hipercírculos reducidos y no-reducidos de* $\mathrm{Hip}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$.

Como consecuencia de los lemas presentados en la sección anterior, se deduce el siguiente teorema que proporciona un criterio algorítmico para decidir si un hipercírculo dado paramétricamente es reducido.

Teorema 5.1 ([6] Theorem 3.6). *Sean* $\mathcal{U} \in \mathrm{Hip}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$, $\mathcal{U}$ *distinto de una recta, y* $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{d-1}(t)) \in \mathbb{L}(t)^d$ *la* $\mathbb{L}$*-parametrización en forma estándar de* $\mathcal{U}$*. Entonces, se verifica que*

(1) $\mathcal{U} \in \mathrm{Hip}^{\mathsf{Red}}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ *si y sólo si el origen pertenece a* $\mathcal{U}$.
(2) $\mathcal{U} \in \mathrm{Hip}^{\mathsf{Red}}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ *si y sólo si* $\varphi_i(0)$ *está definido y* $\varphi_i(0) = 0$, $i = 0, .., d-1$.

Aunque en las hipótesis del teorema no se consideran las rectas, también verifican la propiedad anterior: si $\mathcal{U} \in$Hip$(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ es una recta, entonces $\mathcal{U} \in$Hip$^{\mathsf{Red}}(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ si y sólo si $\mathcal{U}$ pasa por el origen.

Una vez que sabemos decidir si un hipercírculo es reducido o no, mostraremos cómo determinar una unidad asociada al mismo, para hipercírculos dados a través de una parametrización propia sobre $\mathbb{L}$. Para ello, en primer lugar, se analiza el caso reducido. Seguidamente, se aborda el problema general y por último se presenta el algoritmo para el cálculo de una unidad asociada y se ilustra con ejemplos.

Lema 5.5 ([6] Lemma 3,7)**.** *Sea $\mathcal{U}$ el hipercírculo, distinto de una recta, asociado a la unidad $u(t) = \frac{\mathfrak{e}}{t+\mathfrak{d}}$. Sean $[\mathbb{K}(-\mathfrak{d}) : \mathbb{K}] = r$, $\mathfrak{e} = \sum_{i=0}^{d-1} e_i\alpha^i$ y $\mathfrak{d} = \sum_{i=0}^{d-1} d_i\alpha^i$, donde $e_i, d_i \in \mathbb{K}$. Sea $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{d-1}(t)) = \left(\frac{q_0(t)}{N(t)}, \ldots, \frac{q_{d-1}(t)}{N(t)}\right)$ la $\mathbb{L}$-parametrización en forma estándar de $\mathcal{U}$, tal que* $\mathrm{mcd}(q_0(t), \ldots, q_{d-1}(t), N(t)) =$ *1. Sea $\varphi^\star(t) = (\varphi^\star_0(t), \ldots, \varphi^\star_{d-1}(t)) = (\frac{\varphi_0(t)}{t}, \ldots, \frac{\varphi_{d-1}(t)}{t})$. Entonces se cumple que*

(1.) *$\varphi^*(0) \neq \vec{0}$ está definido y $\left(\frac{e_0}{\mathfrak{e}}, \ldots, \frac{e_{d-1}}{\mathfrak{e}}\right) = \varphi^\star(0)$.*

(2.) *Si $\varphi^\star_i(0) \neq 0$, entonces $(d_1, \ldots, d_{d-1}) = -e_i\left(\frac{\xi_1}{r}, \ldots, \frac{\xi_{d-1}}{r}\right)$, siendo $(\xi_0, \ldots, \xi_{d-1})$ las coordenadas de $\frac{N'(0)}{N(0)} \cdot \varphi^\star_i(0)^{-1}$ respecto a α.*

Teorema 5.2 ([6] Theorem 3.8)**.** (Unidad Asociada a un Hipercírculo Reducido) *En las hipótesis del Lema 5.5, sean $\mathfrak{e}^\star = \varphi^\star_i(0)^{-1}$ y $\mathfrak{d}^\star = -\frac{\xi_1}{r}\alpha - \cdots - \frac{\xi_{d-1}}{r}\alpha^{d-1}$, donde $(\xi_0, \ldots, \xi_{d-1})$ son las coordenadas de $\frac{N'(0)}{N(0)} \cdot \varphi^\star_i(0)^{-1}$ respecto a α. Entonces, $u^\star(t) = \frac{\mathfrak{e}^\star}{t+\mathfrak{d}^\star}$ es una unidad asociada a $\mathcal{U}$. Además $\varphi(u^\star(t)) \in \mathbb{K}(t)^d$.*

Para el caso general, donde el hipercírculo no es necesariamente reducido, se prueba que, conociendo un punto del hipercírculo con coordenadas sobre $\mathbb{K}$, se puede transformar este hipercírculo en uno reducido.

Teorema 5.3 ([6] Theorem 3.11)**.** (Unidad Asociada a un Hipercírculo No Necesariamente Reducido) *Sean $\mathcal{U}$ un hipercírculo distinto de una recta, $\varphi(t)$ la $\mathbb{L}$-parametrización de $\mathcal{U}$ en forma estándar, $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{d-1}) \in \mathcal{U} \cap \mathbb{K}^d$ un punto de coordenadas en $\mathbb{K}$ y $t^\star \in \mathbb{L}$ tal que $\varphi(t^\star) = \bar{x}$. Entonces se cumple que*

(1.) *$t^* = x_0 + \cdots + x_{d-1}\alpha^{d-1}$ y $\varphi^\star(t) := \varphi(t+t^\star) - \varphi(t^\star)$ define un hipercírculo reducido.*

(2.) *Sea $u^\star(t) \in \mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ tal que $\varphi^\star(u^\star(t)) \in \mathbb{K}(t)^d$. Entonces, $u(t) := u^\star(t) + t^\star \in \mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ y $\varphi(u(t)) \in \mathbb{K}(t)^d$.*

Resumiendo los resultados anteriores, se puede obtener un algoritmo para detectar si una parametrización se corresponde con un hipercírculo y, en caso afirmativo, calcular la unidad asociada al mismo.

Algoritmo 5.1 (Cálculo de una Unidad Asociada a un Hipercírculo)**.**
INPUT: *una parametrización propia $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_{d-1}(t)) \in \mathbb{L}(t)^d$ de una curva afín $U \subset \mathbb{F}^d$ distinta de una recta.*
OUTPUT: *"U no es un α-hipercírculo" o una unidad $u(t) \in \mathbb{L}(t)$ tal que si $\mathcal{U}$ es un hipercírculo, entonces $u(t)$ es una unidad asociada.*

1. *Calcular* $w(t) := \sum_{i=0}^{d-1} \psi_i(t)\alpha^i$.
2. Si $w(t) \notin \mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ devolver *"U no es un hipercírculo"*.
3. *Calcular* $\psi^\star(t) := \psi(w^{-1}(t))$.
4. *Calcular un punto* $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{d-1}) \in \psi^\star(\mathbb{L}) \cap \mathbb{K}^d$.
5. Si *no existe dicho punto* $\bar{x}$ devolver *"U no es un* α*-hipercírculo"*.
6. *Determinar* $t^* = x_0 + \cdots + x_{d-1}\alpha^{d-1}$.
7. *Sea* $\varphi(t) = \psi^\star(t + t^\star) - \psi^\star(t^\star)$ *la parametrización de la curva* $U^\star = \mathcal{U} - \psi^\star(t^\star)$.
8. *Escribir* $\varphi(t) = (\frac{q_0}{N(t)}, \ldots, \frac{q_{d-1}}{N(t)})$ *con* $\mathrm{mcd}(q_0, \ldots, q_{d-1}, N(t)) = 1$. *Tomar* $r = \mathrm{grado}(N(t)) + 1$.
9. Si r *no divide a* d *ó* $N(0) = 0$ devolver *"U no es un hipercírculo"*.
10. Si $\varphi_i(t)$ *no es constante y* $\mathrm{grado}(q_i) \neq r$ devolver *"$\mathcal{U}$ no es un hipercírculo"*.
11. *Calcular* $\varphi^\star(t) := \frac{\varphi(t)}{t}$, $\varphi_i^\star(t) := \frac{\varphi_i(t)}{t}$, $0 \leq i \leq d-1$
12. Si $\varphi^\star(0)$ *no está definida o* $\varphi^\star(0) = \overline{0}$ devolver *"$\mathcal{U}$ no es un hipercírculo"*.
13. *Tomar* $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ *tal que* $\varphi_i^\star(0) \neq 0$ *y calcular:* $\mathfrak{e}^\star = \varphi_i^\star(0)^{-1}$, $\Upsilon := \mathfrak{e}^\star \frac{N'(0)}{N(0)}$, *las coordenadas* $(\xi_0, \ldots, \xi_{d-1})$ *de* Υ *respecto de la base* $\{1, \ldots, \alpha^{d-1}\}$ *y* $\mathfrak{d}^\star := \frac{-1}{r} \sum_{i=1}^{d-1} \xi_i \alpha^i$.
14. *Sea* $u^\star(t) := \frac{e^\star}{t + d^\star}$.
15. *Sea* $u(t) = w^{-1}(u^\star(t) + t^\star)$.
16. Si $\psi(u(t)) \notin \mathbb{K}(t)^d$ devolver *"U no es un hipercírculo"*. en otro caso devolver *"U es un* α*-hipercírculo con unidad asociada* $u(t)$*"*.

Ejemplo 5.1. *Sean* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$, *donde* α *es el número algebraico de polinomio mínimo* $x^3 - 2$. *Sea* $\psi(t) = \left(\frac{p_1(t)}{M(t)}, \frac{p_2(t)}{M(t)}, \frac{p_3(t)}{M(t)}\right) \in \mathbb{L}(t)^3$ *donde*

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= 4\,t^2 + 4\,\alpha^2 t^2 + 8\,\alpha\,t + 4\,\alpha^2 t + 4 + 2\,\alpha \\
p_2(t) &= 4\,t^3 + 6\,\alpha^2 t^2 + 6\,\alpha\,t + 2 \\
p_3(t) &= 2\,t + 4\,\alpha\,t + 4\,\alpha^2 t + 4 + 4\,\alpha + \alpha^2 \\
M(t) &= 4\,t^3 + 6\,\alpha^2 t^2 - 12\,\alpha + 6\,\alpha\,t - 6\,\alpha^2 - 8
\end{aligned}$$

una parametrización en $\mathbb{L}(t)^3$. *En los Pasos* $1-3$, $w(t) = \frac{\alpha t + 1}{t - \alpha}$ *y la estandarización de* $\psi(t)$ *es* $\psi^\star(t) = \psi(w^{-1}(t)) = \left(\frac{q_1(t)}{N(t)}, \frac{q_2(t)}{N(t)}, \frac{q_3(t)}{N(t)}\right) \in \mathbb{L}(t)^3$ *donde* $q_1(t) = 2\,t^3 - 2\,\alpha\,t^2$, $q_2(t) = \alpha^2 t^3$, $q_3(t) = \alpha\,t^3 - 2\,\alpha^2 t^2 + 2\,t$ *y* $N(t) = 6\,t^2 - 6\,\alpha\,t + 2\,\alpha^2$. *En los Pasos* $4 - 7$, *se toma* $\bar{x} = (0, 0, 0)$ *siendo* $\varphi(t) = \psi^\star(t)$. *En los Pasos* $8 - 15$ *se obtiene* $u^\star(t) = \frac{\alpha^2}{t + \alpha}$ *y* $u(t) = w^{-1}(u^\star(t)) = \frac{t + \alpha + 2}{-\alpha t}$. *Finalmente* $\psi(u(t)) = \varphi(u^\star(t)) = \left(\frac{-2\,t}{t^3 + 2}, \frac{2}{t^3 + 2}, \frac{t^2}{t^3 + 2}\right) \in \mathbb{Q}(t)^3$ *lo que prueba que la curva inicial es un hipercírculo asociado a la unidad* $u(t)$.

Ejemplo 5.2. *Sean* $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ *y* α *como en el Ejemplo 5.1. Ahora se considera la* $\mathbb{L}$*-parametrización* $\psi(t) = \left(\frac{p_1(t)}{M(t)}, \frac{p_2(t)}{M(t)}, \frac{p_3(t)}{M(t)}\right)$ *donde*

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= 4\,t^3 + 8\,t^2\,\alpha - 4\,\alpha^2\,t^2 - 12\,t + 2\,\alpha\,t + 4\,\alpha^2\,t - 4\,\alpha + 2\,\alpha^2 \\
p_2(t) &= 2\,\alpha^2\,t^3 + 2\,\alpha^2\,t - 2\,t^2\,\alpha - 2\,\alpha \\
p_3(t) &= 2\,t^3\,\alpha + 2\,\alpha^2\,t^2 + 2\,\alpha\,t + 2\,\alpha^2 \\
M(t) &= 12\,t^2 + 12\,\alpha\,t - 6\,\alpha^2\,t - 4 + 2\,\alpha + 4\,\alpha^2
\end{aligned}$$

Aplicando los Pasos $1-3$*, se concluye que* $\psi(t)$ *está en forma estándar de modo que* $\psi^\star(t)=\psi(t)$*. Para determinar un punto racional y el valor del parámetro que determina este punto, se aplica el Lema 5.4 (1): se calculan las raíces de* $p_1(t)$*, y para la raíz* $\frac{\alpha^2}{2}$*, se comprueba que* $\psi(\frac{\alpha^2}{2})=(0,0,\frac{1}{2})\in\mathbb{Q}^3$*. Por tanto, en los pasos* $4-6$ *se toma* $\bar{x}=(0,0,\frac{1}{2})$ *y* $t^\star=\frac{1}{2}\alpha^2$*, que satisface* $\psi(t^\star)=\bar{x}$*. A continuación en el paso* 7 *se determina la parametrización* $\varphi(t)=\psi(t+t^\star)-\bar{x}$*, obteniendo* $\varphi(t)=\left(\frac{q_1(t)}{N(t)},\frac{q_2(t)}{N(t)},\frac{q_3(t)}{N(t)}\right)$ *donde*

$$\begin{aligned}
q_1(t)&=4\,t^3+8\,t^2\alpha+2\,\alpha^2t^2+4\,t+4\,\alpha^2t\\
q_2(t)&=2\,\alpha^2t^3+4\,t^2\alpha+2\,t+2\,\alpha^2t\\
q_3(t)&=2\,t^3\alpha+2\,\alpha^2t^2\\
N(t)&=12\,t^2+12\,\alpha\,t+6\,\alpha^2t+8+2\,\alpha+4\,\alpha^2
\end{aligned}$$

Ahora aplicando los Pasos $8{-}15$ *se obtiene que* $u(t)=\frac{\alpha^2t+2}{2t-\alpha^2}$*. Finalmente* $\psi(u(t))=\left(\frac{2\,t^2+t}{2t^3-1},\frac{t^2+1}{2t^3-1},\frac{t^3+t}{2t^3-1}\right)\in\mathbb{Q}(t)^3$ *lo que prueba que la curva inicial es un hipercírculo asociado a la unidad* $u(t)$*.*

Una vez que ya tenemos algoritmos para poder detectar si una parametrización define un hipercírculo y cómo tener una unidad asociada, ahora pasamos a trabajar con las ecuaciones implícitas. En general, son conocidos algoritmos para implicitar o parametrizar una curva racional. Sin embargo, la estructura de los hipercírculos permite diseñar algoritmos específicos que funcionan mejor que los algoritmos genéricos. Véase por ejemplo, la comparación de los métodos dada en [7].

Proposición 5.1 ([8] Proposition 5.1)**.** *El haz de hiperplanos* $x_0+x_1\alpha+\cdots+x_{d-1}\alpha^{d-1}=t$ *parametriza el* α*–hipercírculo primitivo* $\mathcal{U}$*.*

La parametrización $\Psi(t)$ que se obtiene por este método, tiene sus coeficientes en $\mathbb{K}(\alpha)$. De modo que no se trata de la parametrización inducida por una unidad asociada $u(t)$. Sin embargo, esta parametrización, que hemos llamado *estándar*, se usa en los algoritmos y ejemplos de la última sección.

Para el problema de la implicitación tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.2 ([8] Proposition 5.2)**.** *Sea* $\mathcal{U}$ *el hipercírculo asociado a la unidad* $u(t)$*, y* $v(t)$ *la inversa* $u(t)$*. Sea* $v\left(\sum_{i=0}^{d-1}\alpha^ix_i\right)=\sum_{i=0}^{d-1}\frac{r_i(x_0,\ldots,x_{d-1})}{s(x_0,\ldots,x_{d-1})}\alpha^i$*, donde* $r_i,s\in\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_{d-1}]$*. Entonces, el ideal de* $\mathcal{U}$ *es el ideal de la eliminación con respecto a* Z*:* $\mathcal{I}(\mathcal{U})=(r_1(\bar{x}),\ldots,r_d(\bar{x}),s(\bar{x})Z-1)\cap\mathbb{F}[x_0,\ldots,x_{d-1}]$*.*

El siguiente teorema muestra un método alternativo para implicitar hipercírculos, sin usar técnicas de eliminación, y está basado en propiedades de la curva racional normal de grado d.

Teorema 5.4 ([8] Theorem 5.4)**.** *Sea* $\varphi(t)=(\frac{q_0(t)}{N(t)},\ldots,\frac{q_{n-1}(t)}{N(t)})$ *una parametrización propia de un hipercírculo primitivo* $\mathcal{U}$ *con coeficientes en* $\mathbb{F}$*. Sea* I *el ideal homogéneo de la curva racional normal de grado* n *en* $\mathbb{P}(\mathbb{F})^n$ *dado por un conjunto de* *generadores homogéneos* $h_1(\bar{y}),\dots,h_r(\bar{y})$, $\bar{y}=(y_0,\dots,y_d)$. *Sea* $\mathcal{Q}\in\mathcal{M}_{d+1\times d+1}(\mathbb{F})$ *la matriz del cambio de base de* $\{q_0(t),\dots,q_{d-1}(t),N(t)\}$ *to* $\{1,t,\dots,t^d\}$. *Sea*

$$f_i(\bar{x})=h_i\left(\sum_{j=0}^{d}\mathcal{Q}_{0j}x_j,\dots,\sum_{j=0}^{d}\mathcal{Q}_{nj}x_j\right),\ 1\le i\le r.$$

Entonces $\{f_1,\dots,f_r\}$ *es un conjunto de generadores del ideal homogéneo de* $\mathcal{U}$.

Como consecuencia de este método de implicitación, podemos concluir lo siguiente.

Proposición 5.3. *Sea* U *un hipercírculo e* I *el ideal de* U, I *posee un sistema de generadores formado por ecuaciones cuadráticas.*

En particular, se sigue que todo hipercírculo es intersección de cuádricas.

6. Aplicación al Problema de la $\mathbb{K}$–Optimalidad Algebraica

En esta sección se muestra cómo se resuelve el problema de la $\mathbb{K}$-optimalidad algebraica de curvas racionales, a través de los hipercírculos. Es decir, si $\mathcal{P}(t)\in\mathbb{K}(\alpha)(t)^n$ es una parametrización racional propia de una curva racional $\mathcal{C}$ se plantea el problema de determinar, si existe, un cambio lineal de parámetro que transforme la parametrización dada en otra parametrización, esta vez sobre $\mathbb{K}$.

El problema de la $\mathbb{K}$-optimalidad algebraica conlleva a su vez el estudio de varios subproblemas: decidir si $\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-definible, decidir si $\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-parametrizable y finalmente determinar $u(t)\in\mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ tal que $\mathcal{P}(u(t))\in\mathbb{K}(t)^n$. En [1] se desarrolla un método que asocia a la curva $\mathcal{C}$ otra variedad $\mathcal{W}$, llamada *variedad de descenso de Weil*, a través de la cual se puede obtener información sobre la $\mathbb{K}$-definibilidad y $\mathbb{K}$-parametrización de $\mathcal{C}$. Este desarrollo es similar al efectuado en [13] y es el siguiente:

Definición 6.1 (cf. [3] Definition 8)**.** *Sea* $\mathcal{P}(t)=(\eta_1(t),\dots,\eta_n(t))\in\mathbb{L}(t)^n$, *una parametrización propia de una curva afín* $\mathcal{C}$ *sobre* $\mathbb{F}$. *Sustituyendo en* $\mathcal{P}(t)$ t *por* $\tilde{t}=t_0+t_1\alpha+\cdots+t_{d-1}\alpha^{d-1}$, *donde* $\{t_0,\dots,t_{d-1}\}$ *son nuevas variables, y* $\bar{t}=t_0,\dots,t_{d-1}$, *sea*

$$\eta_i(\tilde{t})=\frac{f_{i0}(\bar{t})}{\delta(\bar{t})}+\frac{f_{i1}(\bar{t})}{\delta(\bar{t})}\alpha+\cdots+\frac{f_{id-1}(\bar{t})}{\delta(\bar{t})}\alpha^{d-1}$$

donde $f_{ij}(\bar{t}),\ \delta(\bar{t})\in\mathbb{K}[t_0,\dots,t_{d-1}]$ *y* $\operatorname{mcd}(f_{1,0}(\bar{t}),\dots,f_{n,d-1}(\bar{t}),\delta(\bar{t}))=1$. *Sea* $Y=\{\bar{t}\in\mathbb{F}^d\,|\,f_{ij}(\bar{t})=0,i=1,\dots,n,j=1,\dots,d-1\}$ *y* $\Delta=\{\bar{t}\in\mathbb{F}^d\,|\,\delta(\bar{t})=0\}$. *La variedad paramétrica de Weil asociada a la parametrización* $\mathcal{P}(t)$ *de* $\mathcal{C}$, *representada por* $\mathcal{W}_D(\mathcal{P}(t))$, *es la clausura de Zariski de* $Y\setminus\Delta$*; i.e.* $\mathcal{W}_D(\mathcal{P}(t))=\overline{Y\setminus\Delta}$.

Pues bien, $\mathcal{W}_D(\mathcal{P}(t))$ es una variedad que a lo sumo contiene una única componente de dimensión 1; en cuyo caso $\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-definibe. Es decir, $\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-definible si y sólo si $\dim(\mathcal{W}_D(\mathcal{P}(t)))=1$. Sólo en el caso de que la curva sea $\mathbb{K}$-definible tiene sentido preguntarse si es $\mathbb{K}$-parametrizable. Siendo así, si $\mathcal{U}$ es la componente 1-dimensional de $\mathcal{W}_D(\mathcal{P}(t))$, entonces $\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-parametrizable si y sólo si $\mathcal{U}$

es un α-hipercírculo. En cuyo caso, si $u(t)$ es una unidad asociada a $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{P}(u(t))$ es una parametrización de $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{K}$.

Finalmente, y como consecuencia de los resultados desarrollados en las secciones anteriores, se presenta el algoritmo de $\mathbb{K}$-optimalidad algebraica para curvas racionales. El esquema de actuación es el siguiente. Sea $\mathcal{P}(t) \in \mathbb{L}(t)^n$ una parametrización propia y $\mathcal{C}$ la curva que define. Primero se analiza la $\mathbb{K}$-definibilidad de $\mathcal{C}$. Evidentemente, si $\mathcal{C}$ no es $\mathbb{K}$-definible, entonces $\mathcal{C}$ no es $\mathbb{K}$-parametrizable y el proceso termina. Sea, pues, $\mathcal{C}$ una curva $\mathbb{K}$-definible. A continuación se calcula la parametrización $\tilde{\mathcal{M}}(t)$ sobre $\mathbb{L}$, en forma estándar, de la componente unidimensional $\mathcal{U}$. Esta parametrización se puede obtener parametrizando $\mathcal{U}$ a través de un haz de hiperplanos (véase Proposición 5.1), o basándose en la $\mathbb{K}$-normalización de la inversa de $\mathcal{P}(t)$ (véase [12]). En esta situación todo se reduce a determinar si $\tilde{\mathcal{M}}(t)$ es un α-hipercírculo y obtener una unidad asociada; tarea que puede ser ejecutada con el Algoritmo 5.1. Es interesante observar que, por construcción, la parametrización $\tilde{\mathcal{M}}(t)$ está en forma estándar.

La principal objeción a estos métodos es que necesitan, en general, hallar un punto con coordenadas racionales en la curva candidata a ser un hipercírculo. Se puede pensar que buscar tal punto equivale en la práctica a resolver el problema de encontrar una parametrización con coeficientes en $\mathbb{K}$. Sin embrago, pensamos que esto no es cierto, ya que los métodos presentados, reducen buscar puntos en curvas hipercírculos, cuyo grado geométrico está relacionado con el grado de la extensión algebraica en la que se está trabajando. Se podría argumentar que una aproximación similar a Hilbert-Hurwitz ([5]) reduce, a través de una colección de transformaciones birracionales costosas desde un punto de vista computacional, el problema de encontrar un punto racional a buscar dicho punto en una cónica plana. Sin embargo, nuestro método es, conceptualmente, mucho más sencillo y proporciona, en nuestra opinión un compromiso adecuado entre el número de manipulaciones realizadas sobre la curva original y el problema de decidir (*¿es esta curva un hipercírculo?*) para una curva relacionada con la extensión algebraica que contiene a los coeficientes de la parametrización. Véase también [8].

Algoritmo 6.1 ($\mathbb{K}$-Optimalidad Algebraica para Curvas Racionales)**.**

INPUT: *una parametrización racional propia $\mathcal{P}(t) \in \mathbb{K}(\alpha)(t)^n$, donde $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}] = d$, de una curva afín $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}^n$ distinta de una recta.*

OUTPUT: *decide si $\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-parametrizable y en caso afirmativo determina una parametrización $\mathcal{Q}(t) \in \mathbb{K}(t)^n$ de $\mathcal{C}$.*

1. [$\mathbb{K}$-definibilidad] *Decidir si $\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-definible. Si $\mathcal{C}$ no es $\mathbb{K}$-definible devolver "$\mathcal{C}$ no es $\mathbb{K}$-definible". En caso contrario calcular la parametrización $\tilde{\mathcal{M}}(t)$, en forma estándar, de la componente unidimensional $\mathcal{U}$ de $\mathcal{W}_D(\mathcal{P}(t))$.*
2. [Decisión sobre el α-hipercírculo] *Aplicar el Algoritmo 5.1 para decidir si la curva $\mathcal{U}$ definida por $\tilde{\mathcal{M}}(t)$ es un α-hipercírculo. Si $\mathcal{U}$ no es un α-hipercírculo devolver "$\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-definible pero no es $\mathbb{K}$-parametrizable". En caso contrario sea $u(t) \in \mathbb{U}(\mathbb{L}(t))$ el output del Algoritmo 5.1; devolver $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{P}(u(t)) \in \mathbb{K}(t)^n$.*

Se finaliza esta sección ilustrando el último algoritmo con un par de ejemplos. En el primero, se construye la variedad paramétrica de Weil y se parametriza a través de haces de hiperplanos. En el segundo se efectúa el análisis de la $\mathbb{K}$-definibilidad a través de la inversa de la parametrización.

Ejemplo 6.1 ([8] Section 7). *Sea*

$$\mathcal{C} \simeq (\eta_1(t), \eta_2(t)) = \left(\frac{(-2t^4 - 2t^3)\alpha - 2t^4}{6\alpha^2 t^2 + (4t^3 - 2)\alpha + t^4 - 8t}, \frac{-2t^4\alpha}{6\alpha^2 t^2 + (4t^3 - 2)\alpha + t^4 - 8t} \right)$$

donde α es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ de polinomio mínimo $x^3 + 2$. Para el análisis de la $\mathbb{K}$-definibilidad se determina la variedad paramétrica de Weil $\mathcal{W}$. Para este ejemplo las ecuaciones de $\mathcal{W}$ son:
$\mathcal{W} = V(2t_0^3t_2 - 4t_2^4 + 3t_0^2t_1^2 + 2t_1^3t_2 + 2t_0t_2^2 + 2t_1^2t_2 - t_0^2t_1 + 6t_0t_1t_2^2, -6t_0^2t_1t_2 + t_0^4 + 2t_0t_1^2 - 8t_0t_2^3 - 2t_0t_1^3 + 2t_0^2t_2 - 4t_1t_2^2 - 12t_1^2t_2^2, 12t_2^2t_1^3 - 9t_0t_1t_2^3 + 6t_2^5 - 4t_0t_1^3 - 2t_0^2t_1t_2 + 4t_1^2t_2^2 - 4t_0t_2^3, 9t_0t_1^2t_2^2 - 9t_0^2t_2^3 - 2t_0^3t_2 - 2t_1^3t_2 + 6t_0t_1t_2^2 - 2t_2^4 + t_0^2t_1 - 2t_1^2t_2 - 2t_0t_2^2, 6t_0^2t_1t_2^2 + 12t_1^2t_2^3 - t_0^3t_1 - 2t_0t_1^2t_2 - 2t_0^2t_2^2 + 8t_1t_2^3, 6t_0^3t_2^2 + 9t_0t_1t_2^3 - 6t_2^5 + 2t_0t_1^3 - 2t_0^2t_1t_2 + 4t_1^2t_2^2 + 8t_0t_2^3, 18t_2t_1^4 + 36t_2^4t_1 + 14t_0^3t_2 + 32t_1^3t_2 + 12t_0t_1t_2^2 - 4t_2^4 - 7t_0^2t_1 + 14t_1^2t_2 + 14t_0t_2^2, 6t_0t_1^3t_2 + 2t_0t_1^2t_2 + t_0^3t_1 + 2t_0^2t_2^2 - 8t_1t_2^3 + 12t_2^4t_0, 9t_0^3t_2t_1 - 36t_2^4t_1 - 4t_0^3t_2 - 4t_1^3t_2 + 12t_0t_1t_2^2 - 4t_2^4 + 2t_0^2t_1 - 4t_1^2t_2 - 4t_0t_2^2, 6t_1^5 + 48t_1^2t_2^3 - 36t_2^4t_0 - 11t_0^3t_1 + 6t_1^4 + 14t_0t_1^2t_2 - 22t_0^2t_2^2 + 64t_1t_2^3, 3t_1^4t_0 + 6t_0t_1t_2^3 + 2t_0t_1^3 + t_0^2t_1t_2 - 2t_1^2t_2^2 + 2t_0t_2^3, 27t_2^4t_1^2 - 27t_0t_2^5 - 9t_0^2t_2^3 + 9t_2^4t_1 - 2t_0^3t_2 - 2t_1^3t_2 + 6t_0t_1t_2^2 - 2t_2^4 + t_0^2t_1 - 2t_1^2t_2 - 2t_0t_2^2, 6t_2^4t_0^2 + 12t_2^5t_1 - 5t_0t_1t_2^3 + 2t_2^5, t_0t_2^5t_1 + 2t_2^7)$
que es una variedad unidimensional. Para verificar si esta curva es o no un α-hipercírculo, siguiendo la Proposición 5.1, parametrizamos $\mathcal{W}$ con el haz de hiperplanos $t_0 + \alpha t_1 + \alpha^2 t_2 - t$. Haciéndolo se obtiene la parametrización en forma estándar

$$\psi(t) = \left(\frac{(\alpha^2 + 2\alpha t + t^2)t}{3\alpha t + \alpha^2 + 3t^2}, \frac{-1/2\alpha^2 t^3}{3\alpha t + \alpha^2 + 3t^2}, \frac{-1/2\alpha t^2(t + \alpha)}{3\alpha t + \alpha^2 + 3t^2} \right).$$

También esta misma parametrización puede obtenerse a través de la inversa de la parametrización (véase [10]*). Entonces, se comprueba que la curva irreducible definida por esta parametrización es de grado* 3*, y contiene al punto* $(0, 0, 0)$ *que es regular. Además, es $\mathbb{Q}$-definible, ya que es la única componente 1-dimensional de $\mathcal{W}$ (véase* [1]*), la cual es, por construcción, una variedad $\mathbb{Q}$-definible. Por tanto, del Teorema 4.4 se sigue que es un α-hipercírculo.*

Así, a partir de esta parametrización, el Algoritmo 5.1 calcula una unidad $u(t) = \frac{2}{2t+\alpha^2}$ asociada a $\psi(t)$. De esta manera, $\mathcal{W}$ es el hipercírculo asociado a $u(t)$ y $\mathcal{C}$ es parametrizable sobre $\mathbb{Q}$. En particular, la parametrización de $\mathcal{W}$ asociada a $u(t)$ es $\left(\frac{2t^2}{2t^3+1}, \frac{-1}{2t^3+1}, \frac{-t}{2t^3+1}\right)$. Además, la unidad $u(t)$ proporciona el cambio de parámetro que necesitamos para calcular una parametrización de $\mathcal{C}$ sobre el cuerpo base (véase [1]*), que resulta ser:*

$$\eta\,(u(t)) = \left(\frac{t+1}{t^4}, \frac{1}{t^4} \right) \in \mathbb{Q}(t)^2.$$

Ejemplo 6.2. *Sean $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ y $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha)$, donde α es el número algebraico de polinomio mínimo $x^3 - 2$. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^3$ la curva racional dada por la $\mathbb{L}$-parametrización* *propia*

$$\mathcal{P}(t)=\left(\frac{-t^3}{q(t)},\frac{\alpha\, t^3-\alpha^2t^2}{q(t)},\frac{-\alpha^2t^3+4\,t^2-2\,\alpha\, t}{q(t)}\right)$$

donde $q(t)=t^3-6\,\alpha\, t^2+6\,\alpha^2 t-4$. *El análisis del hipercírculo se efectúa a través de la normalización de la inversa de* $\mathcal{P}(t)$*, según* [10]. *De manera más precisa, se calcula primero la inversa de* $\mathcal{P}(t)$*, obteniendo* $\mathcal{M}(\bar{x}):=\frac{\alpha^2\, y}{z+\alpha\, y}$. *Y a continuación se halla su* $\mathbb{Q}$*-normalización, que es* $\frac{-2\, zy^2}{2\, y^3+z^3}+\frac{2\, y^3}{2\, y^3+z^3}\alpha+\frac{yz^2}{2\, y^3+z^3}\alpha^2$. *Por tanto,* $\frac{Q_0(\bar{x})}{R(\bar{x})}=\frac{-2\, zy^2}{2\, y^3+z^3}$, $\frac{Q_1(\bar{x})}{R(\bar{x})}=\frac{2\, y^3}{2\, y^3+z^3}$, $\frac{Q_2(\bar{x})}{R(\bar{x})}=\frac{yz^2}{2\, y^3+z^3}$. *Como* $R(\mathcal{P}(t))\neq 0$ *se construye* $\tilde{\mathcal{M}}(t)=\left(\frac{Q_0(\mathcal{P}(t))}{R(\mathcal{P}(t))},\frac{Q_1(\mathcal{P}(t))}{R(\mathcal{P}(t))},\frac{Q_2(\mathcal{P}(t))}{R(\mathcal{P}(t))}\right)$*, obteniéndose*

$$\tilde{\mathcal{M}}(t)=\left(\frac{t^2(t-\alpha)}{3t^2-3\alpha t+\alpha^2},\frac{\alpha^2t^3}{2(3t^2-3\alpha t+\alpha^2)},\frac{\alpha t(t^2-2\alpha t+\alpha^2)}{2(3t^2-3\alpha t+\alpha^2)}\right).$$

Ahora se analiza si $\tilde{\mathcal{M}}(t)$ *define un* α*-hipercírculo. Para ello, se aplica el Algoritmo 5.1 que determina que lo es, siendo* $u(t)=\frac{\alpha^2}{t+\alpha}$ *la unidad asociada al mismo; es decir* $\tilde{\mathcal{M}}(u(t))=\left(\frac{-2t}{t^3+2},\frac{2}{t^3+2},\frac{t^2}{t^3+2}\right)$. *Finalmente se calcula* $\mathcal{Q}(t)=\mathcal{P}(u(t))=\left(\frac{1}{t^3+1},\frac{t}{t^3+1},\frac{t^2}{t^3+1}\right)\in\mathbb{Q}(t)^3$. *Por lo que se concluye que la curva es* $\mathbb{Q}$*-parametrizable.*

Referencias

[1] C. Andradas, T. Recio, J. R. Sendra. Base field restriction techniques for parametric curves. En *Proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Vancouver, BC)*, pp. 17–22 (electronic). New York, 1999. ACM.

[2] C. Andradas, T. Recio, J. R. Sendra. The Weil variety for unirational varieties. En *Mathematical contributions in honor of Professor Enrique Outerelo Domínguez (Spanish)*, Homen. Univ. Complut., pp. 33–51. Editorial Complutense, Madrid, 2004.

[3] C. Andradas, T. Recio, J. R. Sendra, L. F. Tabera. *On the simplification of the coefficients of a parametrization.* J. Symbolic Comput., **44**(2):192–210, 2009.

[4] J. Bak, D. J. Newman. *Complex analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] D. Hilbert, A. Hurwitz. *Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null.* Acta Math., **14**(1):217–224, 1890.

[6] T. Recio, J. R. Sendra, L. F. Tabera, C. Villarino. *Algorithmic detection of hypercircles.* Preprint, 2009

[7] T. Recio, J. R. Sendra, L. F. Tabera, C. Villarino. Fast computation of the implicit ideal of a hypercircle. En *Actas de AGGM 2006*, pages 258–265, 2006.

[8] T. Recio, J. R. Sendra, L. F. Tabera, C. Villarino. *Generalizing circles over algebraic extensions.* To appear in Mathematics of Computation, 2009. `arXiv:0704.1384v1`

[9] T. Recio, J. R. Sendra, C. Villarino. From hypercircles to units. En *ISSAC 2004*, pages 258–265. ACM, New York, 2004.

[10] J. R. Sendra, C. Villarino. *Algebraically optimal parametrizations of quasi-polynomial algebraic curves.* J. Algebra Appl., **1**(1):51–74, 2002.

[11] L. F. Tabera. *Two Tools in Algebraic Geometry: Construction of Configurations in Tropical Geometry and Hypercircles for the Simplification of Parametric Curves.* PhD thesis, Universidad de Cantabria, Université de Rennes I, 2007.

[12] C. Villarino. *Algoritmos de optimalidad algebraica y de cuasi-polinomialidad para curvas racionales.* PhD thesis, Universidad de Alcalá, 2007.

[13] A. Weil. Adèles et groupes algébriques. En *Séminaire Bourbaki, Vol. 5*, pages Exp. No. 186, 249–257. Soc. Math. France, Paris, 1995.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cantabria, 39071, Santander, Spain
Correo electrónico: tomas.recio@unican.es

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alcalá, 28871, Alcalá de Henares, Spain
Correo electrónico: rafael.sendra@uah.es

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cantabria, 39071, Santander, Spain
Correo electrónico: luisfelipe.tabera@unican.es

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alcalá, 28871, Alcalá de Henares, Spain
Correo electrónico: carlos.villarino@uah.es