

UNA INVITACIÓN A ANALIZAR PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EJECUTANDO SEUDODIVISIONES

E. ROANES MACÍAS Y E. ROANES LOZANO

Dedicado a la memoria de Mirian Andrés Gómez

RESUMEN. El objetivo de este trabajo consiste en proporcionar una descripción breve y atractiva del método de demostración mecanizada de teoremas de Wu. El proceso se introduce a través de su aplicación a un caso particular y se describe además una implementación que automatiza los tediosos cálculos involucrados.

ABSTRACT. The goal of this paper is to provide a brief and attractive description of Wu's mechanical theorem proving method. The process is introduced through its application in a particular case, and an implementation that automates the tedious computations involved is described.

1. INTRODUCCIÓN

Los autores de este artículo han explicado durante varios cursos los métodos algebraicos de demostración mecánica usuales, como parte de una asignatura de un master de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Somos conscientes de que al comparar una fría demostración mecánica con la elegancia de una demostración sintética de un teorema de geometría elemental, la mente del matemático, admirador de la belleza del razonamiento deductivo, indudablemente se decanta en favor de esta última.

Ahora bien, no siempre se encuentra la idea feliz que conduce al hallazgo de un camino válido para encauzar una demostración por métodos clásicos de geometría sintética. En tal caso, es práctico aplicar algún método mecánico de demostración y, posteriormente, si es posible y compensa, buscar una demostración vía sintética.

En particular, el método de Wu [2, 3, 7, 14] tiene ciertas ventajas: está basado únicamente en aplicar una variante de la división euclídea; tiene una menor complejidad algorítmica y permite ser aplicado para determinar mecánicamente lugares geométricos. Su inconveniente es que para aplicarlo se han de efectuar más pasos que en otros métodos (los basados en Bases de Groebner, por ejemplo).

De acuerdo con nuestra experiencia impartiendo este tema, y posiblemente por lo tedioso del método, resulta mucho más atractivo para el alumno comenzar aplicándolo a casos concretos especialmente seleccionados, que empezar estudiando el algoritmo para después aplicarlo.

Key words and phrases. Mechanical theorem proving in geometry, Wu's method, pseudodivision, computer algebra.

El propósito de los autores de este artículo es presentar una exposición abreviada del método de Wu a través de ejemplos especialmente seleccionados al efecto y mostrar lo simple que es aplicarlo haciendo uso de una implementación que automatiza los cálculos, realizada por los autores sobre un sistema de cómputo algebraico. De este modo, pretendemos animar a hacer uso de estos métodos al lector reacio a utilizarlos.

2. SEUDODIVISIONES

Al efectuar la división euclídea del polinomio $f = y^3 + 1$ entre el $g = x \cdot y + 2$, respecto de la variable y , se obtienen un cociente y un resto que no son expresiones enteras. Sin embargo, si se sustituye f por $x^3 \cdot f$, entonces el cociente y el resto resultan ser expresiones enteras. Notemos que el coeficiente, x^3 , por el que se ha multiplicado a f , es el coeficiente líder de g (respecto de la variable y) elevado a uno más la diferencia de grados de dividendo y divisor (respecto de y), es decir, elevado a $1+(3-1)$. La división así alterada se denomina *seudodivisión*.

En general, se llama *seudodivisión* del polinomio multivariable (cuyos coeficientes son expresiones enteras) $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ entre el $g = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, respecto de x_1 , a la operación consistente en efectuar su división euclídea respecto de la variable x_1 (es decir, en $\mathbb{Q}[x_2, \dots, x_n][x_1]$), pero multiplicando previamente a f por un *coeficiente multiplicador*, consistente en el coeficiente líder de g (respecto de x_1) elevado a uno más la diferencia de grados de dividendo y divisor (respecto de x_1). El cociente y el resto así obtenidos se llaman *seudocociente* y *seudorresto*, respectivamente, y denotaremos a este último $sresto(f, g, x_1)$. Existe un comando en el sistema de cómputo algebraico Maple que calcula seudorrestos, cuya utilización se detalla, por ejemplo, en [8].

Siendo m el coeficiente multiplicador y s el seudocociente de la seudodivisión anterior, se tiene pues

$$m \cdot f = g \cdot s + sresto(f, g, x_1) \quad (1)$$

luego el seudorresto pertenece al ideal generado por f y g (en el anillo de polinomios considerado), es decir,

$$sresto(f, g, x_1) \in \langle f, g \rangle \quad (2)$$

3. MOSTRANDO EL PROCESO PASO A PASO

En aras de la simplicidad, comenzamos mostrando el proceso, paso a paso, sobre un problema concreto.

Problema 1. *¿Son colineales los puntos medios de las tres diagonales de un cuadrilátero completo?*

Planteamiento

Dados cuatro puntos del plano afín real, A, B, C, D , tales que tres cualesquiera de ellos no son colineales, se considera el cuadrilátero completo de lados AB, AC, AD, BC, BD, CD . Denotemos por V al punto común de los lados AD, BC (supuestos no paralelos) y denotemos por W al punto común de los lados AB, CD (supuestos también no paralelos). Finalmente, denotemos N, P, Q a los puntos medios de las

respectivas diagonales AC, VW, BD del cuadrilátero completo (Figura 1). Se trata de averiguar si Q, N, P han de ser colineales.

Coordenadas

Para simplificar los cálculos, se considera un sistema de referencia de origen A y cuyo primer eje de coordenadas pase por B . Observemos que la elección de este sistema de referencia no supone ninguna restricción sobre los objetos geométricos involucrados. De acuerdo con la Figura 1, las coordenadas de los puntos de la configuración se denotarán: $A(0, 0), B(b, 0), C(c, k), D(d, e), V(v1, v2), W(w1, 0), N(n1, n2), P(p1, p2), Q(q1, q2)$.

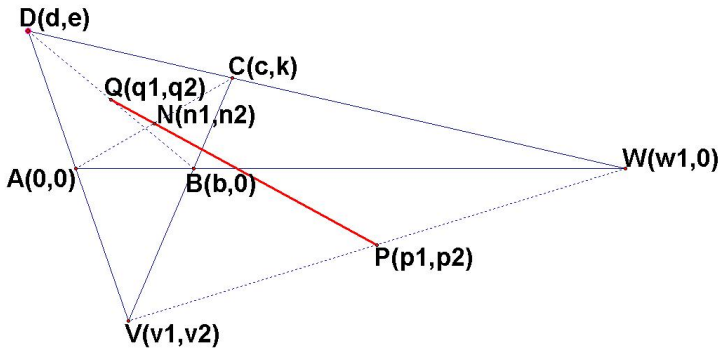


FIGURA 1. Alineación de los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero completo.

Parámetros y variables

Los cuatro puntos iniciales de la configuración, A, B, C, D , pueden ser arbitrariamente elegidos, por lo que sus coordenadas no nulas, b, c, k, d, e , son consideradas como *parámetros*. Las coordenadas de los demás puntos considerados (determinados por aquellos cuatro), $v1, v2, w1, n1, n2, p1, p2, q1, q2$, son consideradas como *variables*.

Polinomios de hipótesis

Se definen mediante expresiones enteras (no fraccionarias), que denotamos $h1, h2, \dots$

- $h1 := d \cdot v2 - e \cdot v1$ (V, A, D colineales)
- $h2 := (c - b) \cdot v2 - k \cdot (v1 - b)$ (V, B, C colineales)
- $h3 := -(d - c) \cdot k - (e - k) \cdot (w1 - c)$ (W, C, D son colineales)
- $h4 := 2 \cdot q1 - b - d$ (Q es punto medio del segmento BD)
- $h5 := 2 \cdot q2 - e$ (Q es punto medio del segmento BD)
- $h6 := 2 \cdot n1 - c$ (N es punto medio del segmento AC)
- $h7 := 2 \cdot n2 - k$ (N es punto medio del segmento AC)
- $h8 := 2 \cdot p1 - v1 - w1$ (P es punto medio del segmento VW)
- $h9 := 2 \cdot p2 - v2$ (P es punto medio del segmento VW)

Las *condiciones de hipótesis* resultan de la anulación de los respectivos polinomios de hipótesis, es decir, son, en este caso: $h1 = 0, h2 = 0, \dots, h9 = 0$.

Elección de orden de variables

Denotamos var a la lista de variables:

$$var := [q1, q2, n1, n2, p1, p2, v1, v2, w1]$$

Triangulación de polinomios de hipótesis

A partir del sistema polinomios de hipótesis, se trata de generar otro sistema, cuyas soluciones sean soluciones del sistema inicial y triangulado respecto del orden de variables elegido, es decir, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} g1 &:= g1(q1, q2, n1, n2, p1, p2, v1, v2, w1); & \partial(g1, q1) &> 0 \\ g2 &:= g2(q2, n1, n2, p1, p2, v1, v2, w1); & \partial(g2, q2) &> 0 \\ g3 &:= g3(n1, n2, p1, p2, v1, v2, w1); & \partial(g3, n1) &> 0 \\ g4 &:= g4(n2, p1, p2, v1, v2, w1); & \partial(g4, n2) &> 0 \\ g5 &:= g5(p1, p2, v1, v2, w1); & \partial(g5, p1) &> 0 \\ g6 &:= g6(p2, v1, v2, w1); & \partial(g6, p2) &> 0 \\ g7 &:= g7(v1, v2, w1); & \partial(g7, v1) &> 0 \\ g8 &:= g8(v2, w1); & \partial(g8, v2) &> 0 \\ g9 &:= g9(w1); & \partial(g9, w1) &> 0 \end{aligned}$$

donde $\partial(g, x)$ es el grado de g respecto de x . Ello se consigue en la práctica fácilmente, permutando ecuaciones y ejecutandoseudodivisiones. Así, en nuestro problema, se tiene:

$$\begin{aligned} g1 &:= h4 = 2 \cdot q1 - b - d & \partial(g1, q1) &= 1 \\ g2 &:= h5 = 2 \cdot q2 - e & \partial(g2, q2) &= 1 \\ g3 &:= h6 = 2 \cdot n1 - c & \partial(g3, n1) &= 1 \\ g4 &:= h7 = 2 \cdot n2 - k & \partial(g4, n2) &= 1 \\ g5 &:= h8 = 2 \cdot p1 - v1 - w1 & \partial(g5, p1) &= 1 \\ g6 &:= h9 = 2 \cdot p2 - v2 & \partial(g6, p2) &= 1 \\ g7 &:= h1 = d \cdot v2 - e \cdot v1 & \partial(g7, v1) &= 1 \\ g8 &:= sresto(h2, g7, v1) = -e \cdot v2 \cdot c + e \cdot v2 \cdot b - e \cdot k \cdot b + k \cdot d \cdot v2 & \partial(g8, v2) &= 1 \\ g9 &:= h3 = -(d - c) \cdot k - (e - k) \cdot (w1 - c) & \partial(g9, w1) &= 1 \end{aligned}$$

De este modo, los polinomios g_i ; $i = 1, 2, \dots, 9$ pertenecen al ideal generado por los polinomios h_j ; $j = 1, 2, \dots, 9$ del anillo de polinomios en las variables $q1, q2, n1, n2, p1, p2, v1, v2, w1$ con coeficientes en $\mathbb{Q}[b, c, k, d, e]$, es decir,

$$g_i \in \langle h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, h8, h9 \rangle; \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (3)$$

Polinomio de tesis

Lo denotaremos T :

$$T := (n1 - q1) \cdot (p2 - q2) - (n2 - q2) \cdot (p1 - q1) \quad (Q, N, P \text{ colineales})$$

La *condición de tesis*, $T = 0$, resulta de la anulación del polinomio de tesis.

Se trata pues de probar la implicación siguiente:

$$h_j = 0; \quad j = 1, 2, \dots, 9 \implies T = 0 \quad (4)$$

Seudorrestos sucesivos obtenidos a partir del polinomio de tesis

A partir del polinomio de tesis T y del sistema triangulado de polinomios g_i ; $i = 1, 2, \dots, 9$, se calculan los sucesivosseudorrestos indicados a continuación.

El seudorresto, r_1 , de la seudodivisión de T entre el primer polinomio de la triangulación, g_1 , respecto de la primera variable, q_1 , verifica, de acuerdo con (1):

$$m_1 \cdot T = g_1 \cdot s_1 + r_1 \tag{5}$$

donde m_1 y s_1 son el coeficiente multiplicador y el seudocociente. El seudorresto, r_2 , de la seudodivisión de r_1 entre el segundo polinomio de la triangulación, g_2 , respecto de la segunda variable, q_2 , verifica la siguiente relación:

$$m_2 \cdot r_1 = g_2 \cdot s_2 + r_2 \tag{6}$$

donde m_2 y s_2 son el coeficiente multiplicador y el seudocociente. El seudorresto, r_3 , de la seudodivisión de r_2 entre el tercer polinomio de la triangulación, g_3 , respecto de la tercera variable, q_3 , verifica la siguiente relación:

$$m_3 \cdot r_2 = g_3 \cdot s_3 + r_3 \tag{7}$$

donde m_3 y s_3 son el coeficiente multiplicador y el seudocociente.

...

...

El seudorresto, r_8 , de la seudodivisión de r_7 entre el último polinomio de la triangulación, g_8 , respecto de la última variable, w_1 , verifica la siguiente relación:

$$m_8 \cdot r_7 = g_8 \cdot s_8 + r_8 \tag{13}$$

donde m_8 y s_8 son el coeficiente multiplicador y el seudocociente.

Al ejecutar estas nueve seudodivisiones se obtienen los siguientes valores para los coeficientes multiplicadores y último seudorresto (los demás valores no tienen interés en nuestro proceso de cálculo):

$$r_9 = 0, m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 2, m_4 = 2, m_5 = 2, m_6 = 2 \tag{14}$$

$$m_7 = -e, m_8 = -e \cdot c + e \cdot b + k \cdot d, m_9 = -e + k \tag{15}$$

Consecuencia de los resultados

A partir de las relaciones (5) a (13), despejando cada $r_i; i = 1, \dots, 8$ y sustituyendo en la siguiente igualdad, resulta

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_9 \cdot T = f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 + \dots + f_9 \cdot g_9 + r_9 \tag{16}$$

donde f_1, f_2, \dots, f_9 son polinomios en las mismas variables ya citadas.

Si, ahora, se tiene en cuenta (3), de la relación (16) se deduce la siguiente

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_9 \cdot T = F_1 \cdot h_1 + F_2 \cdot h_2 + \dots + F_9 \cdot h_9 + r_9 \tag{17}$$

donde F_1, F_2, \dots, F_9 son polinomios en las mismas variables antes mencionadas.

Finalmente, la implicación (4) se deduce de la relación (17) y de los resultados (14) y (15), para todos aquellos valores de los parámetros que no anulen a los coeficientes multiplicadores (15). En otro caso, no puede asegurarse la validez de la implicación (4).

Puesto que los coeficientes multiplicadores (14) son no nulos, veamos pues el significado de la anulación de cada uno de los coeficientes multiplicadores (15):

1) $m_7 = e = 0$, implicaría que el vértice D estaría sobre el lado AB (cuadrilátero

degenerado), en contradicción con la hipótesis hecha en el planteamiento del problema.

2) $m_8 = -e \cdot c + e \cdot b + k \cdot d = 0$ es la condición de paralelismo de los lados AB y CD , que en el planteamiento del problema se han supuesto no paralelos.

3) $m_9 = -e + k = 0$ es la condición de paralelismo de los lados AD y BC , que en el planteamiento del problema también se han supuesto no paralelos.

En conclusión, bajo las condiciones indicadas en el planteamiento del problema, se verifica $T = 0$, es decir, los puntos medios de las tres diagonales de un cuadrilátero completo sí son colineales.

Nota. El caso de paralelismo de lados opuestos, que se ha excluido, habría de tratarse aparte, haciendo ligeros cambios en las condiciones de hipótesis y tesis, lo que se omite por brevedad. (Naturalmente, sustituyendo espacio afín por proyectivo, el enunciado se simplificaría, pero entonces la aplicación del método descrito resultaría menos sencilla, lo que sobrepasaría el propósito introductorio de este artículo).

4. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO PARA SU EJECUCIÓN AUTOMÁTICA

En el caso del ejemplo anterior, la triangulación es especialmente sencilla, por ser 1 el grado de los polinomios respecto de la variable a eliminar. En otro caso, se consigue triangular como se indica a continuación.

Triangulación en el caso general

Dado un sistema de n polinomios, h_1, \dots, h_n , en n variables, x_1, x_2, \dots, x_n , tal que $\partial(h_i, x_i) > 0$; $i = 1, \dots, n$, se trata de triangular el sistema respecto de dichas variables, mediante un proceso de escalonamiento sucesivo que recuerda al de eliminación gaussiana, pero sustituyendo combinaciones lineales por seudodivisiones. Mas precisamente, se trata de determinar otros n polinomios, g_1, g_2, \dots, g_n , en las mismas variables, pero que verifiquen:

- 1) $g_1, g_2, \dots, g_n \in \langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle$
- 2) $\partial(g_i, x_i) > 0$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$
- 3) $\partial(g_j, x_i) = 0$, para todo $j > i$

Ello se consigue ejecutando los dos pasos indicados a continuación.

Paso 1. Si uno de los polinomios h_i es de grado 1 respecto de la primera variable x_1 , el h_1 , por ejemplo, entonces se define $g_1 = h_1$ y se sustituye cada uno de los demás h_i por el seudorresto de dividirlo entre g_1 respecto de x_1 .

Paso 2. Si ninguno de los polinomios h_i es de grado uno respecto de la primera variable, x_1 , pero, por ejemplo, el grado del h_1 no es mayor que el de los restantes, entonces se sustituye cada uno de los demás h_i por el seudorresto de dividirlo entre h_1 respecto de x_1 . Se tienen así un conjunto, Φ , de n polinomios, de los cuales h_1 es el de mayor grado en x_1 , cabiendo ahora tres posibilidades:

- i) si hay un polinomio, $\phi \in \Phi$, de grado uno en x_1 , se ejecuta el *Paso 1* con los polinomios de Φ , haciendo ϕ las veces de h_1 en la anterior descripción del Paso 1.
- ii) si todos los restantes polinomios de Φ (exceptuando h_1) son de grado cero en

x_1 , haremos $g_1 = h_1$.

iii) en otro caso, se vuelve a ejecutar el *Paso 2* sobre Φ , hasta llegar a una de las dos anteriores posibilidades (lo que es seguro, ya que al pasar al seudorresto, se rebaja el grado respecto de la variable considerada).

En todo caso, reiterando el proceso con los $n - 1$ restantes polinomios así obtenidos, se consigue generar un sistema de polinomios triangulados que verifican las condiciones 1), 2) y 3), anteriormente mencionadas. El detalle del proceso de triangulación puede verse en [2, 3] o, en español, en [7].

Resumen del método de Wu.

Para probar un resultado por el método de Wu, basta pues:

- triangular el sistema de los polinomios hipótesis,
- hallar los sucesivos seudorrestos obtenidos al ir dividiendo el polinomio de tesis y los seudorrestos previos entre los polinomios del sistema triangulado, como se ha visto en la Sección 3,
- comprobar si se anula el último seudorresto y que no se anulan los coeficientes multiplicadores (los valores que anulan dichos coeficientes dan lugar a casos degenerados o situaciones excluidas en la demostración).

Nota. El método de Wu es realmente una demostración formal, por lo que permite garantizar la veracidad del resultado. No obstante, el que un aserto sea cierto no permite asegurar que pueda ser probado por dicho método.

Automatización del proceso

Como se desprende de lo anteriormente indicado, el proceso de triangulación y de cálculo de seudorrestos sucesivos es bastante laborioso, incluso en un ejemplo tan sencillo como el desarrollado en la sección anterior. Para aplicarlo con comodidad, los autores de este artículo han implementado este proceso de demostración automática por seudodivisiones en los sistemas de cómputo algebraico Maple y Derive. Los argumentos utilizados son tres: la lista `hip` de polinomios de hipótesis, la lista `var` de variables y el polinomio de tesis `T`. Los procedimientos principales del programa son también tres:

`trian(hip,var)` devuelve la lista de polinomios triangulados, denotada `gs`
`final_prem(T,gs,var)` devuelve el último seudorresto (el único de interés)
`mulf_list(T,gs,var)` devuelve la lista de coeficientes multiplicadores de las seudodivisiones sucesivas.

(Nuestra implementación está a disposición de los lectores interesados).

5. EJECUCIÓN AUTOMÁTICA DEL PROCESO

Tratemos de aplicar a un caso concreto el proceso así automatizado de demostración mecánica por seudodivisiones.

Problema 2. Dado un pentágono, $ABCDE$, si por cada vértice se traza la paralela a la diagonal que une sus dos vértices contiguos, se obtiene otro pentágono, $A_1B_1C_1D_1E_1$ (Figura 2). Comprobar si se verifica, o no, la relación siguiente (que

recuerda al teorema de Menelao):

$$\frac{\text{dist}(A_1, A) \cdot \text{dist}(B_1, B) \cdot \text{dist}(C_1, C) \cdot \text{dist}(D_1, D) \cdot \text{dist}(E_1, E)}{(\text{dist}(A_1, B) \cdot \text{dist}(B_1, C) \cdot \text{dist}(C_1, D) \cdot \text{dist}(D_1, E) \cdot \text{dist}(E_1, A))} = 1 \quad (18)$$

Coordenadas

Puntos iniciales: $B(0, 0), E(e1, 0), A(a1, a2), C(c1, c2), D(d1, d2)$

Restantes puntos: $A_1(x1, a2), B_1(x3, x2), C_1(x5, x4), D_1(x7, x6), E_1(x8, a2)$

Lista de polinomios de hipótesis

$$\begin{aligned} h1 &:= -(c2 - a2) \cdot x1 + (c1 - a1) \cdot a2 && (A_1B \parallel AC) \\ h2 &:= d2 \cdot (c1 - x3) - d1 \cdot (c2 - x2) && (B_1C \parallel BD) \\ h3 &:= -(c2 - a2) \cdot x3 + (c1 - a1) \cdot x2 && (B_1B \parallel AC) \\ h4 &:= -c2 \cdot (d1 - x5) - (e1 - c1) \cdot (d2 - x4) && (C_1D \parallel CE) \\ h5 &:= d2 \cdot (c1 - x5) - d1 \cdot (c2 - x4) && (C_1C \parallel BD) \\ h6 &:= (a2 - d2) \cdot (e1 - x7) + (a1 - d1) \cdot x6 && (D_1D \parallel DA) \\ h7 &:= -c2 \cdot (d1 - x7) - (e1 - c1) \cdot (d2 - x6) && (D_1D \parallel CE) \\ h8 &:= (d2 - a2) \cdot (e1 - x8) + (d1 - a1) \cdot a2 && (E_1E \parallel AD) \\ hip &:= [h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, h8] \end{aligned}$$

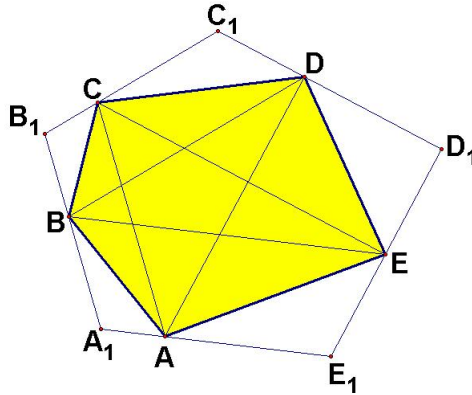


FIGURA 2. Pentágono de lados paralelos a diagonales.

Polinomio de tesis

$$\begin{aligned} T &:= (x1 - a1)^2 \cdot (x2^2 + x3^2) \cdot ((x4 - c2)^2 + (x5 - c1)^2) \cdot ((x6 - d2)^2 + \\ &(x7 - d1)^2) \cdot (a2^2 + (x8 - e1)^2) - ((a2^2 + x1^2) \cdot ((c2 - x2)^2 + \\ &(c1 - x3)^2) \cdot ((d2 - x4)^2 + (d1 - x5)^2) \cdot (x6^2 + (e1 - x7)^2) \cdot (a1 - x8)^2 \end{aligned}$$

(cuadrado del numerador - cuadrado del denominador de (18))

Lista de variables

$$var := [x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8]$$

Triangulación del sistema polinomios de hipótesis

$$gs := \text{trian_}(hip, var) \quad (\text{no es preciso explicitar esta lista})$$

Ultimo resto

$$\text{final_prem}(T, gs, var) = 0$$

Lista de coeficientes multiplicadores

$$\text{mul_list}(T, gs, var) = [(-c2 + a2)^2, d1^2, (-d1 \cdot c2 + a2 \cdot d1 + d2 \cdot c1 - a1 \cdot d2)^2, (e1 - c1)^2, (-e1 \cdot d2 + d2 \cdot c1 - d1 \cdot c2)^2, (a1 - d1)^2, (a2 \cdot e1 - a2 \cdot c1 + c2 \cdot a1 - e1 \cdot d2 - d1 \cdot c2 + d2 \cdot c1)^2, (a2 - d2)^2]$$

La interpretación geométrica de los coeficientes se omite por brevedad (si se analizan, corresponden a casos degenerados, luego como el último seudorresto es cero, el resultado es cierto).

Nota. Ejecutándolo por un método basado en Bases de Groebner, puede observarse un tiempo de computación mucho mayor que el empleado aquí mediante seudodivisiones (la complejidad algorítmica, en el peor caso, del método de Wu es exponencial, mientras que el de Bases de Groebner es doble exponencial).

6. RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE ESTE MÉTODO

El libro [2] contiene un breve desarrollo de la demostración mecánica por seudodivisiones de 512 teoremas geométricos de dimensión 2, algunos de los cuales han sido descubiertos utilizando este método. El capítulo 5 del libro [7] contiene un desarrollo completo de la demostración mecánica por dicho método de 15 teoremas geométricos clásicos de dimensión 2.

Por otra parte, el método descrito de demostración mecánica por seudodivisiones puede aplicarse a determinar lugares geométricos, utilizando un método de completación de hipótesis descrito en [6]. Su aplicación práctica consiste esencialmente en la obtención del polinomio del lugar geométrico como último seudorresto, para incorporarlo como nuevo polinomio de hipótesis, como se detalla en [9]. En el artículo [1] se describen otros interesantes ejemplos, utilizando una implementación desarrollada por sus autores.

La demostración mecánica por seudodivisiones descrita puede aplicarse a problemas geométricos de dimensión mayor que 2 (finita). Los autores del presente artículo han aplicado el método a extender a dimensión 3 varios teoremas clásicos de dimensión 2. Entre otros, en [11] aparecen extendidos a dimensión 3 los teoremas de Desargues, de Ceva y Menelao, y de Pappus y en [12] el teorema de Pascal. Además, en [9] hemos extendido a dimensión 3 el teorema [5] encontrado por Miguel de Guzmán, que generaliza otro clásico de Steiner.

También el proceso de generación de condiciones de hipótesis puede automatizarse, mediante la colaboración de un Sistema de Geometría Dinámica y un Sistema de Cómputo Algebraico. De este modo se dibuja la configuración en el Sistema de Geometría Dinámica y se ejecutan los cálculos en el Sistema de Cómputo Algebraico [4, 10]. Ello está disponible incluso en dimensión 3 [13].

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está parcialmente subvencionado por los proyectos TIN2009-07901 (Ministerio de Educación y Ciencia) y UCM2008-910563 (UCM - BSCH Gr. 58/08, grupo de investigación ACEIA).

8. CONCLUSIONES

El método de Wu, basado en pseudodivisiones, es muy simple de aplicar, utilizando una implementación que permita triangular automáticamente el sistema de polinomios de hipótesis y calcular el último pseudorresto y los coeficientes multiplicadores de las n pseudodivisiones sucesivas (siendo n el número de variables).

Su uso es útil para descubrir nuevos teoremas geométricos, para luego desarrollar su demostración sintética o analítica. También para resolver problemas geométricos para los cuales no es posible encontrar, o no se ha podido encontrar hasta hoy, una demostración por dichos métodos tradicionales.

REFERENCIAS

- [1] F. BOTANA. Automatic Determination of Algebraic Surfaces as Loci of Points. En *Procs. 2nd International Conference on Computational Science*, P.M.A. Sloot et al. (eds.), pp. 879–886. Springer Verlag (LNCS 2657), Berlin-Heidelberg, 2003.
- [2] S. C. CHOU. *Mechanical Geometry Theorem Proving*. Reidel, Dordrecht, 1988.
- [3] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA. *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer Verlag, New York, 2005.
- [4] J. ESCRIBANO, F. BOTANA, M. A. ABÁNADES. Adding remote computational capabilities to Dynamic Geometry Systems. *Mathematics and computers in simulation*. Artículo en prensa. doi:10.1016/j.matcom.2008.04.019
- [5] M. DE GUZMÁN. An Extension of the Wallace-Simson Theorem: Projecting in Arbitrary Directions. *Mathematical Monthly* **106**, 574–580, 1999.
- [6] T. RECIO, M. P. VÉLEZ. Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry. *Journal of Automated Reasoning* **23**(1), 63–82, 1999.
- [7] E. ROANES MACÍAS, E. ROANES LOZANO. *Nuevas tecnologías en geometría*. Ed. Complutense, Madrid, 1994.
- [8] E. ROANES MACÍAS, E. ROANES LOZANO. *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple*. Ed. Rubiños, Madrid, 1999.
- [9] E. ROANES MACÍAS, E. ROANES LOZANO. Automatic determination of geometric loci. 3D-Extension of Simson-Steiner Theorem. En *Artificial Intelligence and Symbolic Computation, International Conference AISC 2000*, J.A. Campbell y E. Roanes-Lozano (eds.), pp. 157–173. Springer Verlag (LNCS 1930), Berlin-Heidelberg, 2001.
- [10] E. ROANES-LOZANO, E. ROANES-MACIAS, M. VILLAR-MENA. A bridge between dynamic geometry and computer algebra. *Mathematical and Computer Modelling* **37**(9-10), 1005–1028, 2003
- [11] E. ROANES MACÍAS, E. ROANES LOZANO. A Maple Package for Automatic Theorem and Discovery in 3D-Geometry. *Automated Deduction in Geometry, 6th International Workshop, ADG 2006*, F. Botana, T. Recio (eds.), pp. 171–188. Springer Verlag (LNAI 4689), Berlin-Heidelberg-New York, 2007.
- [12] E. ROANES-MACÍAS, E. ROANES-LOZANO, J. FERNÁNDEZ-BIARGE. Obtaining a 3D extension of Pascal Th. for non-degenerated quadrics and its complete configuration with the aid of a computer algebra system. *RACSAM Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat* **103**(1), 93–109, 2009.
- [13] E. ROANES LOZANO, N. VAN LABEKE, E. ROANES MACÍAS. Connecting the 3D DGS Calques3D with the CAS Maple. *Mathematics and computers in simulation*. Artículo en prensa. doi:10.1016/j.matcom.2009.09.008
- [14] W. T. WU. *Mechanical Theorem Proving in Geometries*. Springer-Verlag, Text and Monographs in Symbolic Computation, Wien, 1994.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, SPAIN
Correo electrónico: roanes@mat.ucm.es

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, SPAIN
Correo electrónico: eroanes@mat.ucm.es