

## Ecuaciones diferenciales en un contexto físico

K. Carmona-Miranda, S. Flores-García, J. O. Ruiz-Chávez,  
M. C. Salazar-Álvarez, J. E. Chávez-Pierce

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

### Resumen

Cuando se conduce al alumno a través de la observación, experimentación y manipulación de los elementos de aprendizaje, este puede tener una comprensión de la abstracción matemática vista en clase, y de esta manera llega a un *aprendizaje significativo*. En este trabajo se desarrolla una propuesta didáctica con base en el diseño de situaciones físicas de contexto: Por medio de la manipulación del fenómeno físico a estudiar, se pretende que el alumno tenga un aprendizaje significativo de la ecuación diferencial. Esto con el objetivo de verificar si con la interacción del alumno con el fenómeno físico del vaciado de tanques, éste comprende el planteamiento de la ecuación diferencial y el significado que describe dicho fenómeno. Durante el proceso de trabajo con los alumnos descubrimos que es posible despertar en el educando la curiosidad hacia la investigación mediante el uso y descubrimiento de habilidades científico-intelectuales propias de su aprendizaje formal. Explicaremos como valoramos el aprendizaje de los alumnos, y que resultados encontramos al final del semestre durante el cual se trabajó.

**Palabras Clave:** Educación matemática; ecuaciones diferenciales; contexto físico

### Introducción

La enseñanza de la ciencias y las matemáticas en México ha sido tradicionalmente memorística (Vazquez Chagoyan, 2005). En este tipo de enseñanza lo que el maestro dice es la ley y no hay posibilidad de cuestionar dicho conocimiento. De manera que las matemáticas se han reducido a una lista de fórmulas y tablas que hay que aprenderse de memoria, y por ende la física y química también se reducen a una serie de ecuaciones a aplicar como recetas de cocina. En los nuevos planes educativos a niveles de primaria y secundaria, se ha buscado cambiar este

paradigma. Por ejemplo, en la primaria se manipulan objetos para entender los quebrados, se trabaja con el concepto de las compras y situaciones hipotéticas de la vida diaria para enseñar el concepto de multiplicación antes de intentar que se memoricen las tablas los alumnos.

Pero ¿qué pasa con la educación superior? Sobre este tema se ha investigado y buscado cuales son las causas por las que los alumnos tienen serias dificultades para desarrollar un entendimiento funcional de los conceptos básicos de la física (Flores-García, 2008). Estas

investigaciones revelan que la base de estos problemas en física está en el entendimiento funcional de las matemáticas relacionadas para describir en papel dichos fenómenos. Este entendimiento funcional o aprendizaje significativo, como lo llama Ausubel (1983), se da cuando el alumno es capaz de aplicar lo que se vio en clase en un contexto específico y/o

situación diferente. Lograr que el alumno reinvente lo aprendido en clase, como dice Piaget (1972), es lograr que lo entienda. Pero para lograr este reinventar del conocimiento, Piaget propone que el alumno use la manipulación y la investigación como fundamentales elementos de desarrollo cognitivo.

### Teoría e Hipótesis

Toda la teoría de Piaget, y muchos de los otros grandes educadores/psicólogos, están enfocadas en niños, en como el cerebro de los niños se desarrolla desde el nacimiento y hasta que entra en la adolescencia. Desafortunadamente algunas veces olvidamos que los jóvenes que entran en las aulas en los primeros años de la universidad usan estos mismos principios y estas mismas técnicas para adquirir nuevos conocimientos. Como bebés, según Piaget (1972), la primera forma de evolución cognitiva que tienen ellos se desarrolla en las etapas tempranas del cerebro humano, para aprender por los sentidos (estadio Senso-Motor), donde la manipulación de los objetos, el probarlos incluso, es importante para que descubran el mundo que los rodea. De igual manera, creemos que es importante que los jóvenes observen, huelan, oigan y manipulen los fenómenos físicos. Dado que las matemáticas son una forma de representar a dichos fenómenos creemos que también es importante empezar a incluir en estas

materias prácticas de laboratorio, donde el conocimiento es completamente nuevo para el alumno. Es importante diseñarlas de manera que el alumno pueda darse cuenta que las matemáticas que esta aprendiendo diseñar estas prácticas como una herramienta para que él tenga la oportunidad de describir el mundo que lo rodea, y que además puede servirle como una herramienta de predicción para eventos físicos futuros.

Como lo refieren los maestros, las matemáticas es una de las materias de más difícil asimilación para los alumnos (Barron-López 2009); cuestión que incrementa en el momento que aumenta la dificultad del tópico visto. Cuando el aprendizaje no es significativo, o se tiene un entendimiento funcional, se priva al alumno de una de las más poderosas motivaciones para aprender: *el sentir que el aprender es por sí mismo recompensador* (Posada, 1993). Además, Bruner (1978) afirma: “la complejidad y la confusión nos abruman fácilmente. El dominio

cognitivo... depende de las estrategias que permitan reducir la complejidad y la confusión”.

En este trabajo en particular el grupo de investigación de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez: *Física y Matemáticas en Contexto*, se enfocó en la clase de Ecuaciones Diferenciales. Se tomó como contenido a investigar el tema de vaciado de tanques, ya que es una de las aplicaciones de dicha materia mas frecuentemente empleada para enseñar lo que es una ecuación diferencial ordinaria lineal y de primer orden. El planteamiento de dicha ecuación se basa en

igualar las dos definiciones que hay del flujo o gasto, y a partir de ahí se usa el *Principio de Pascal* para dejar ambos lados de nuestra ecuación en términos únicamente de altura y tiempo. Se resuelve para la altura, llegando como solución a una ecuación de segundo grado.

De acuerdo con el teorema de Torricelli, la velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en su fondo es la misma que la que adquiere un cuerpo que cayese libremente en el vacío desde una altura  $h$ , siendo  $h$  la altura de la columna de fluido:

$$v = \sqrt{2gh} \dots (1)$$

Lo que se busca es la relación que existe entre la altura  $h$  alcanzada por la columna de líquido y el tiempo que se tarda en alcanzar dicha altura al empezar el vaciado en una altura inicial  $h_0$ . Empezamos planteando la relación matemática

que compara el flujo  $\Phi_1$  el cual se refiere al agua que cruza la sección 1 que nos muestra la figura 2, con el flujo  $\Phi_2$  que es el agua que sale del recipiente por la sección dos.

$$-\Phi_1 = \Phi_2 \dots (2)$$

Estos flujos se reescriben usando la definición de cambio de volumen  $V$  para la sección 1, y la de velocidad punto área para la sección 2. De esta

manera queda planteado el problema físico como una ecuación diferencial de primer orden.

$$\frac{-dV}{dt} = \bar{a}_2 \cdot \bar{v}_2 \dots (3)$$

Estos términos se vuelven a reescribir, ahora en términos de la altura  $h$ . Por el lado del volumen se tiene que el área es constante y por lo tanto sale

de la diferencial, y del lado de la velocidad se usa la ecuación 1, quedando solo los valores escalares ya que es un producto punto de dos vectores paralelos.

$$-a_1 \frac{dh}{dt} = a_2 \sqrt{2gh} \dots (4)$$

De esta manera queda planteada, la ecuación diferencial. Cuando se despeja e integra ambos

lados de la ecuación se llega a la solución. Y al despejar para la altura queda una ecuación cuadrática.

$$h = h_0 - \sqrt{2gh_0} \frac{a_2}{a_1} t + \frac{g}{2} \left( \frac{a_2}{a_1} t \right)^2 \dots (5)$$

Tomando la definición de flujo como el cambio de volumen con respecto al tiempo, y usando la

ecuación 5 para la altura  $h$ , es claro que el flujo es una función lineal con respecto del tiempo.

$$\Phi = a_2 \sqrt{2gh_0} - \frac{a_2^2}{a_1} gt \dots (6)$$

El tiempo  $T$  que tarda la probeta en vaciarse se calcula a partir de la ecuación 5, haciendo  $h = 0$  y despejando para  $t$ .

$$T = \frac{a_1}{a_2} \sqrt{2 \frac{h_0}{g}} \dots (7)$$

## Método de investigación

Así como Ausubel (2002) nos invita a unir dos corrientes: el constructivismo y la teoría del conductismo para lograr que los alumnos realicen una conexión de sus conocimientos de experiencias anteriores con los nuevos aprendizajes. Donde en una se les da el espacio a los alumnos para que experimenten y en la otra el maestro es el que expone el conocimiento. En este trabajo empezamos con una exposición del maestro sobre el tema de manera tradicional, luego llevamos a los alumnos a que expresen lo que han aprendido por medio de un examen corto (*examen de entrada*); una vez que ellos tienen, en teoría, un poco o un mucho de conocimiento asimilado se les lleva al laboratorio donde se les da la libertad de experimentar, donde el maestro es solo un facilitador del conocimiento; finalmente se aplica un examen (*examen de salida*) para analizar la posible mejora en la asimilación de este nuevo conocimiento.

Para nosotros como grupo de investigación es importante que los resultados arrojados por la nueva propuesta didáctica planteada puedan ser comparados con los resultados de alumnos que no participan en ella.

De esta manera se puede tener una medición cualitativa del impacto de dicha didáctica. En este caso en particular, se utilizaron dos grupos con el mismo profesor. Un grupo se llevo al laboratorio y al otro solo se le aplicaron los exámenes. Se escogió un maestro dispuesto a participar con nosotros para que el trabajo realizado se hiciera durante los horarios de clase, y no hubiera un mayor ausentismo entre una etapa y otra que la que hay en las clases normales.

El examen de entrada se elaboro de manera que el alumno lo pudiera percibir de una manera lúdica. Se empieza con unas tripas de gato (figura 1), en las cuales el alumno relaciona 2 eventos físicos con sus diferentes representaciones matemáticas, dándosele como ejemplo resuelto un fenómeno de comportamiento logarítmico. Con este ejercicio se pretende descubrir que tanto el alumno comprende el comportamiento matemático del fenómeno a tratar, y si puede relacionar las diferentes formas en que esta información se le presenta.

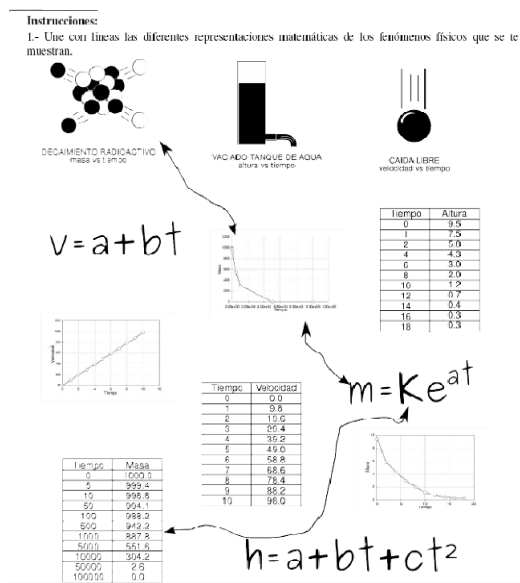


Figura 1: Primera parte del examen de entrada.

En la segunda parte del examen, se le hacen dos preguntas de control (figura 2), mismas que estarán en el examen de salida. Dado que en el planteamiento del problema del vaciado de tanques, la definición de flujo o gasto es primordial, estas preguntas de control se refieren

a estas definiciones, una para el flujo como cambio de volumen y la otra como velocidad por área de tránsito. Y se hacen tanto antes de la práctica como después de la misma, para medir el posible mejoramiento en la retención de dichos conceptos.

3.- En un segundo el volumen que baja el nivel de agua dentro del tanque (sección 1) es de 300 ml. ¿La cantidad de agua que sale por el orificio (sección 2) en ese mismo tiempo de 1 segundo será *mayor que*, *menor que* o *igual a* 300 ml?

2.- La figura de la derecha muestra un recipiente con agua. De acuerdo a la salida de agua por el orificio, ¿es la velocidad con la que baja el nivel de agua dentro del tanque (sección 1) *mayor que*, *menor que* o *igual a* la velocidad con la que sale el agua por el orificio (sección 2)? Explica tu razonamiento.

Figura 2: Preguntas de control para los exámenes de entrada y de salida.

La práctica tiene una estructura tal, que intenta llevar al alumno paso a paso por el método científico. Tenemos una introducción sobre lo que se busca lograr con la práctica y que materiales se piensan utilizar, después tenemos el desarrollo de la misma la cual se divide en cinco secciones:

- *Sección I*, tenemos la preparación del material a utilizar y como se arreglan los elementos a utilizar.
- *Sección II*, es la observación inicial del vaciado, se termina esta sección con un pequeño cuestionario de revisión de datos y predicciones. Se pretende que esto ayude al alumno a estar consciente de todos los detalles que se miden, se calculan e intervienen dentro del planteamiento de la ecuación diferencial. Además de establecer una hipótesis sobre lo que va a medir.
- *Sección III*, tenemos la adquisición de datos, esta parte es el desarrollo del experimento en sí, se toman las mediciones de tiempos y alturas, los cuales nos dan la solución de la ecuación diferencial. Esta sección termina con un pequeño cuestionario, el cual pretende que el alumno pueda validar su primera hipótesis y generar una nueva acerca del resultado del análisis de datos.

- *Sección IV*, es la sección del análisis de datos, en ella se pretende llevar al alumno poco a poco hasta el planteamiento de la ecuación diferencial, por medio del llenado de tablas y construcción de gráficas. Terminando esta sección se tiene un cuestionario que pretende que el alumno realice sus propios procesos de aprendizaje sobre el trabajo realizado durante todo el ejercicio.
- *Sección V*, en esta sección se pide que el alumno exprese libremente su propia opinión acerca de la práctica, su manera de sentir y sus creencias sobre la utilidad de la práctica, las fallas de la misma, los errores cometidos, etc.

En el examen de salida se tienen además de las preguntas de control, preguntas que censan simplemente el lado matemático del problema, es decir solo mide si el alumno puede identificar o no una ecuación lineal de una cuadrática tanto en su forma gráfica como en su forma numérica, y 3 preguntas específicas del tema a tratar, donde se evalúa si el alumno puede identificar los diferentes pasos de la solución de la ecuación diferencial: planteamiento, solución matemática y solución gráfica.

Se trabajo con alumnos de la UACJ que se inscribieron en los grupos del profesor Abelardo Loya durante el semestre Agosto – Diciembre

2009. El profesor Loya impartió clases a un grupo en el turno matutino el cual se escogió para que realizara la práctica y a un grupo vespertino el cual fue escogido para ser el grupo testigo el cual no realizó ninguna práctica.

Después de que el profesor explicará el tema en el pizarrón y ser resolviera un problema a manera de ejemplo, se puso a los alumnos el examen de entrada. Se les dio 20 minutos para contestar las tres preguntas propuestas y se recogió el examen. Esto se hizo tanto en el grupo de la mañana como en el grupo de la tarde, durante la última clase que tienen los alumnos con el profesor en la semana. Todos los alumnos trabajaron de manera entusiasta ya que el profesor explicó que era parte de un trabajo de investigación que estaba llevando a cabo nuestro grupo *Física y matemáticas en contexto*. La idea de realizar actividades que representen el no tomar la clase, les parece atractiva a los muchachos que así lo expresaron oralmente. Los resultados de estos exámenes no se dieron a conocer a los muchachos, ya que estos estaban diseñados para poder medir un progreso o un retroceso por el hecho de realizar o no la práctica. En la siguiente semana de clase los alumnos del grupo de la mañana estuvieron participando en la práctica, en la primera clase los alumnos se presentaron en el laboratorio de química donde se les entregó una copia de la práctica a cada alumno y se fueron sentando por equipos de hasta 5

integrantes cada uno. Los alumnos realizaron sus observaciones y sus mediciones dejando el análisis de datos y el desarrollo de conclusiones para la siguiente clase. Durante la segunda y última clase de la semana, ya dentro del salón de clases estos alumnos realizaron el análisis de datos y las conclusiones. Durante este proceso, los alumnos de la tarde siguieron con sus clases normales. Los alumnos que trabajaron en el laboratorio, refieren de manera oral que se divirtieron mucho, que por fin entendieron lo que el maestro pedía que se calculara. A la siguiente semana se aplicó el examen de salida y los alumnos que realizaron la práctica participaron de manera entusiasta, mientras que cuando se aplicó el examen a los alumnos de la tarde, se notó un poco más apático el grupo con este segundo examen.

Una vez teniendo los resultados del examen de salida, se procedió a comparar estos resultados con los obtenidos en el examen de entrada, encontrándose entre los datos más relevantes que:

- La figura 3 muestra que el 35% del total de alumnos mejoraron su respuesta o razonamiento expresado por escrito en el examen de salida, en la pregunta de control sobre el flujo como cambio de volumen.



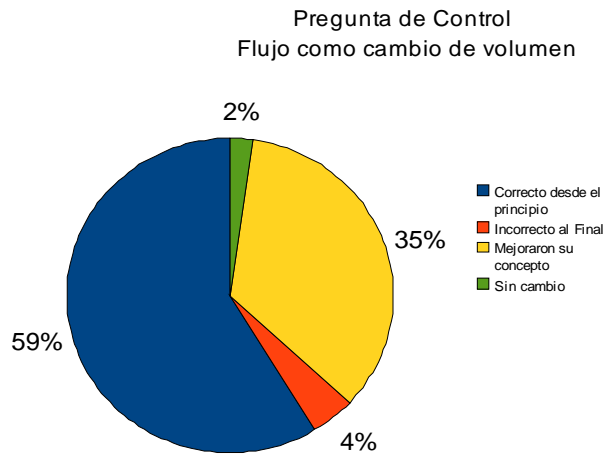


Figura 3: Resultados de pregunta de control acerca del flujo como un cambio de volumen

- De este 35%, el 68% son alumnos que realizaron la práctica.
- Con respecto a la pregunta de control de flujo como velocidad por área, del total de

alumnos 33% ( figura 4) mostraron una mejora en su respuesta con respecto al examen de entrada, y 24% tuvieron una confusión al contestar erróneamente en el examen de salida.

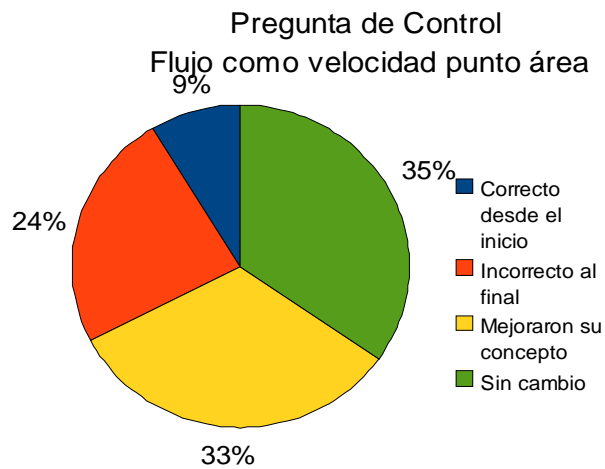


Figura 4: Resultados de pregunta de control acerca del flujo como un producto velocidad-área.

- En promedio casi el 35% de los alumnos contestaron correctamente a las 2 preguntas de control en el examen de entrada y no cambiaron su razonamiento en el examen de salida.
- La mayoría de los alumnos que mejoraron fueron los alumnos que realizaron la práctica mientras que, de los alumnos que tuvieron una confusión la mayoría no participó en ella.

- Las respuestas de los alumnos que realizaron la práctica fueron mas creativas y diversas que en el grupo donde no se realizó.

### Conclusiones

Los seres humanos para aprender requieren de ritmo de aprendizaje diferente y formas de adquirir el conocimiento que les rodea; y estas formas pueden ser viendo, escuchando o haciendo. Nuestro sistema educativo está diseñado y establecido mayormente para aquellos que aprenden *viendo = memorización*. Esto sucede aproximadamente en una tercera parte de nuestra población estudiantil. Para aquellos alumnos que aprenden haciendo es necesario diseñar e implementar prácticas que lleven al alumno al conocimiento por descubrimiento, sin dejar de lado la exposición del maestro, y también para aquellos que al escuchar en los diferentes timbres, tonos y emociones de inflexiones de la voz, van teniendo acceso a los nuevos saberes. Ninguno de estos modos, se da solo o es total, sino que se tienen formas en las cuales cada

individuo se siente mejor al adquirir este conocimiento.

Estas prácticas no solo aumenta el número de alumnos que logran un posible entendimiento funcional de los temas impartidos, sino también nos reducen el número de alumnos que al repetir el concepto en otros temas o exámenes posteriores se confundan. También se ve una gran diversidad de respuestas entre los alumnos que hicieron la práctica y sobre todo una participación más entusiasta en el examen de salida de aquellos que participaron en esta. Esto nos muestra un posible desarrollo de la creatividad en los alumnos. Se pudo observar, durante todo este proceso, aunque no se puede medir de manera cuantitativa, que a los alumnos se les despertó un interés por aprender. Esta

experiencia les permitió ver la importancia de prácticas en el laboratorio del conocimiento teórico, logrando asociaciones que de otra manera se dejan en el 'supuesto'. La repetición fenomenológica se presenta como una necesidad de aprendizaje en los alumnos que participaron en esta práctica, formando así las bases para un correcto trabajo en laboratorio.

Finalmente, la necesidad de tener demostraciones y prácticas dentro del salón de clases en los cursos básicos dentro del área de las ciencias básicas, que en 1950 se expresó como una reforma educativa dentro de la universidad de Caltech en Estados Unidos, la cual condujo como uno de sus productos finales las famosas "Feynman's Lectures" (1989), se ve una vez más demostrada con este trabajo.

## Referencias

- Ausubel, D.P. 2002. *Adquisición y retención del conocimiento*, España: Paidós.
- Ausubel DP, Novak J, Hanesian M. 1983. *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*, México: Trillas
- Barrón-López, JV, J Luna-González, J Estrada-Cabral, S Flores-García, F Estrada-Saldaña, MA Ramos. 2009. *La Ecuación de la Línea Recta en la Modelación de Fenómenos Físicos*. CULCyT, Año 6, N°31.
- Bruner, J. 1978. *El proceso mental en el aprendizaje*, Madrid: Ed. Narcea.
- Feynman, RP, MA Gottlieb, R Leighton. 1989. *Tips on Physics, A problem-solving supplement to the Feynman Lectures on Physics*. EU: Pearson Addison-Wesley.
- Piaget, J. 1972, *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Madrid: Aguilar.
- Posada, JJ. 1993. *Jerome Bruner y la educación de adultos*. Boletín 32. Proyecto Principal de Educación: Argentina.
- Vázquez Chagoyán, R. 2005. *La escuela a examen: Las reformas educativas, más de cuatro décadas de fracasos*. Consultado 15 de octubre 2009, <http://www.observatorio.org/colaboraciones/vazquez.html>.

