

UN ESTUDIO DE LA VARIACIÓN FÍSICA Y LA RAPIDEZ DE CAMBIO

J. Luna-González^{1,2}, J. Estrada-Cabral¹, J. V. Barrón-López¹,
M. S. Ávila-Sandoval¹, S. Flores-García¹, O. Ruiz-Chávez¹

Resumen. El siguiente artículo expone la primera parte de una investigación realizada con un grupo de alumnos de preparatoria, en los cursos de Cálculo Diferencial. El propósito consiste en explorar que tipo de experiencias pueden fortalecer sus ideas acerca de la derivada. Se realizaron una serie de prácticas basadas en el estudio de la variación física y la rapidez de cambio, partiendo de diferentes situaciones-problema y mediante modelos reales o físicos consistentes en situaciones abiertas de modelación. Estas situaciones didácticas intentan que el estudiante relacione los distintos registros semióticos. Todo este desarrollo metodológico dentro de un espacio común, el laboratorio de matemáticas. En la parte final haremos algunas reflexiones sobre las prácticas operativas y discursivas que mostraron los alumnos frente a este tipo de situaciones y las formas de comunicarse.

Palabras clave: Educación matemática, cálculo diferencial, variación física, cambio

Introducción

La primera aproximación de contextualizar situaciones o problemas con modelos *físicos* o *reales* parte de un curso de Geometría Analítica ofrecido a nivel medio superior. En este curso nos reducimos a presentar una prueba física coherente al conocimiento descrito en los libros de texto, o bien, a los presentados en el pizarrón. Para ello se realizaron alrededor de diez prácticas en los talleres y en los espacios abiertos de la escuela. Por la forma en que se desarrollaron, podemos decir que las prácticas no modificaron el *currículum* de la materia, ya que estas se diseñaron al margen del curso y fueron realizadas de manera posterior como una tarea extracurricular.

Este proyecto intentó dar respuestas a distintas situaciones o problemas de aprendizaje planteados en esta clase. Para esto, se utilizaron otras maneras de solución (experimental), donde “las propiedades geométricas y físicas de las cónicas y la línea recta juegan un papel fundamental, para entonces introducir al estudiante del nivel medio superior en la aplicación de esta materia” (Luna, 1997). Ahora bien, en cada

una de estas situaciones de aprendizaje intentamos provocar algo más que una primera impresión motivacional. Podemos agregar entonces que un propósito fue encontrar en el diseño de estas prácticas, condiciones que permitieran el desarrollo del conocimiento a partir de las experiencias generadas del contacto directo con los objetos y fenómenos físicos. En cuanto a las características didácticas, se observaron en la mayoría de estos modelos condiciones como: contextualizar el conocimiento, presentar un modo experimental de comprobación, ser repetible, y tener la cualidad de retomar total o parcialmente alguna parte del proceso. Todo esto además de la existencia de un medio de validación de sus soluciones. Sin embargo, por la forma predispuesta de plantear el problema se reducen las posibilidades de formular una estrategia personal por parte del alumno para encontrar las soluciones.

A continuación presentamos un ejemplo de éste tipo de práctica. En la figura 1 se pide que el alumno compruebe de manera geométrica y experimental que solo las trayectorias rectas dirigidas a uno de los focos de una hipérbola, se reflejan pasando a través del otro foco.

¹ Grupo de investigación: *Física y matemáticas en contexto*. IIT. UACJ.

² juluna@uacj.mx

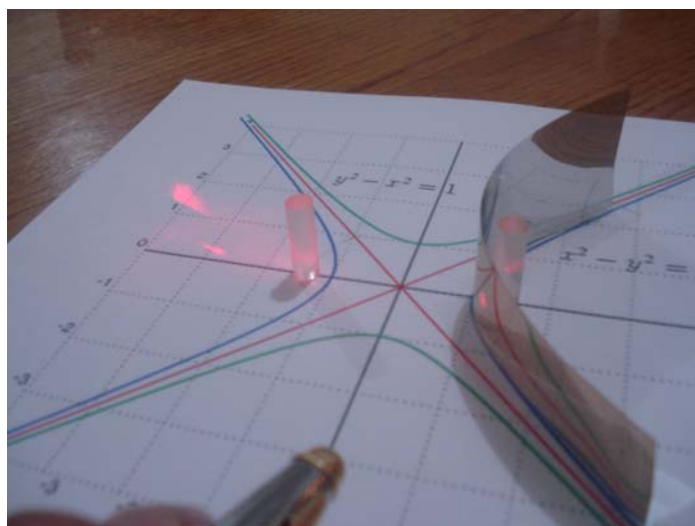


Figura 1 Hipérbola donde con un solo haz de luz se observan iluminados ambos focos

La siguiente aproximación de utilización de objetos matemáticos *reales* o *físicos* con propósitos didácticos, aparece bajo el marco de la convocatoria del concurso de prototipos didácticos en el Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Este evento motivó el interés de los alumnos hacia las matemáticas y la física. Además este evento también detona la manera de presentar el conocimiento de estas ciencias. Cabe mencionar que algunos de estos modelos ya forman parte del currículum de lo que llamamos *el Laboratorio de matemáticas*.

Un ejemplo de este tipo de prototipos consta de una rampa que toma la forma de una curva famosa llamada *cicloide*. Este lugar geométrico tiene la característica física, entre

otras muchas cualidades, de llevar un objeto físico en el menor tiempo posible bajo la influencia de la gravedad desde un punto *A* hasta un punto *B* situado en una posición más baja. En este modelo se pretende provocar una aparente contradicción dado que si, como ejemplo, se hacen resbalar a dos o más niños al mismo tiempo. Este se refiere a que desde diferentes alturas, sobre la misma rampa, todos los objetos llegarán al final en tiempos iguales como “final de fotografía”. Cabe afirmar que existen muchas otras cualidades a observar, por ejemplo, comparada la rapidez de su trayectoria contra el plano inclinado, sin duda muchas personas apostarán por la mayor rapidez del objeto que se mueve sobre el plano inclinado. La figura 2 muestra una gráfica de la parametrización de una curva cicloide.

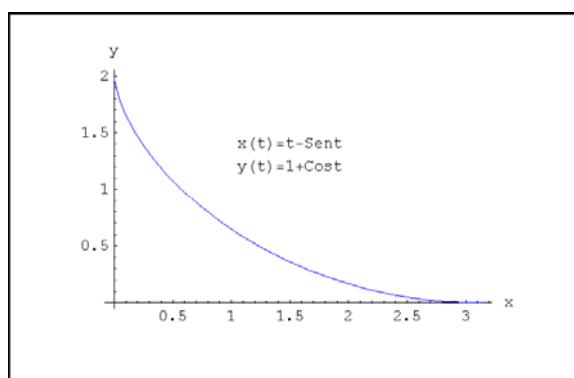


Figura 2. Ecuaciones paramétricas de una cicloide y su gráfica correspondiente.

Los resultados obtenidos en estos concursos, propiciaron el inicio de un proyecto llamado *La ciencia en el parque*. La figura 3 muestra un ejemplo de un modelo gráfico que representa a un paraboloide. En este proyecto pretendemos acercar la ciencia al ciudadano común a través de estos modelos construidos a gran escala. Estos modelos se situarían físicamente en el entorno de un parque, donde se tiene la oportunidad de estar en contacto directo y

descubrir y experimentar las propiedades físicas de estos objetos a través de sus comportamientos. Todo este diseño sin mayor intermediario que la curiosidad innata de cada individuo.



Figura 3. Diseño gráfico de un paraboloide situado en un parque público.

La tercera aproximación de utilización de objetos matemáticos *reales* o *físicos*, es la propuesta actual, que se relaciona con el

desarrollo de prácticas de variación física y rapidez de cambio.

Planteamiento del problema

Existen algunas investigaciones acerca del problema de la enseñanza de la derivada y de las ideas que se forman los estudiantes del bachillerato en los cursos de cálculo diferencial. Los resultados indican que los estudiantes “mostraron inconsistencias sobre la interpretación geométrica de la derivada y que en los cursos ordinarios la derivada parece no estar relacionada con los fenómenos de la variación” (Dolores, 1998). A partir de este tipo de trabajos y sus conclusiones, proponemos una serie de actividades consistentes en prácticas de laboratorio, en el marco de la variación física

y la rapidez de cambio. Esto con apoyo en modelos *físicos* o *reales*. Esta propuesta de aprendizaje se asocia con el planteamiento de una situación-problema de modelación de fenómenos como proceso de matematización. Llamaremos a esta manera de alcanzar el aprendizaje *situaciones abiertas de modelación*. Este planteamiento debe generar una estrategia de solución por parte del estudiante. Además, el diseño pretende ser suficientemente abierto para propiciar todo tipo de procedimientos para su resolución.

Consideraciones teóricas

Partir de modelos específicamente de contexto *físico* puede facilitar la manera de formular variados significados. Esta propuesta tiene un marcado rumbo hacia las distintas representaciones y registros del objeto matemático. Esto aunado al enfoque actual que existe sobre el proceso de producción del conocimiento formal. Es aquí donde la manera que se tiene de concebir el conocimiento se encuentra ligada al dominio de su aplicación. De manera que el estudiante se adueña de este conocimiento tanto en el proceso de la producción de formalización del mismo, como en el proceso de producción de habilidades intelectuales en el aula. Estas dos instancias de aprendizaje deben pasar por procesos similares solo que este último debe presentarse bajo el marco de la contextualización, concebido como una permanente construcción del conocimiento sujeta al entorno social.

Solo a manera de ejemplo y para ilustrar lo que se pretende conseguir con este tipo de prácticas, el cual necesita muy pocos elementos materiales, presentamos el siguiente experimento llamado *La vida de una burbuja de jabón*: Un grupo de niños forman burbujas de tres o cuatro tipos de jabón y establecen que van hacer mediciones para determinar cuál de los jabones tiene las burbujas más estables y así saber cual es el jabón de mejor calidad. Después, con cronómetro en mano miden y registran los segundos que las burbujas tardan en reventarse. Repiten este proceso veinte o treinta veces, obteniendo datos de manera parecida a los observados en el laboratorio. Paso seguido, obtienen información sobre las burbujas. Luego, organizan los datos, ¿cuántas burbujas duran entre uno y dos segundos,

entre dos y tres, hasta llegar 15 o 16 segundos? De este análisis encuentran que después de esos registros las burbujas ya no duran tanto, derivando esto en una discusión. El maestro les dice, por ejemplo, que nunca tienes idea de cuanto dura una burbuja Podemos decir entonces que existe un elemento que llamamos probabilidad estadística. Después, los niños obtienen la idea de que siete u ocho segundos es el tiempo más probable de vida de una burbuja. El maestro entonces les pregunta. ¿Puede una burbuja de jabón durar 20 segundos? Los niños se miran unos a los otros, dudan.... Uno de ellos contesta hay una de 19 segundos, el maestro entonces sugiere hacer más burbujas (Lederman León, 2007).

Lo que intentamos privilegiar en la clase de matemáticas es poner al estudiante en contacto directo con experiencias *reales o físicas* de fácil realización, para que utilice la variación física, y que la imagen del concepto cumpla con su definición: “La modelación de fenómenos como vía de contextualizar la matemática”. Esta teoría del aprendizaje permite crear imágenes del concepto en correspondencia con la definición del concepto. Esto se refiere a que las imágenes del concepto sean compatibles con la definición del concepto, y además, las imágenes cubran totalmente su definición (Carrión, Arrieta, 1998). El concepto desarrolla una comprensión tan natural que se deriven en situaciones abiertas de modelación, basado en el proceso de elaboración de representaciones físico- matemáticas que den coherencia y sustenten este tipo de situaciones de aprendizaje.

Materiales y métodos

Iniciamos con el estudio de un fenómeno físico muy simple. Este fenómeno se refiere a hacer fluir la arena utilizando un embudo con un pequeño orificio. Partiendo de aquí, se diseñaron una serie de prácticas alrededor de este experimento para descubrir

la linealidad del fenómeno. Si representamos en un sistema de coordenadas e identificamos las variables *tiempo* y *peso* de la arena, la gráfica que se presenta es una recta. Tenemos entonces un fenómeno que proporciona un sistema dinámico (variación física) en donde se observa fácilmente que algo esta variando

con respecto del tiempo. En base a este proceso, el observador puede lograr o no distintas actividades tales como: distinguir las variables a observar, obtener información, organizar los datos, y tratar de predecir la cantidad de tiempo en función de la cantidad de arena. Para entonces pedirle un modelo matemático que represente lo anterior y poder llevarlo a un concepto llamado *rapidez de cambio* (*constante* en este caso). Ahora bien, en el marco de esta investigación educativa, se

reconoce el valor del método cualitativo dado que aporta valiosa información que permite reconocer los procesos con la precisión que se requiere. Por otra parte, cada práctica se diseña en función del tipo de variación (constante, no constante), de las condiciones (costo, validez, tipo de mediciones, tiempo y equipo) y de las características de la situación-problema.

Desarrollo de la práctica

El maestro y alumnos preparan la práctica. Para esto cuentan con: soporte universal, pinzas, embudo, báscula, cronómetro, arena, etc. La tarea se realiza por equipos, donde se presentan una serie de

preguntas. A continuación se presenta un ejemplo (práctica No 1). Los materiales y equipo correspondientes se muestran en la figura 4.



Figura 4. Material y equipo utilizado en la práctica

Materiales y equipo necesario

1 Kg. de Arena (Azúcar, sal,..)
Embudo cónico
Báscula y Cronómetro

Fecha Febrero del 2008

I. Propósito: Promover en contexto la apropiación del saber matemático.

II. Actividades :

1. Coloque el equipo y materiales según se indique y/o según se muestra en la figura.

2. Vacíe dentro del cono, 100 g de arena
 3. Déjela fluir y utilizando el cronómetro registre el tiempo que la arena tardó en salir.
 4. Repita las actividades 2 y 3, utilizando ahora 200 g y 250 g, respectivamente.
 5. En base a los registros anteriores anote su hipótesis sobre los tiempos de fluido para:
 - i) 150 g ii) 300 g iii) 400 g
 6. Verifique con el equipo, su nivel de acierto hipotético :
 7. Registre su hipótesis sobre el peso de la arena que pudiera fluir en los siguientes tiempos:
 - i) 30 Seg ii) 60 Seg iii) 90 Seg.
- o Registre lo más ampliamente posible sus conclusiones sobre generalizar:
 - o Obtención de tiempos a partir de peso conocido.
 - o Obtención de peso a partir de tiempo conocido.

Resultados

Estos resultados se refieren a la práctica No 1, con alumnos del CBTIS No 128, y las observaciones hechas se encuentran bajo el marco didáctico. Los alumnos parecen no tener problema para construir una tabla de doble entrada para organizar los datos, lo cual conlleva la identificación y distinción de las variables a observar.

A partir de la organización de esta información reconocen que a tiempos iguales, fluyen cantidades iguales de arena, para luego predecir la cantidad de tiempo en función de la cantidad de arena y viceversa.

Estos resultados indican también que los alumnos concluyen que resulta muy adecuado aplicar la regla de tres directa o como sumas de tiempos y pesos proporcionales. En este sentido, ellos no encuentran razón alguna para obtener otro proceso para resolver la situación, siempre y cuando no sea la forma experimental a la cual vale decir que regresan de manera recurrente para validar su propuesta de solución.

Se observa que los alumnos relacionan los registros numéricos (tablas y regla de tres) con la situación real en distintas partes del proceso, con el propósito tanto de comprobación de resultados como de

pronósticos y anticipación. A continuación algunos alumnos sugieren al grupo graficar en el plano coordenado y relacionan solo en parte este registro (gráfico) con la situación presentada. Además, observan alguna relación solo de manera discreta puntual (local) y no relacionan la continuidad del flujo de arena con la continuidad de la gráfica. Por otra parte, logran relacionar bajo el registro numérico (la regla de tres), la cantidad de masa que fluye por unidad de tiempo. Sin embargo, aparece un primer resultado como consecuencia de la unidad de tiempo que utilizan 8, 9, 10 ó 16 segundos, derivado de las condiciones iniciales, diferentes embudos (los alumnos aún no perciben esto). Aunado a esto, se produce una aportación y se generaliza, y utilizando 10 segundos como unidad de tiempo, estableciendo esto último en función de lo que consideran una medida práctica. Ya conociendo estos resultados, observan que en cada equipo de trabajo hay un embudo diferente. Es en este momento cuando el maestro introduce una pregunta: ¿qué cantidad de arena fluye en 1 segundo?, lo cual produce un nuevo conflicto dentro del grupo. Dado que medir el tiempo en intervalos de 1 segundo o menores parece encontrarse fuera de su experiencia cotidiana. A saber, representa para la mayoría de ellos una primera aproximación lo infinitamente

pequeño que se encuentra íntimamente relacionado con los conceptos de infinito físico y continuidad. La figura 5 muestra algunas mediciones de tiempo registradas durante la implementación de la propuesta. Es en este contexto que no debe perderse de vista que el flujo es el de un medio discreto. Sin embargo, ellos presentan una respuesta correcta, la cual se deriva de la práctica operativa del área de la física. Para esto, los alumnos si encuentran aplicaciones de inmediato, anticipando resultados con mayor rapidez. Siendo esta instancia donde los

alumnos reconocen lo práctico de esta última medida.

Finalizaremos diciendo que los alumnos no lograron relacionar este concepto de *rapidez* con la pendiente de la línea recta. Esto, a pesar de haber reconocido que en cada equipo de trabajo hay un embudo de diferentes características físicas, y que se compartieron esta información y sus respectivos resultados. La figura 6 muestra la interpretación gráfica del fenómeno lineal por parte de un alumno.

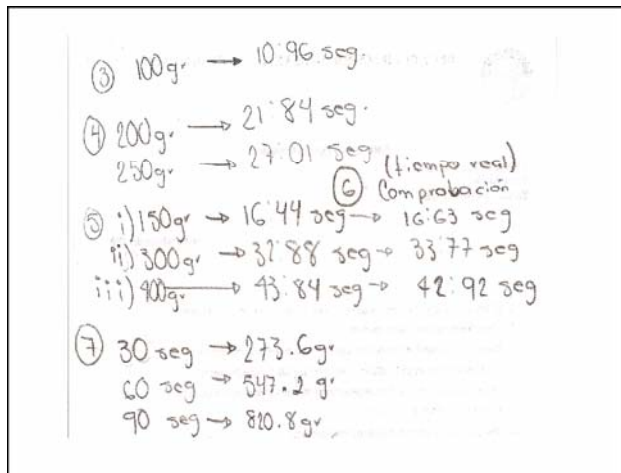


Figura 5. Muestra de datos registrados durante el desarrollo de la propuesta.

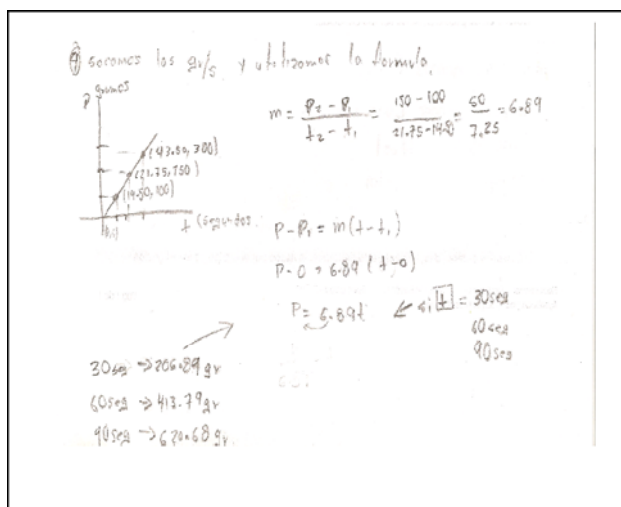


Figura 6 Ejemplo de la gráfica trazada por un alumno.

Conclusiones

Uno de los resultados que llaman nuestra atención es que los alumnos relacionan los distintos registros en distintas etapas del proceso y no solo al final del proceso. Reconocer algunas prácticas en nuestros alumnos a través del uso de diferentes registros de representación aporta información del comportamiento y tratamiento de sus ideas.

Esté tipo situaciones abiertas de modelación conlleva a nuevos problemas didácticos, pero también encuentra nuevos enfoques que permiten acercarse a problemas

tan propios de los cursos de cálculo. Es aquí donde el estudiante tiene sus primeras aproximaciones a conceptos como variación, rapidez de cambio, y continuidad.

Finalmente, podemos decir que esta primera investigación proporciona algún tipo de avance en el desarrollo cognitivo del concepto de variación lineal. Esto último en función de la actitud de nuestros alumnos que muestran cada vez un mayor grado de participación en cada práctica.

Referencias

Carrión, V y J. Arrieta.1998. *La modelación de fenómenos como proceso de matematización para la formación, tratamiento y conversión de representaciones en diferentes sistemas semióticos*. En investigaciones en matemática educativa II, editor Hitt F., Grupo Editorial Iberoamérica, págs. 225-241. México.

Dolores, C. 1998. *Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial*. En investigaciones en matemática educativa II, editor Hitt F., Grupo Editorial Iberoamérica, págs. 257-272. México

Lederman, L. 2008. *La vida de una burbuja de jabón*. Revista muy interesante #05 año XXV, Grupo Editorial Televisa Internacional, págs. 50-52

Luna, J. 1997. *La geometría analítica a través de modelos físicos*. Tesis para obtener el grado de maestro en matemática educativa, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

